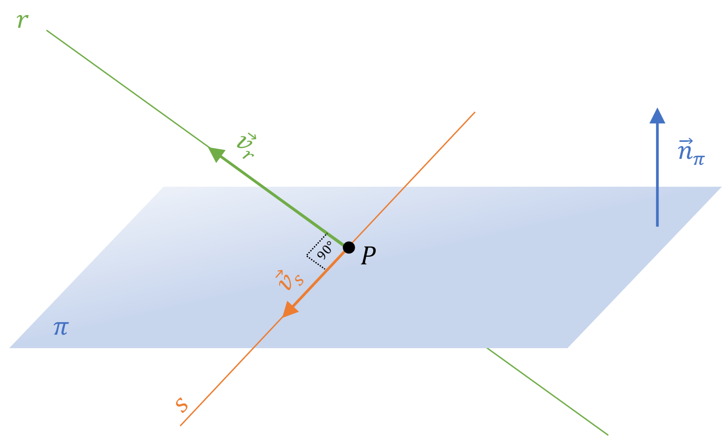
Encuentra la ecuación continua de la recta que está contenida en el plano $\boldsymbol{\pi \equiv x - 2y + z - 4 = 0}$ y corta perpendicularmente a la recta

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ 3x - y + z - 3 = 0 \end{cases}}$$

La recta s que nos piden debe estar contenida dentro del plano π y cortar perpendicularmente a la recta r. Haremos una representación del plano π con su vector normal $\vec{n}_\pi$, la recta r con su vector director $\vec{v}_r$, y la recta s con su vector director $\vec{v}_s$:



Comenzamos calculando el vector normal del plano π a partir de sus coeficientes:

$$\pi \equiv x - 2y + z - 4 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\pi \equiv (1, -2, 1)$$

Y el vector director de la recta r multiplicando vectorialmente los vectores normales de los planos que cortan en ella:

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ 3x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1 \equiv (1, -1, -1), \vec{n}_2 \equiv (3, -1, 1)$$

$$\vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -4, 2) \equiv (1, 2, -1)$$

Tal y como se puede ver en el dibujo, vector director de la recta s ha de ser perpendicular al vector $\vec{v}_r$ (porque las rectas r y s son perpendiculares), así como perpendicular al vector $\vec{n}_\pi$ (porque la recta y el plano son paralelos). Por tanto:

$$\vec{v}_s = \vec{n}_\pi \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (4, 2, 4) \equiv (2, 1, 2)$$

Ya tenemos el vector director de s. Ahora solamente nos falta obtener un punto por el que pase. Como se puede comprobar en el dibujo, este punto no es otro que el punto de corte entre el plano π y la recta r, por lo que resolvemos por el método de Gauss el sistema de 3 ecuaciones formado por el plano y la recta:

$$\begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ 3x - y + z - 3 = 0 \\ x - 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3:\,F_3-F_1]{F_2:\,F_2-3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3:\,2F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ 2y + 4z = 6 \\ 8z = 16 \end{cases}$$

$$8z = 16 \Rightarrow z = 2$$

$$2y + 4 \cdot 2 = 6 \Rightarrow 2y = -2 \Rightarrow y = -1$$

$$x - (-1) - 2 + 1 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Por lo que el punto P de la recta s es $P(0, -1, 2)$, que junto con el vector $\vec{v}_r$ calculado previamente, nos permite escribir la ecuación de la recta s:

$$\boxed{r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}}$$