



Integrales racionales

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Tipo 1: grado $P(x) \geq$ grado $Q(x)$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

$P(x)$: dividendo $C(x)$: cociente

$Q(x)$: divisor $R(x)$: resto

Ejemplo:

$$\int \frac{x^3 + x + 4}{x^2 + 1} dx =$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{c} P(x) \\ \swarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} Q(x) \\ \swarrow \end{array} \\ \begin{array}{r} x^3 + 0x^2 + x + 4 \quad | \quad x^2 + 1 \\ -x^3 \qquad -x \qquad x \quad \leftarrow C(x) \\ \hline \quad \quad \quad / \quad \quad \quad / \quad \quad 4 \\ \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ \qquad \qquad \qquad C(x) \end{array} \end{array}$$

$$\int \frac{x^3 + x + 4}{x^2 + 1} dx = \int x dx + \int \frac{4}{x^2 + 1} dx = \boxed{\frac{x^2}{2} + 4 \arctan x + C}$$



Tipo 2: grado $P(x) < \text{grado } Q(x)$ con raíces simples en el denominador

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{B}{x-b} dx + \dots}$$

Ejemplo:

$$\int \frac{4}{x^2 - 1} dx$$

Factorizamos el denominador y separamos la fracción:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$\int \frac{4}{x^2 - 1} dx = \int \frac{A}{x-1} dx + \int \frac{B}{x+1} dx$$

Calculamos A y B :

$$\frac{4}{x^2 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$\frac{4}{x^2 - 1} = \frac{A(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$4 = A(x+1) + B(x-1)$$

Si $x = 1$:

$$4 = A(1+1) + B(1-1)$$

$$4 = 2A \Rightarrow A = 2$$

Si $x = -1$:

$$4 = A(1+(-1)) + B(1-(-1))$$

$$4 = -2B \Rightarrow B = -2$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{4}{x^2 - 1} dx &= \int \frac{A}{x-1} dx + \int \frac{B}{x+1} dx = \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{-2}{x+1} dx \\ &= 2 \int \frac{1}{x-1} dx - 2 \int \frac{1}{x+1} dx = 2 \ln|x-1| - 2 \ln|x+1| + C \end{aligned}$$



Tipo 3: grado $P(x) < \text{grado } Q(x)$ con raíces simples y múltiples en el denominador

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{B}{(x-a)^2} dx + \dots}$$

Ejemplo:

$$\int \frac{3x - 15}{x^3 - 3x - 2} dx$$

Factorizamos el denominador:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 3x - 2 = (x^2 - x - 2)(x + 1)$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2)$$

Como el factor $(x + 1)$ está elevado a la 2, debemos escribirlo elevado a la 2 y a la 1. Si estuviera elevado a la 4, lo escribiríamos elevado a la 4, a la 3, a la 2 y a la 1:

$$\int \frac{3x - 15}{x^3 - 3x - 2} dx = \int \frac{A}{x + 1} dx + \int \frac{B}{(x + 1)^2} + \int \frac{C}{x - 2} dx$$

Calculamos A , B y C :

$$\frac{3x - 15}{x^3 - 3x - 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x - 2}$$

$$\frac{3x - 15}{x^3 - 3x - 2} = \frac{A(x - 1)(x - 2)}{(x + 1)^2(x - 2)} + \frac{B(x - 2)}{(x + 1)^2} + \frac{C(x + 1)^2}{x - 2}$$

$$3x - 15 = A(x - 1)(x - 2) + B(x - 2) + C(x + 1)^2$$



Si $x = 2$:

$$3 \cdot 2 - 15 = A(2 - 1)(2 - 2) + B(2 - 2) + C(2 + 1)^2$$
$$-9 = 9C \Rightarrow C = -1$$

Si $x = -1$:

$$3 \cdot (-1) - 15 = A((-1) - 1)((-1) - 2) + B((-1) - 2) + C((-1) + 1)^2$$
$$-18 = -3B \Rightarrow B = 6$$

Si $x = 0$ (por ejemplo):

$$3 \cdot 0 - 15 = A(0 - 1)(0 - 2) + 6 \cdot (0 - 2) + (-1) \cdot (0 + 1)^2$$
$$-15 = -2A - 13 \Rightarrow A = 1$$

Por tanto:

$$\int \frac{3x - 15}{x^3 - 3x - 2} dx = \int \frac{A}{x + 1} dx + \int \frac{B}{(x + 1)^2} + \int \frac{C}{x - 2} dx$$
$$= \int \frac{1}{x + 1} dx + \int \frac{6}{(x + 1)^2} + \int \frac{-1}{x - 2} dx$$
$$= \int \frac{1}{x + 1} dx + 6 \int \frac{1}{(x + 1)^2} - 1 \int \frac{1}{x - 2} dx$$
$$= \ln|x + 1| + 6 \frac{(x + 1)^{-1}}{-1} - \ln|x - 2| + C$$
$$= \boxed{\ln|x + 1| - \frac{6}{x + 1} - \ln|x - 2| + C}$$



Tipo 3: grado $P(x) < \text{grado } Q(x)$ con raíces complejas en el denominador

Integral de tipo logaritmo + arcotangente:

1. Conseguir la derivada del denominador en el numerador sumando o restando números.
2. Separar la integral de tipo logarítmica del resto.
3. En la segunda integral buscar el cuadrado perfecto sumando o restando algún número.
4. La primera integral es de tipo logarítmica y la segunda de tipo arcotangente.

Ejemplo:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 10x + 26} dx$$

Factorizamos el denominador:

$$x^2 + 10x + 26 = 0$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm 2i}{2} \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

El denominador no tiene raíces reales. Aplicamos el método:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{x^2 + 10x + 26} dx &= \int \frac{2x + 10 - 10}{x^2 + 10x + 26} dx \\ &= \int \frac{2x + 10}{x^2 + 10x + 26} dx - 10 \int \frac{1}{x^2 + 10x + 26} dx \\ &= \ln|x^2 + 10x - 26| - 10 \int \frac{1}{(x^2 + 10x + 25) + 1} dx \\ &= \ln|x^2 + 10x - 26| - 10 \int \frac{1}{(x + 5)^2 + 1} dx \\ &= \boxed{\ln|x^2 + 10x - 26| - 10 \arctan(x + 5) + C} \end{aligned}$$