Calcular el tensor de inercia de un cubo homogéneo de densidad ρ, masa M y arista de longitud b. A continuación, aplicando el teorema de Steiner, calcular el tensor de inercia respecto del centro de masas del cubo.

El tensor de inercia se define como:

$$I_{ij} = \int_V \rho(r) \left[\delta_{ij} \sum_k x_k^2 - x_i x_j \right] dv$$

Aplicando la definición para un cuerpo tridimensional, el tensor de inercia es una matriz 3×3:

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Donde:

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm\,, \qquad I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm\,, \qquad I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int xydm\,, \qquad I_{xz} = I_{zx} = -\int xzdm\,, \qquad I_{yz} = I_{zy} = -\int yzdm$$

Se sitúa el origen de coordenadas en uno de los vértices del cubo y los ejes de coordenadas en las aristas contiguas a dicho vértice. Supondremos un cubo de densidad volumétrica uniforme ρ:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{b^3}$$

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

$$dm = \rho dV = \rho dxdydz = \frac{M}{b^3} dxdydz$$

Momentos de inercia respecto a los ejes coordenados:

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm = I_{xx} = \int_0^b \int_0^b \int_0^b (y^2 + z^2) \frac{M}{b^3} dxdydz$$

$$= \frac{M}{b^3} \int_0^b \int_0^b [xy^2 + xz^2]_0^b dydz = \frac{M}{b^3} \int_0^b \int_0^b (by^2 + bz^2) dydz$$

$$= \frac{M}{b^3}\int_0^b \left[\frac{by^3}{3} + byz^2\right]_0^b dz = \frac{M}{b^3}\int_0^b \left(\frac{bb^3}{3} + bbz^2\right) dz = \frac{M}{b^3}\int_0^b \left(\frac{b^4}{3} + b^2z^2\right) dz$$

$$= \frac{M}{b^3}\left[\frac{b^4z}{3} + \frac{b^2z^3}{3}\right]_0^b = \frac{M}{b^3}\left(\frac{b^4b}{3} + \frac{b^2b^3}{3}\right) = \frac{M}{b^3}\frac{2b^5}{3} = \frac{2}{3}Mb^2$$

Por simetría

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}Mb^2$$

Productos de inercia:

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int xydm = -\int_0^b\int_0^b\int_0^b xy\frac{M}{b^3}dxdydz = -\frac{M}{b^3}\int_0^b\int_0^b\int_0^b xydxdydz$$

$$= -\frac{M}{b^3}\int_0^b\int_0^b \left[\frac{x^2y}{2}\right]_0^b dydz = -\frac{M}{b^3}\int_0^b\int_0^b \frac{b^2y}{2}dydz = -\frac{M}{b^3}\int_0^b \left[\frac{b^2y^2}{4}\right]_0^b dz$$

$$= -\frac{M}{b^3}\int_0^b \frac{b^2b^2}{4}dz = -\frac{M}{b^3}\int_0^b \frac{b^4}{4}dz = -\frac{M}{b^3}\left[\frac{b^4z}{4}\right]_0^b = -\frac{M}{b^3}b^5 = -\frac{1}{4}Mb^2$$

Nuevamente, por simetría:

$$I_{xy} = I_{yx} = I_{xz} = I_{zx} = I_{yz} = I_{zy} = -\frac{1}{4}Mb^2$$

Por tanto:

$$\boxed{I_{\text{vértice}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 \\ -\frac{1}{4}Mb^2 & \frac{2}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 \\ -\frac{1}{4}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 & \frac{2}{3}Mb^2 \end{pmatrix}}$$

Para calcular el tensor de inercia del cubo respecto de un eje que pase por su centro, es decir, su centro de masas, utilizamos el teorema de Steiner:

$$I_{ij} = J_{ij} - M\left(a^2\delta_{ij} - a_i a_j\right)$$

Las componentes del vector a, que es la distancia del eje que está en la arista respecto del eje que pasa por el centro de masas, el centro, son:

$$a_x = a_y = a_z = \frac{b}{2}$$

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

$$I_{xx} = J_{xx} - M\left(a^2 \underbrace{\delta_{ij}}_{1} - a_x a_x\right) = \frac{2}{3}Mb^2 - M\left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - a_x^2\right)$$

$$= \frac{2}{3}Mb^2 - M\left(a_y^2 + a_z^2\right) = \frac{2}{3}Mb^2 - M\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) = \frac{2}{3}Mb^2 - \frac{1}{2}Mb^2 = \frac{1}{6}Mb^2$$

Por simetría

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{1}{6}Mb^2$$

Para los productos de inercia tenemos:

$$I_{xy} = J_{xy} - M\left(a^2 \underbrace{\delta_{ij}}_{0} - a_x a_y\right) = -\frac{1}{4}Mb^2 - M\left(0 - a_x a_y\right)$$

$$= -\frac{1}{4}Mb^2 + M\left(\frac{b}{2}\frac{b}{2}\right) = -\frac{1}{4}Mb^2 + \frac{1}{4}Mb^2 = 0$$

Y por simetría lo mismo para todos los otros productos de inercia:

$$I_{xy} = I_{yx} = I_{xz} = I_{zx} = I_{yz} = I_{zy} = 0$$

Con ello, el tensor de inercia respecto de un eje que pase por el centro de masas es:

$$\boxed{I_{\text{centro}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}Mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}Mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}Mb^2 \end{pmatrix}}$$

Otra opción más directa es aplicar así el teorema de Steiner:

$$I = I_{CM} + M\begin{pmatrix} d_y^2 + d_z^2 & -d_x d_y & -d_x d_z \\ -d_x d_y & d_x^2 + d_z^2 & -d_y d_z \\ -d_x d_z & -d_y d_z & d_x^2 + d_y^2 \end{pmatrix}$$

$$I_{CM} = I_{\text{vértice}} - M\begin{pmatrix} d_y^2 + d_z^2 & -d_x d_y & -d_x d_z \\ -d_x d_y & d_x^2 + d_z^2 & -d_y d_z \\ -d_x d_z & -d_y d_z & d_x^2 + d_y^2 \end{pmatrix}$$

$$d = (d_x, d_y, d_z) = \left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

$$I_{CM} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 \\ -\frac{1}{4}Mb^2 & \frac{2}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 \\ -\frac{1}{4}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 & \frac{2}{3}Mb^2 \end{pmatrix} - M\begin{pmatrix} \frac{b^2}{2} & -\frac{b^2}{4} & -\frac{b^2}{4} \\ -\frac{b^2}{4} & \frac{b^2}{2} & -\frac{b^2}{4} \\ -\frac{b^2}{4} & -\frac{b^2}{4} & \frac{b^2}{2} \end{pmatrix} =$$

$$\boxed{I_{CM} = Mb^2\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}}$$