UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

LIZANDRA FARIAS DE OLIVEIRA

UMA BREVE DESCRIÇÃO DA IDEIA DE INFINITO

FORTALEZA – CEARÁ

2017

LIZANDRA FARIAS DE OLIVEIRA

UMA BREVE DESCRIÇÃO DA IDEIA DE INFINITO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro

FORTALEZA – CEARÁ
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Oliveira, Lizandra Farias de.
Uma breve descrição da ideia de infinito [recurso eletrônico] / Lizandra Farias de Oliveira. - 2017.
1 CD-ROM: il.; 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 51 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Graduação em Matemática, Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro.

1. Conjuntos Infinitos. 2. Infinito. 3. Georg Cantor. 4. Paradoxos. I. Título.

LIZANDRA FARIAS DE OLIVEIRA

UMA BREVE DESCRIÇÃO DA IDEIA DE INFINITO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciada em Matemática.

Aprovada em: 12 de dezembro de 2017

BANCA EXAMINADORA

Claudemir Silvino Leandro

Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro (Orientador)

Universidade Estadual do Ceará – UECE

Albimar Silva Neri

Prof. Me. Albimar Silva Neri

Universidade Estadual do Ceará – UECE

Manoel Pereira Gomes Neto

Prof. Me. Manoel Pereira Gomes Neto

Universidade Estadual do Ceará – UECE

Dedico esse trabalho ao meu falecido pai,

Leonardo “Rozzely”.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer à Deus pela graça que me deste ao conseguir desenvolver esse trabalho, porque colocaste pessoas ao meu lado que me auxiliaram nessa jornada, porque me deste sabedoria e não me deixou desistir. Agradeço não só pela conclusão de um trabalho, mas também pela conclusão de um curso todo.

Outro agradecimento dedico ao meu professor orientador, Claudemir Leandro. Ele que teve profunda paciência comigo e me ajudou imensamente no decorrer desse trabalho, viu minhas lágrimas caírem quando pensei que nada poderia dar certo e por mais atarefado que estivesse dedicou seu tempo a ler o que eu havia escrito. Muito obrigada, professor.

Agradeço também ao meu namorado, Marcos Alves, por sempre estar ao meu lado me dando apoio e carinho, dizendo que tudo daria certo e que eu era capaz. Além disso, me ajudou estudando alguns teoremas comigo, abriu a minha mente àquele detalhe que eu não estava enxergando. Muito obrigado por seu companheirismo.

E agora agradeço a ele! Paulo Rodrigues! Quem é esse indivíduo? Esse é o cara que me aturou durante cinco anos nessa graduação, esteve comigo desde o primeiro semestre do curso, sempre estudamos juntos tirando dúvidas um do outro e além disso compartilhando um pouco de nossas histórias de vida. Valeu, cara, pela amizade!

Quero ainda agradecer à minha família por torcer por mim, me ajudando indiretamente nessa caminhada.

Meu muito obrigada a todos.

“Ninguém é suficientemente perfeito, que não possa aprender com o outro e, ninguém é totalmente estruído de valores que não possa ensinar algo ao seu irmão”

(São Francisco de Assis)

RESUMO

Desde as séries iniciais a ideia de infinito é apresentada na escola formal. É senso comum utilizar a palavra infinito para se referir a simplesmente algo muito grande. O real conceito de infinito foi algo perturbador aos filósofos gregos e durante a história surgiram estudiosos que tentaram compreender o real conceito de infinito, um desses foi o matemático Georg Cantor que desenvolveu a teoria do infinito. Diante disso, o objetivo deste trabalho é conhecer o que seja infinito, mais especificamente o infinito trabalhado na matemática, como alguns matemáticos lidaram com o conceito de infinito ao longo dos séculos, alguns paradoxos que surgiram ao se trabalhar com o infinito e a teoria desenvolvida por Georg Cantor. Foi feita uma pesquisa exploratória de natureza qualitativa se utilizando de um levantamento bibliográfico. Espera-se que esse trabalho possa ser usado como fonte de pesquisa por aqueles que desejem conhecer sobre o tema ou que precisem estudar para alguma disciplina relacionada ao assunto, que professores se utilizem da abordagem histórica aqui contida para executar aulas voltadas ao mesmo tema e que esta pesquisa possa futuramente desencadear outras.

Palavras-chave: Conjuntos infinitos. Infinito. Georg Cantor. Paradoxos.

RESUMEN

Desde las series iniciales la idea de infinito es presentada en la escuela formal. Es sentido común utilizar la palabra infinito para referirse a sencillamente algo muy grande. El real concepto de infinito fue algo perturbador para los filósofos griegos y durante la historia surgieron estudiosos que intentaron comprender el real concepto de infinito, uno de esos fue el matematico Georg Cantor que desarrolló la teoría del infinito. Ante eso, el objetivo de éste trabajo es conocer lo que sea infinito, más específicamente el infinito trabajado en las matemáticas, como algunos matemáticos trataron el concepto de infinito a lo largo de los siglos, algunas paradojas que surgieron al trabajar con el infinito y la teoría desarrollada por Georg Cantor. Se hizo una búsqueda exploratoria de naturaleza cualitativa utilizandose de un levantamiento bibliográfico. Se espera que ese trabajo pueda ser usado como fuente de investigación por aquellos que deseen conocer acerca del tema o que necessiten estudiar para alguna asignatura relacionada al asunto, que profesores se utilicen del enfoque histórico aquí contenido para ejecutar clases vueltas a lo mismo tema y que esta búsqueda pueda en el futuro desencadenar otras.

Palabras clave: Conjuntos infinitos. Infinito. Georg Cantor. Paradojas.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O universo é constituído de coisas em quantidade, elementos que podem ser medidos e contados. Daí houve a necessidade de contar e medir as coisas, mas para isso era preciso símbolos que representassem as quantidades, assim surgiram os números, que podiam ser cardinais ou ordinais. O primeiro serve para expressar uma quantidade e o segundo é usado para indicar uma ordem, posição ou lugar de uma sequência. Cotidianamente são usados os números cardinais e ordinais, como, por exemplo, ao contar o total de funcionários de uma empresa, na contagem de andares de um determinado prédio, em uma competição quando somente o que alcançou primeiro lugar ganha, quando é perguntada a data do dia na qual se diz a posição do dia em relação ao mês ou quando se diz a idade de alguém.

É notável, então, que no universo existe sempre algo que pode ser submetido a uma contagem, mas existem coisas que são difíceis de serem representadas por um número que simbolize seu tamanho exato, como a quantidade de grãos de areia ou o número de gotas do oceano ou ainda o total de estrelas no céu. Muitos poderão dizer que tudo isso tem quantidade infinita, pois comumente o infinito é denotado como algo muito grande, mas embora sejam muitos e muitos grãos de areia, uma imensidão de gotas no oceano e uma porção gigantesca de estrelas no céu ainda assim possuem um total finito.

O infinito, segundo o dicionário *on-line* Michaelis (2017), é um adjetivo que denota algo "que não é finito; que não tem e nem pode ter limites [...]; ilimitado, infindável". Esta noção de infinito como algo ilimitado foi fonte de confusão durante o decorrer da história. Os antigos gregos tentaram compreendê-lo e inúmeras vezes chegaram à algumas contradições. A compreensão do infinito se tornou complexa e foi preciso distinguir seu conceito em dois tipos, o infinito em potência e o infinito em ato.

Compreender o infinito é bastante necessário ao cursar disciplinas como cálculo diferencial e integral e análise real, seu conceito é fundamental para a matemática, mas pouco compreendido. Como há um obstáculo em entender e trabalhar com o infinito muitos pesquisadores tentaram encontrar maneiras que possibilitem diminuir a dificuldade trazendo alguns conceitos prévios, propostas didáticas e também descrevendo a história do infinito.

A seguir serão apresentadas brevemente três pesquisas, de autores distintos, que tiveram como tema a ideia de infinito. O primeiro procura conhecer qual a noção que os alunos do ensino básico têm sobre infinito. O segundo busca saber se é viável trabalhar a disciplina de cálculo no ensino médio para que os futuros universitários da área de exatas possam ter um conhecimento mais profundo sobre a matéria, sendo assim ele relaciona a importância do infinito no desenvolvimento do cálculo. E por último, o terceiro explora a teoria do infinito desenvolvida por Georg Cantor (1845 - 1918), apresentando alguns teoremas, sem deixar de comentar sobre a visão que tinham alguns filósofos e pensadores acerca do infinito.

O primeiro autor é Borges (2015), que em sua dissertação apresenta diferentes visões acerca do infinito, o infinitamente grande, o infinitamente pequeno e o infinito como "quantidade", se utilizando de paradoxos para exemplificar tais visões distintas. Conceitua e distingue os conceitos de infinito em potência e infinito em ato. Ele também apresenta a teoria criada por Georg Cantor. E ainda coloca alguns conceitos que ele acredita serem necessários para o entendimento sobre a teoria de conjuntos, como, por exemplo, o que é uma função injetiva, sobrejetiva ou bijetiva, a cardinalidade de um conjunto e conjuntos enumeráveis e não enumeráveis.

Nessa mesma dissertação, Borges (2015) aplica um questionário para alunos do ensino básico, do 8º ano do ensino fundamental ao 3º ano ensino médio, onde ele procura saber qual o conhecimento que os alunos participantes da pesquisa têm sobre infinito, se tinham uma ideia apenas pautada no senso comum ou com uma noção matemática. Com isso, ele traz uma proposta didática que tem por objetivo aclarar o conceito de infinito, trabalhando com os alunos problemas simples do cotidiano, como, por exemplo, fazer uma correspondência entre o número de ovos e o número de embalagens para calcular a quantidade de elementos de um conjunto finito; propor a contagem da quantidade de grão de areia para esclarecer que infinito não é simplesmente um valor muito grande; e ao tentar colocar em ordem os números reais mostrar que existem conjuntos que não podem ser "contados", ou seja, enumerados.

O segundo autor, Silva (2013), traz em seu TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) de graduação uma abordagem histórica acerca do infinito, desde a Grécia Antiga até o século XX, citando alguns paradoxos, fazendo distinção entre infinito em ato e infinito em potência e apresentando as primeiras noções de limite, tudo isto com a finalidade de mostrar a importância do infinito no desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. O principal foco da sua pesquisa é investigar se é possível tratar da disciplina de cálculo, de maneira introdutória, no ensino médio através da proposta do uso da história do infinito como recurso didático.

Silva (2013) ainda fez uma entrevista presencial com alguns professores do ensino médio e ensino superior para tomar conhecimento das opiniões desses profissionais sobre a proposta didática trazida pelo mesmo. Ele se utilizou de um questionário contendo questões abertas onde, segundo o mesmo, o entrevistado pode ter mais liberdade de expressão. Sua motivação para essa pesquisa foram os altos índices de abandono e reprovação na disciplina de cálculo diferencial e integral, sendo assim, neste mesmo trabalho, ele ainda apresenta alguns dados estatísticos, que fazem uma análise de tais índices e que os confirmam, mostrando que há falhas no processo ensino-aprendizagem desse conteúdo.

E o terceiro e último autor a ser citado aqui é Sena (2011), que em seu TCC de especialização, assim como Silva (2013), faz uma breve descrição sobre como era tratado o infinito na escola pitagórica, citando alguns paradoxos trazidos pelo filósofo Zenão. Os matemáticos Galileu Galilei (1584-1642), Bernhard Bolzano (1781-1848) e Georg Cantor (1845-1918) também são algumas das figuras citadas em seu ensaio. Sena (2011) se refere aos dois primeiros dizendo que "com eles é desenvolvida a idéia do chamado infinito atual" (SENA, 2011, p. 13) ou infinito em ato, como é tratado no presente trabalho. E, sobre Cantor o autor apresenta a teoria deste, demonstrando alguns teoremas relacionados a tal teoria e a descoberta dos números cardinais de conjuntos infinitos, os designados números transfinitos.

Porém, antes de tratar do infinito em uma linguagem própria da matemática, Sena (2011) traz alguns conceitos necessários para uma melhor compreensão do que será mostrado posteriormente, que são algumas definições sobre conjuntos, funções e cardinalidade.

Nos dois primeiros estudos apresentados vê-se que os autores focam no ensino e aprendizagem do infinito, trazem uma proposta didática com o objetivo de aclarar a noção que os alunos do ensino básico têm de infinito. Já na terceira pesquisa o autor foca mais na aprendizagem onde o leitor tem acesso aos conceitos prévios necessários para compreender a teoria criada por Georg Cantor.

A pesquisa de mestrado de Borges (2015) confirma que comumente se utiliza a palavra infinito para se referir, simplesmente, a algo muito grande, ilimitado ou que é impossível de contar. Mas, é preciso conhecer melhor o que é o infinito. O conceito de infinito foi algo perturbador aos filósofos gregos e durante a história surgiram estudiosos que tentaram compreender o real conceito de infinito, um destes foi o matemático Georg Cantor que desenvolveu a teoria do infinito. A partir disto, neste trabalho será utilizado como norte as seguintes perguntas: o que é o infinito? Como se desenvolveu a teoria do infinito feita por Georg Cantor?

Agora perceba a importância da realização do corrente trabalho. Desde o ensino básico é trabalhado a noção de infinito, como, por exemplo, nos assuntos sobre: conjuntos numéricos – onde se diz que tais conjuntos são formados por infinitos números, sendo o dos números naturais o primeiro a ser apresentado e no decorrer dos anos letivos se aponta outros conjuntos, dos inteiros, dos racionais, dos irracionais, dos reais e dos complexos; a noção primitiva de ponto – onde se diz que por um ponto passam infinitas retas; dízimas periódicas – números que crescem infinitamente respeitando um "padrão de repetição", chamado de período; progressões geométricas (P.G.) – estas são separadas em P.G. finita e P.G. infinita, sendo classificadas assim por conta de sua quantidade de termos; sistemas lineares – quando se diz que um sistema é possível e indeterminado ele possui infinitas soluções. Nestes assuntos é transmitida apenas a ideia básica de infinito. Mas ao ingressar na universidade, mais especificamente em um curso de exatas, os alunos se deparam com disciplinas como cálculo diferencial e integral, análise real e teoria dos números, em que o infinito é aplicado de maneira mais aprofundada e muitos alunos podem sentir dificuldade em compreender e trabalhar com essa nova e complexa abordagem. Então, por isso, é importante estudar o conceito de infinito, pois é bastante discutido ao longo da formação acadêmica.

Em contraste à matemática ministrada no ensino básico, o infinito foi estudado repetidamente durante a história, então é de grande relevância investigar sua trajetória, como foi tratado, como era entendido, o porquê de ser definido em infinito em potência e infinito em ato, a importância de Georg Cantor (1845 - 1918) no estudo de conjunto infinitos e a razão de sua teoria ter sido menosprezada. A abordagem histórica do conceito de infinito serve também como recurso didático, para trazer clareza ao assunto, possibilita contextualizá-lo, mostra o infinito não só na matemática, pois ele foi estudado também na física e até na teologia.

Este trabalho como um todo é importante, podendo ser usado como fonte de pesquisa àqueles que desejem conhecer sobre o tema, ou que precisem estudar para alguma disciplina relacionada ao assunto, contribuindo com projetos de outros autores, fazendo parte de seu levantamento bibliográfico. Professores que queiram trabalhar a história do infinito com seus alunos podem também se utilizar deste trabalho, mostrando a evolução de seu conceito e os paradoxos relacionados ao mesmo. Ainda tal pesquisa pode ser estendida fazendo um estudo sobre a hipótese do contínuo.

Ainda é importante o estudo do infinito não somente pela sua utilidade, como foi citado, mas também pela sua beleza, uma vez que é intrigante e estimulante o estudo do infinito. Através dele é possível chegar a inúmeros paradoxos, como os de Zenão, na teoria de Cantor quando se vê que diferentes conjuntos enumeráveis têm mesma "quantidade", nas convergências de séries infinitas, que consiste em somar infinitas parcelas e encontrar um resultado finito para esta adição, ou quando são divergentes e o manuseio das propriedades comutativa e associativa levam a soma infinita a inúmeros resultados diferentes, no uso do termo infinito como qualidade. As inúmeras importantes figuras presentes na história do infinito com certeza não se voltaram a estudar o infinito apenas pela sua utilidade.

Em vista do que foi dito, o presente trabalho tem principal objetivo conhecer o que seja infinito, mais especificamente o infinito trabalhado na matemática, como alguns matemáticos lidaram com o conceito de infinito ao longo dos séculos, alguns paradoxos que surgiram ao se trabalhar com o infinito e a teoria desenvolvida por Georg Cantor. Nesse sentido, os objetivos específicos são:

- ✓ Relatar brevemente o desenvolvimento do conceito de infinito ao longo da história e também um pouco da biografia do matemático Georg Cantor;
- ✓ Conhecer a teoria de Cantor e como ele chegou a ela;
- ✓ Apontar alguns paradoxos que surgiram ao se trabalhar com a ideia de infinito.

Para alcançar tais objetivos é preciso seguir um caminho, se utilizar de meios que conduzam à finalidade do projeto, é necessário ter uma metodologia de pesquisa.

A palavra metodologia é oriunda do grego composta pelos termos meta, que quer dizer “através de”, “por meio”, “fim”, mais *hodos*, que significa “via”, “caminho”, acrescida de *logos*, que tem sentido de “estudo”, “conhecimento”, “ciência”. Assim, metodologia é o estudo dos métodos ou a ciência que estuda o caminho que conduz ao fim ou ainda “consiste em estudar, compreender e avaliar os vários métodos disponíveis para a realização de uma pesquisa acadêmica”. Em vista disso, será definido a seguir que metodologia foi utilizada para a construção dessa obra.

A metodologia utilizada no presente trabalho é de natureza qualitativa, que conforme Prodanov e Freitas (2013, p. 70) este tipo de pesquisa “não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. [...] Tal pesquisa é descritiva. [...] O processo e seu significado são os focos principais da abordagem” e ainda exprimem que a “interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa” (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 70).

Nesse sentido, para alcançar o objetivo desse projeto foi feita uma pesquisa exploratória, onde “tem por finalidade proporcionar mais informações sobre o assunto que vamos investigar, possibilitando sua definição e seu delineamento, isto é, facilitar a delimitação do tema da pesquisa” (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 52).

Após a escolha do tema central do trabalho, iniciou-se a fase de levantamento bibliográfico. Assim, será feito uma pesquisa de literaturas com foco em responder às indagações levantadas nesta corrente produção.

Para responder à pergunta “o que é o infinito?” não basta apenas definir seu conceito, é preciso também saber a evolução desse conceito, como os antigos tratavam da ideia de infinito, qual o seu processo histórico ao longo do tempo. O leitor poderá perceber que o conceito de infinito foi bastante discutido no decorrer da história.

Na tentativa de compreender o infinito muitos estudiosos acabaram sendo conduzidos a inúmeros paradoxos. Então, nesse trabalho foi organizado um capítulo com alguns exemplos desses paradoxos, procurando fazer com que o leitor tenha conhecimento das dificuldades enfrentadas ao se trabalhar com o conceito de infinito, de que maneira o infinito vai contra o nosso senso comum, como a ideia errada de infinito pode nos levar ao paradoxo.

E sobre a questão "como se desenvolveu a teoria do infinito feita por Georg Cantor?" neste trabalho será traçado um caminho onde primeiro se distinguirá o infinito em potência e infinito em ato, depois será mostrado que o infinito dos números naturais é igual ao infinito dos inteiros e racionais, porém diferente e menor ao infinito dos números reais. Através destas últimas conclusões Cantor criou três importantes teoremas onde se verifica que existem infinitos de tamanhos diferentes e infinitos conjuntos numéricos infinitos.

Como Georg Cantor foi uma figura bastante importante para o desenvolvimento da teoria de conjuntos infinitos se julgou interessante relatar um pouco sobre sua vida e obra, um grande matemático incompreendido ao tentar entender o infinito.

Sendo assim, veja que o trabalho seguirá um caminho totalmente teórico. No decorrer da escrita dessa obra será realizado um levantamento bibliográfico a partir de fontes secundárias, como livros, revistas, monografias, dissertações e teses, pertinentes ao assunto sobre teoria do infinito, para que se possa responder as questões levantadas nesse projeto.

O desenvolvimento do presente trabalho foi organizado em três seções. Primeiramente, no segundo capítulo, será tratado de maneira breve sobre o conceito de infinito ao longo da história, desde a Grécia antiga até a teoria dos conjuntos infinitos de Cantor, comentando que visões tinham alguns filósofos e outros pensadores acerca do conceito de infinito. Foi elaborado também uma breve biografia sobre o matemático Georg Cantor, a respeito de sua vida e obras, relatando suas contribuições e alguns problemas enfrentados por ele quanto ao estudo sobre o infinito.

No terceiro capítulo será apresentado como Cantor provou sua teoria de que existem infinitos conjuntos numéricos infinitos, uns maiores que outros, iniciando pela distinção entre infinito em ato e infinito em potência, definida por Aristóteles (384 - 322 a.C.), seguindo pelas demonstrações que os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais são conjuntos enumeráveis, sendo por isso "iguais em quantidade", e que os números reais não é enumerável e finalizando essa seção com três importantes teoremas de Cantor, que mostram a existência de infinitos maiores que outros.

E no quarto e último capítulo será mostrado alguns paradoxos que surgiram ao se trabalhar com a ideia de infinito, serão eles os quatro conhecidos paradoxos de Zenão, o Hotel de Hilbert e algumas somas paradoxais.

2 O INFINITO AO LONGO DA HISTÓRIA

O conceito de infinito foi alvo de discussão entre filósofos, teólogos e matemáticos durante o decorrer da história, provocou controvérsias e sempre esteve ligado a inúmeros paradoxos. Foi na Grécia Antiga onde teve início o interesse em conceituar e compreender o infinito.

Neste capítulo será descrito como foi trabalhado o infinito ao longo da história, a evolução de seu conceito, desde a Grécia Antiga até a teoria de conjuntos infinitos de Cantor. Ao final será dado ênfase na bibliografia do matemático Georg Cantor citando suas contribuições e alguns problemas enfrentados por ele quanto ao estudo sobre o infinito.

Por volta do século V a.C. surgem as primeiras reflexões acerca do infinito através dos paradoxos do filósofo grego Zenão de Eléia (495 - 435 a.C.). Nesses paradoxos Zenão utilizava argumentos que procuravam mostrar a inconsistência dos conceitos de multiplicidade e divisibilidade, mostrava a dificuldade lógica ao se trabalhar com o conceito de infinito. Em um de seus paradoxos ele chegou a afirmar não ser possível percorrer determinada distância, pois para andar um caminho completo antes era preciso caminhar metade do todo, mas antes disso deveria percorrer metade da metade do caminho e assim sucessivamente num processo inacabável, concluindo no final que o processo nem sequer chega a iniciar por conta de a "primeira" subdivisão do caminho ser infinitamente pequena. Seus paradoxos mais conhecidos são: Aquiles, Dicotomia, Estádio e Flecha.

Os paradoxos relacionados ao infinito tornaram-se bastante conhecidos na Grécia, sendo estudados inclusive por Aristóteles (384 - 322 a.C.), que buscou compreender o conceito de infinito. No terceiro livro de sua obra "Física", ele introduz duas formas distintas de infinito, "o infinito como processo de crescimento sem final ou de subdivisão sem final e o infinito como uma totalidade completa" (RAMÓN ORTIZ, 1994, p. 61, tradução nossa). São esses os posteriormente chamados infinito em potência e infinito em ato, respectivamente. Embora Aristóteles tenha admitido dois conceitos de infinitos ele acreditava apenas na existência do infinito em potência. Argumentava que o infinito em ato não existia de fato, mas era necessário à matemática para subdividir ou somar, por exemplo.

Para compreender melhor esses dois conceitos de infinito considere um número natural qualquer, observe que sempre é possível encontrar um número ainda maior e outro maior que esse último, isso acontece interminavelmente, sem fim, isso é o infinito em potência. Agora tome o conjunto dos números naturais como um todo, esse conjunto é infinito, não se trata de uma quantidade específica de elementos, mas da totalidade de números que é infinita.

Séculos mais tarde depois de Aristóteles o infinito foi discutido num sentido mais teológico, era considerado como algo exclusivamente divino. Santo Agostinho (354 - 430) e Santo Tomás de Aquino (1225 - 1274) acreditavam que somente Deus poderia ser infinito e só Ele poderia alcançá-lo.

Até então, a noção de infinito estava restrita ao conceito de infinito em potência. A partir do século XVII surgiram matemáticos interessados em estudar o "tamanho" dos conjuntos infinitos e, assim, contribuíram com o desenvolvimento da ideia de infinito em ato.

2.1 O INFINITO APÓS O SÉCULO XVII

O século XVII foi um grande marco na matemática, foi nesse período que nasceram a geometria analítica e o cálculo infinitesimal. Foi nessa época também que muitos matemáticos se voltaram à questão do infinito em ato, o primeiro deles foi o italiano Galileu Galilei (1564 - 1642). Em 1638, Galileu publicou em sua obra "*Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze*" (Discursos e demonstrações matemáticas sobre duas novas ciências) o conhecido "Paradoxo de Galileu" que diz que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ poderiam ser colocados em correspondência um-a-um com o conjunto dos números quadrados perfeitos $A = \{0, 1, 4, 9, \ldots\}$, representados da seguinte maneira:

$$\begin{array}{lcccccccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ A: & 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 & 100 & \cdots \end{array}$$

onde cada número natural possui um único número quadrado correspondente e esse último possui uma única raiz.

Ao analisar esses dois conjuntos é comum imaginar que existem mais números naturais que números quadrados ou que um seja maior que o outro, porém Galileu observou que conjuntos finito e infinito se comportam de forma distinta de tal maneira que não é possível utilizar os termos maior, menor ou igual ao se comparar conjuntos infinitos.

Tal paradoxo foi exposto na obra de Galileu através de uma conversa entre três personagens *Salviati*, *Simplícius* e *Sagredo*, onde o primeiro é um homem sábio representando o próprio Galileu, o segundo era um defensor das ideias de Aristóteles e o terceiro era um leigo inteligente. Eis abaixo um trecho do diálogo:

> **Salviati.** (…) Se eu disser que os números tomados na sua totalidade, incluindo os quadrados e os não quadrados, são mais numerosos do que os quadrados sozinhos, enunciarei uma proposição verdadeira, não é?
> **Simplícius.** Certamente.
> **Salviati.** De seguida, se eu perguntar agora quantos quadrados há, podemos responder, sem nos enganarmos, que há tantas quantas as raízes quadradas correspondentes, atendendo a que todo o quadrado tem a sua raiz e toda a raiz o seu quadrado, que um quadrado não tem mais do que uma raiz, nem uma raiz mais do que um quadrado.
> **Simplícius.** Exactamente.
> **Salviati.** Mas se eu perguntar quantas raízes há, não se pode negar que há tantas quantos os números, porque todo o número é a raiz de algum quadrado. Assim sendo, será, portanto, preciso dizer que há tantos números quadrados como números, uma vez que eles são tantos como as raízes e que as raízes representam o conjunto dos números. No entanto dizíamos de princípio que há mais números do que quadrados, já que a maior parte dos números não são quadrados. (…)
> **Sagredo.** Então, qual a conclusão a tirar nestas condições?
> **Salviati.** Aos meus olhos, a única conclusão possível é dizer que o conjunto dos números, dos quadrados, das raízes é infinito; que o total dos números quadrados não é inferior ao conjunto dos números, nem este superior àquele. E finalmente, que os atributos igual, maior e menor não têm sentido para quantidades infinitas, mas somente para quantidades finitas (GALILEI,1638 *apud* MONTEIRO, 2015, p. 23).

O paradoxo de Galileu foi analisado posteriormente por outro matemático, o tcheco Bernhard Bolzano (1781 - 1848). Em seu livro "*Paradoxien der Unendlichen*" (Paradoxos do Infinito) ele buscou comparar conjuntos infinitos procurando estabelecer algum tipo de critério nestas comparações considerando apenas a característica do conjunto sem a necessidade de contagem de seus elementos e concluiu que todo conjunto infinito poderia se relacionar com um subconjunto próprio. Porém, não considerava que isso fosse suficiente para afirmar que dois conjuntos infinitos possuam um mesmo "tamanho", ou seja, mesma cardinalidade, como é definido atualmente.

Bolzano sentia a necessidade de definir o conceito de infinito e, de acordo com Sampaio (2008), justificava que o fato de existirem tantos paradoxos sobre a ideia do infinito era a inexistência de formalização desse conceito. Um dos que tentaram responder a essa indagação foi o matemático alemão Richard Dedekind (1831 - 1916) que em seu livro, publicado em 1888, de título "*Was sind und was sollen die Zahlen?*" (O que são e para que servem os Números?), apresentou a definição de conjunto infinito e finito da seguinte maneira: "um conjunto é infinito se, e somente se, possui uma correspondência um-a-um com alguma de suas partes próprias, isto é, partes distintas do todo; e será finito se uma tal correspondência não existir" (Dourado, 2017, p. 23), em outras palavras, um conjunto é infinito se ele possui a mesma cardinalidade de seu subconjunto próprio, caso contrário o conjunto será finito.

Outro matemático a trabalhar com as considerações feitas por Bolzano foi Georg Cantor (1845 - 1918), que era amigo de Dedekind e costumeiramente trocavam cartas dialogando a respeito das teorias um do outro. Cantor foi o criador da teoria dos conjuntos infinitos e considerava a ideia de bijeção entre dois conjuntos o princípio básico para comparar conjuntos infinitos. Ele definiu que "um conjunto finito é aquele cuja potência [cardinalidade] é um inteiro positivo. Para tal conjunto, todo subconjunto próprio tem uma potência menor, enquanto que um conjunto infinito A tem a mesma potência que algum subconjunto próprio de A" (RAMÓN ORTIZ, 1994, p. 66, tradução nossa). Daí, depois definiu que dois conjuntos, finito ou infinito, têm a mesma cardinalidade se existe uma correspondência um-a-um entre os elementos de cada conjunto, diferente de Bolzano que não considerava tal afirmação.

Cantor foi responsável por simbolizar a cardinalidade dos conjuntos infinitos, criando assim os cardinais transfinitos. Em particular, para representar a cardinalidade do conjunto dos números naturais é usado a primeira letra do alfabeto hebraico *Aleph* com índice zero, $\aleph_0$. Esta letra $\aleph$ possui muitos significados na cultura judaica. Segundo Andrade (2010, p. 6), *aleph* "representa a natureza infinita e unicidade de Deus". Alguns dos nomes, em hebraico, que iniciam com essa letra são *Ein Sof* (infinitude de Deus), *Ehad* (um) e *Eloim* (Deus), todos ligados à divindade, então esta letra é uma imagem da unidade de Deus, o único ser infinito, como acreditavam Santo Agostinho e Santo Tomás de Aquino.

Agora com a definição de conjunto infinito Cantor tratou de comparar conjuntos numéricos, chegando à conclusão de que era possível fazer uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros. Posteriormente, fez a bijeção dos naturais com o conjunto dos números racionais. Os conjuntos que têm bijeção com o conjunto dos naturais são definidos como conjuntos enumeráveis. A partir disso, Cantor concluiu que os inteiros e os racionais são enumeráveis e, portanto, possuem cardinalidade igual a $\aleph_0$. Mas ao tentar comparar o conjunto dos naturais com o conjunto dos reais viu que estes possuem cardinalidades diferentes, ou seja, o conjunto dos números reais não é enumerável.

Georg Cantor já havia descoberto que "não existe infinito menor que o infinito dos números naturais" (Dourado, 2017, p. 25) e ao comparar o conjunto dos números naturais com o conjunto dos números reais viu que este último, além de não ser enumerável, tem cardinalidade maior que a do primeiro. A cardinalidade dos números reais é também chamada de contínuo, e por isso denotada por c. Logo $\aleph_0 < c$. Depois de chegar a este resultado Cantor afirmou que não existia nenhum transfinito entre $\aleph_0$ e c, e denominou esta suposição de "hipótese do contínuo", porém não conseguiu provar sua veracidade.

Foi visto que a história do infinito foi marcada pela dificuldade em compreender o seu complexo conceito, surgindo assim inúmeros paradoxos. Foi, inclusive, atribuído a Deus como sendo o único a ser infinito. E depois, finalmente, compreendido pelo matemático Georg Cantor, ele sentiu a necessidade de entender o infinito por completo.

Foi Cantor quem de fato marcou a história do infinito na matemática, ele desafiou o senso comum e depois dele o infinito em ato finalmente foi aceito. A seguir será descrito um pouco da história deste grande matemático.

A seguinte biografia foi escrita baseada nas obras de Bell (1948) e Boyallián (2009).

2.2 GEORG CANTOR

Em 3 de março de 1845 nasceu na cidade São Petersburgo, Rússia, o matemático Georg Ferdinand Ludwing Philipp Cantor. Filho mais velho do casal Georg Waldemar Cantor, um próspero comerciante, e María Anna Bohm. Georg filho cresceu como protestante, que era a religião de seu pai, e sua mãe era católica desde nascida.

Cantor iniciou seus primeiros estudos em casa tendo aulas com um tutor, depois passou a frequentar a escola primária de São Petersburgo.

Quando o jovem Cantor tinha 11 anos ele e sua família se mudaram para a Wiesbaden, Alemanha, pois seu pai sofria de uma doença pulmonar e buscavam nessa mudança um clima mais quente que o da atual cidade.

Desde cedo, Cantor demonstrava talento em matemática, mais especificamente em trigonometria e, segundo Bell (2001), estava decidido a ser matemático, porém seu pai queria que ele fosse engenheiro, pois era uma profissão lucrativa. Então, em 1860, satisfazendo o desejo do pai, Georg Cantor ingressou na *Höhere Gewerbeschule* (Escola de Engenharia) de Darmstadt, Alemanha.

Cantor escreveu uma carta a seu pai lhe pedindo permissão para que pudesse seguir seus estudos em matemática. Sendo assim, com o pedido concedido, em 1862, ele entrou na Universidade de Zurich. No ano seguinte, Georg mudou para a Universidade de Berlim, onde teve aulas com os professores Karl Weierstrass (1815 - 1897), Ernst Kummer (1810 - 1893) e Leopold Kronecker (1823 - 1891). Neste mesmo ano, em junho 1863, seu pai vai a óbito.

Em 1867, Cantor recebeu o título de doutor com a tese sobre teoria dos números “*Aequationibus Secundi Gradus Indeterminatis*” (Sobre as Equações Indetermináveis de Segundo Grau) que, conforme Bell (2001), foi baseada num profundo estudo do livro de Friedrich Gauss (1777 - 1855) “*Disquisitiones Arithmeticae*” (Investigações Aritméticas). Neste mesmo ano, começou a dar aulas em um liceu para meninas em Berlim.

Aos 24 anos de idade Georg Cantor foi nomeado como *Privatdozent* na Universidade de Halle, era um cargo de professor particular, associado a instituição, mas o pagamento era dado pelos próprios alunos. Após três anos foi promovido a professor extraordinário na mesma universidade.

Em 1872, Cantor publicou um artigo que apresenta a unicidade da representação de uma função como série trigonométrica, que era um problema em aberto desde 1822 com autoria de Joseph Fourrier (1768 - 1830). Muitos já haviam tentado resolver essa difícil questão, inclusive Heinrich Eduard Heine (1821 - 1881), que foi quem apresentou o problema a Cantor. Outros trabalhos sobre séries trigonométricas foram publicados por Cantor entre 1870 e 1872 e esses, conforme Boyallián (2009), refletiam a influência de seu professor Weierstrass e também foi a partir deles que Cantor iniciou sua teoria sobre conjuntos infinitos.

Aos 29 anos, em 9 de agosto de 1874, Cantor se casa com Vally Guttmann (1849 - 1923), que era amiga de sua irmã, e passaram a lua de mel em Interlaken, Suiça. Desta união nasceram seis filhos, dois homens e quatro mulheres.

No mesmo ano de seu casamento ele publica o artigo "*Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller eellen algebraischen Zahlen*" (Sobre uma propriedade do sistema de todos os números reais algébricos) onde ele demonstra que o conjunto dos números racionais é um conjunto enumerável, ou seja, que o infinito dos números dos racionais é do mesmo "tamanho" que o infinito dos números naturais. Além dos racionais, Cantor ainda mostra neste artigo que os números algébricos, números que são raízes de equações polinomiais com coeficientes inteiros, também são enumeráveis.

Desde 1872 Cantor tinha amizade com o matemático Richard Dedekind (1831 - 1916) com quem trocava cartas discutindo suas teorias. Em 1877, lhe enviou uma carta dizendo que havia descoberto que objetos de dimensões distintas, como a reta e o plano, tinham um infinito do mesmo "tamanho", na carta ele dizia surpreendido "vejo, mas não acredito". Cantor enviou este resultado ao *Crelle's Journal*, uma importante revista de matemática da época, para ser publicado, porém foi a princípio recusado por um dos editores do jornal que era seu antigo professor, Kronecker, mas Dedekind interveio por Cantor e seu trabalho foi publicado. Mesmo tendo conseguido divulgar seu artigo na revista Cantor ficou com mágoas de Kronecker e nunca mais aceitou publicar seus trabalhos nesta revista.

Cantor já havia chegado à conclusão que o conjunto dos números racionais é enumerável, a partir disso Cantor tentou verificar se isso também ocorria com o conjunto dos números reais, porém encontrou que esse último é um conjunto não enumerável e publicou, em 1884, a demonstração de seu resultado no artigo "*Ein Beiuag zur Mannigfaltigkeitslehre*" (Uma contribuição à teoria das variedades).

Ainda em 1884 Cantor teve seu primeiro ataque de depressão e nesses períodos sempre acabava se afastando da matemática e se voltava para a filosofia e a literatura. Em uma de suas crises nervosas ele chegou a pedir à universidade na qual trabalhava que lhe permitisse ministrar aulas de Filosofia, pois se sentia incapaz de fazer matemática.

Cantor escreveu e publicou muitos outros trabalhos além daqueles aqui citados. Um dos últimos foi o artigo "*Beitrage zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre*" (Contribuições a fundamentação da teoria dos conjuntos transfinitos), publicado em duas partes, em 1895 e 1897, na revista *Mathematische Annalen*, no qual trata da aritmética transfinita.

Em seus estudos, Cantor chegou ao resultado de que a cardinalidade dos números reais é maior que a cardinalidade dos números naturais. Sabendo disso, surgiu a dúvida se existia algum cardinal infinito que estivesse entre o infinito desses dois conjuntos. Cantor, a princípio, acreditou que não existisse e chamou esta suposição de "hipótese do contínuo", porém ele não conseguiu provar tal ideia.

Georg Cantor foi internado várias vezes no Sanatório Universitário de Halle devido as suas crises nervosas. E foi neste lugar que ele passou seu último ano de vida, vindo a falecer em 6 de junho de 1918, aos 73 anos de idade, decorrente de um ataque do coração.

Assim termina a história de um dos maiores matemáticos, um homem que tivera sua teoria incompreendida por muitos da época, porém depois dele o infinito nunca mais foi o mesmo.

3 A TEORIA DE CANTOR

A teoria de Cantor se desenvolveu em relação aos números cardinais transfinitos, números utilizados para simbolizar a cardinalidade de um conjunto numérico infinito. Cantor mostrou que existem infinitos conjuntos infinitos, uns maiores que outros. Sua teoria foi de grande importância para melhor compreender o infinito em ato, uma nova visão acerca do conceito de infinito.

Então, neste capítulo será explanado sobre a teoria de Cantor, acerca do “tamanho” do infinito e a existência de infinitos conjuntos numéricos infinitos, uns maiores que outros. Será iniciado com o conceito de infinito, fazendo distinção entre infinito em potência e infinito em ato. Depois, será abordado sobre a cardinalidade de conjuntos infinitos. E, por fim, será apresentado três importantes teoremas de Cantor.

As demonstrações matemáticas feitas ao longo deste capítulo foram baseadas nos trabalhos de Andrade (2010), Dourado (2015), Dourado (2017) e Santana (2010).

3.1 INFINITO EM POTÊNCIA E INFINITO EM ATO

O conceito de número foi algo discutido reiteradamente ao longo da história. Assim também ocorreu com o conceito de infinito, sendo deste designados dois tipos: o infinito em potência e o infinito em ato.

Foi Aristóteles (384 - 322 a.C.), no terceiro livro de sua obra “Física”, quem primeiro introduziu as duas formas distintas de infinito, “o infinito como processo de crescimento sem final ou de subdivisão sem final e o infinito como uma totalidade completa” (RAMÓN ORTIZ, 1994, p. 61, tradução nossa), ou seja, os posteriormente chamados de infinito em potência e infinito em ato, respectivamente.

Assim, distinguindo-os é dito que o infinito em potência está centrado na ideia de sucessão infinita, um processo que nunca acaba, algo sem fim, como em uma caminhada onde sempre é possível dar mais um passo (Dourado, 2017). O infinito em ato é classificado como algo acabado, uma infinidade que resulta numa “quantidade”, por exemplo, o número pi é um número decimal que possui infinitas casas decimais, porém representado pela letra π, um número estático.

Embora Aristóteles tenha admitido dois conceitos de infinitos ele acreditava apenas na existência do infinito em potência. Argumentava que o infinito em ato não existia de fato, mas era necessário à matemática para subdividir ou somar, por exemplo.

Em 1851, foi publicado o livro "*Paradoxien der Unendlichen*" (Paradoxos do Infinito) escrito pelo matemático tcheco Bernhard Bolzano (1781 - 1848), o primeiro a "atualizar" o conceito de infinito, tratando do assunto neste livro. Mas foi somente com Georg Cantor (1845 - 1918), autor da revolucionária teoria do infinito, que difundiu o infinito em ato, dando ao infinito uma nova visão.

Para finalizar a respeito da diferença entre os dois conceitos citados, nas duas subseções seguintes serão dados exemplos a fim de melhor ilustrar essa distinção.

3.1.1 Os mundos finito e infinito em uma só igualdade

No ensino fundamental é introduzido o assunto de dízimas periódicas, números decimais que possuem um ou mais algarismos repetidos infinitamente depois da vírgula, e em conjunto deste é ensinado um método para encontrar a fração geratriz de tais dízimas. Eis um exemplo: qual a fração geratriz do número 1,666...? Para responder a esta questão basta representar o número 1,666... por uma incógnita, x, ou seja,

$$x = 1{,}666\ldots \tag{1}$$

Depois, multiplica-se a igualdade por um número que seja conveniente, no caso o 10 e obtém-se

$$10x = 16{,}666\ldots \tag{2}$$

Em seguida, subtraindo (1) de (2) tem-se

$$10x - x = 16{,}666\ldots - 1{,}666\ldots$$
$$9x = 15$$
$$x = \frac{15}{9}$$
$$x = \frac{5}{3}$$

Assim, encontra-se o valor desconhecido, isto é, a fração geratriz que é 5/3.

Agora, voltando o olhar para a dízima 0,999... e calculando sua fração geratriz, pelo mesmo método exposto acima, encontra-se assombrosamente que $1 = 0.999\ldots$ Percebe-se que o número 0,999... se aproxima tanto da unidade 1 a ponto de se igualar a ela.

A partir desta igualdade pode-se compreender melhor o conceito de infinito em potência e infinito em ato. Na dízima periódica 0,999... os 9's se estendem infinitamente, é um processo que nunca termina, eis o infinito em potência. Porém, ao identificar a fração geratriz que é igual a 1 tem-se a ideia do infinito em ato, uma quantidade estática para o valor da dízima 0,999...

3.1.2 A relação entre os cinco mais importantes números da matemática

Em 1748, o matemático suíço Leonhard Euler[1] (1707 - 1783) descobriu uma das mais belas equações da matemática, conhecida atualmente como Identidade de Euler

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Tal equação reúne cinco importantes números da matemática e, π, i, 1 e 0.

A constante e, chamada número de Euler, dada pelo valor

$$e = 2{,}71828182845904523536\ldots,$$

é a base dos logaritmos naturais, um número irracional e também uma soma infinita.

O número π, descoberto na geometria, é a razão entre a medida da circunferência e o diâmetro de um círculo. Provado ser irracional, em 1761, por Johann Heinrich Lambert. Seu valor é

$$\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots$$

Um número é classificado como algébrico se este é solução de uma equação polinomial com coeficientes inteiros. Caso isto não ocorra o número é chamado de transcendente. Em 1873, a constante e foi provada ser um número transcendente, por Charles Hermite. Sabendo disto e que $e^{i\pi} = -1$ é um número algébrico Ferdinand von Lindemann concluiu que π é também um número transcendente.

A unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$ é importante em operações com raízes de números negativos.

E por último, a equação citada compõe os números 1 e 0, básicos nas operações matemáticas, que, singularmente, em porcentagem representam o tudo e o nada, respectivamente.

[1] Leonard Euler foi autor de 560 trabalhos publicados em vida, um deles foi *Introductio in analysin infinitorum* (Introdução à Análise do Infinito), uma obra publicada em 1748 em dois volumes, onde no primeiro trata sobre processos infinitos. Deve-se a ele algumas notações como, por exemplo, $f(x)$ para funções, e para base de logaritmos naturais e $\sum$ para somatórios, que são utilizadas até os dias atuais.

Tal expressão advém da fórmula de Euler

$$e^{xi} = \cos x + i\ sen\ x$$

cujo x é qualquer número real. Ao substituir a variável x por π se obtém

$$e^{\pi i} = \cos \pi + i\ sen\ \pi.$$

Sabendo que $\cos \pi = -1$ e $sen\ \pi = 0$, então

$$e^{\pi i} = -1 + i.0,$$

o que resulta em

$$e^{\pi i} = -1 \text{ ou } e^{\pi i} + 1 = 0.$$

Dentro desta "simples" equação é guardado tantos mundos e muitas histórias. É na Identidade de Euler que mais uma vez é possível encontrar a concretização de um infinito, números que se estendem infinitamente, e e π, operados entre si, com a base imaginária i e o número 1 são anulados, encontrando assim o infinito em ato.

3.2 OS NÚMEROS NATURAIS

Desde os primórdios da humanidade houve a necessidade de contar objetos, pessoas e animais. Derivando de tal necessidade, surgiram símbolos que representavam uma quantidade, os números naturais. Ao contar os elementos de um conjunto associa-se a cada elemento um número natural, no término da contagem o último número representa a quantidade total de objetos. Em uma contagem sempre se começa por 1, 2, 3 e se segue, sempre adicionando uma unidade, até o infinito. Mas quando é dito "até o infinito" tem-se a ideia de que em certo momento a contagem acaba, se acaba existe um último número, que número é este? Quantos números têm o infinito? Até onde se pode contar?

É nesse sentido que Georg Cantor trabalha em sua Teoria do Infinito. Os conjuntos numéricos possuem uma "quantidade", um total de elementos, uma cardinalidade, como é chamada, que é infinita. A cardinalidade dos números naturais $\mathbb{N} = \{1,2,3, \ldots\}$ é infinita, não se trata do número específico de elementos, mas da totalidade de números que é infinita.

Neste trabalho será usado $\#A$ para denotar a cardinalidade de um conjunto A.

Dois conjuntos A e B possuem mesma cardinalidade se, e somente se, há uma correspondência um-a-um entre os elementos de A e os elementos de B, ou seja, há uma bijeção entre os conjuntos, neste caso $\#A = \#B$. Denotando, assim, que os conjuntos A e B têm o mesmo tamanho.

Euclides (~300 a.C.) relata em sua obra "Os Elementos" a seguinte noção comum (ou axioma) de que "o todo é maior que suas partes". Porém, tal axioma não se aplica ao se trabalhar com conjuntos infinitos.

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots\}$ admite uma correspondência um-a-um com um subconjunto próprio, o conjunto dos números naturais pares:

$$\begin{array}{rcccccccc} \text{Números Naturais:} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \text{Números Naturais Pares:} & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots \end{array}$$

Portanto, o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números naturais pares possuem a mesma cardinalidade, pois é possível fazer uma bijeção entre os dois conjuntos.

Assim, também como ocorre com os números naturais pares, há uma bijeção entre os números naturais e os números naturais ímpares. Ou seja, números naturais, números naturais pares e números naturais ímpares possuem o mesmo tamanho.

A partir disto, Cantor admite a seguinte definição "um conjunto é infinito se, e somente se, possui uma correspondência um-a-um com alguma de suas partes próprias, isto é, partes distintas do todo; e será finito se uma tal correspondência não existir" (Dourado, 2017, p. 23).

Observe que ao ser retirado uma quantidade finita de elementos do conjunto dos números naturais o novo conjunto continuará sendo infinito, pois ainda é possível fazer uma equivalência entre o conjunto resultante e o dos números naturais, ou seja, terão mesma cardinalidade. Por exemplo, ao se retirar o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ o conjunto resultante será $\mathbb{N} - A = \{6, 7, 8, \dots\}$, que ainda é infinito, pois admite a seguinte bijeção:

$$\begin{array}{rcccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \mathbb{N} - A: & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \end{array}$$

No seguinte teorema é apresentado formalmente tal propriedade.

Teorema: Se A é um conjunto infinito e B um conjunto finito tal que $B \subset A$, então o conjunto que resulta de A menos B continuará a ser infinito.

Demonstração: Se B é finito, então $\#B = n$, com $n \in \mathbb{N}$.

Suponha que $A - B$ seja finito, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\#(A - B) = m$.

Perceba que os conjuntos B e $A - B$ são disjuntos entre si, isto é, não existe $x \in B$ e $x \in A - B$ simultaneamente.

Fazendo a união dos conjuntos tem-se que

$$(A - B) \cup B = A$$

Daí, como os conjuntos são disjuntos, então $\#(A - B) \cup B = m + n$, ou seja, $\#A = m + n$. Logo, o conjunto A é finito, o que é absurdo.

Portanto, o conjunto $A - B$ é infinito.

■

Com base neste teorema, Cantor chegou à seguinte conclusão "Não existe nenhum conjunto que seja infinito e que tenha cardinalidade menor do que a cardinalidade do conjunto dos números naturais, ou seja, não existe infinito menor do que o infinito dos números naturais" (Dourado, 2017, p. 25).

Para simbolizar a cardinalidade infinita dos números naturais é usado a primeira letra do alfabeto hebraico *aleph*, ℵ, com índice zero, o chamado número transfinito.

$$\#\mathbb{N} = \aleph_0$$

3.3 INTEIROS E RACIONAIS

Todo conjunto que tem correspondência um-a-um com o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais ou que seja finito é chamado de conjunto enumerável. Então, com base no que foi visto anteriormente, o conjunto dos números naturais pares é enumerável, assim também como qualquer subconjunto finito ou infinito de $\mathbb{N}$. Em particular, os conjuntos que são infinitos e enumeráveis possuem cardinalidade igual ao dos naturais, $\aleph_0$.

O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ é enumerável, pois existe a função $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ bijeção dada por

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, se\ n \text{ é } par \\ -\dfrac{(n+1)}{2}, se\ n \text{ é } ímpar \end{cases}$$

Considere n_1 e $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 \neq n_2$. Verifique os três casos:

1) Supondo n_1 ímpar e n_2 par. Pela definição de f, $f(n_1) < 0$ e $f(n_2) \geq 0$, ou seja, $f(n_1) \neq f(n_2)$;

2) Se n_1 e n_2 são pares. Então, $n_1 \neq n_2 \Rightarrow \frac{n_1}{2} \neq \frac{n_2}{2} \Rightarrow f(n_1) \neq f(n_2)$;

3) Se n_1 e n_2 são ímpares. Então, $n_1 \neq n_2 \Rightarrow -n_1 \neq -n_2 \Rightarrow -\frac{n_1}{2} \neq -\frac{n_2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{n_1}{2} - \frac{1}{2} \neq -\frac{n_2}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{(n_1+1)}{2} \neq -\frac{(n_2+1)}{2} \Rightarrow f(n_1) \neq f(n_2)$.

Assim, foi mostrado que f é injetora. Resta verificar se f é sobrejetora.

Seja $m \in \mathbb{Z}$, verifique se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = m$. Veja os seguintes casos:

1) Se $m \geq 0$. Então, tomando $n = 2m$, implica que $f(n) = f(2m) = \frac{2m}{2} = m$;

2) Se $m < 0$. Então, tomando $n = -(2m+1)$, implica que

$$f(n) = f(-(2m+1)) = -\frac{[-(2m+1)+1]}{2} = -\frac{(-2m)-1+1}{2} = -\frac{(-2m)}{2} = m.$$

Portanto, a função é bijetora, pois é injetora e sobrejetora. Assim, o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável.

A bijeção $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ pode ser explicitada da seguinte maneira:

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \mathbb{Z}: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & \cdots \end{array}$$

Concluindo, se há uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, então $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \aleph_0$.

É surpreendente saber que o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros possuem o mesmo "tamanho". Mais surpreendente ainda é saber que o conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ também possuem a mesma cardinalidade que a dos números naturais, ou seja, são enumeráveis.

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais constituem as frações $\frac{p}{q}$, tal que $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, isto é,

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}\ e\ q \neq 0\right\}.$$

Para demonstrar a bijeção $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ Cantor usou o "método da grade infinita", que consiste em alocar os termos, em primeiro caso os não-negativos, de forma que na primeira linha tenham apenas o zero e as frações com denominador 1, na segunda linha as frações com denominador 2, na terceira linha as frações com denominador 3 e assim sucessivamente, da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \cdots \\
 & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdots \\
 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots \\
 & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Para construir a bijeção, basta seguir a ordem das setas, conforme o esquema abaixo, saltando as frações redutíveis, pois, por exemplo, $\frac{4}{2} = 2$, um termo já “contado”.

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
\rightarrow & 0 & \rightarrow & \frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & & \frac{5}{1} & \rightarrow & \cdots \\
 & & & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
 & & & \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \frac{5}{2} & & \cdots \\
 & & & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
 & & & \frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & & \cdots \\
 & & & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
 & & & \frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & & \frac{5}{4} & & \cdots \\
 & & & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array}
$$

Assim sendo, será possível enumerar os números racionais não negativos.

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
\mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & \ldots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
\mathbb{Q}_+: & 0 & 1 & 2 & 1/2 & 1/3 & 3 & 4 & 3/2 & 2/3 & 1/4 & 1/5 & 5 & 6 & 5/2 & 4/3 & 3/4 & 2/5 & \ldots
\end{array}
$$

Da mesma maneira, pode ser encontrada a bijeção dos números naturais com os números racionais negativos.

Será demonstrado que união $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_-^*$ é enumerável utilizando o mesmo método de grade infinita. Os elementos de $\mathbb{Q}$ serão dispostos de forma que nas colunas ímpares fiquem os elementos de $\mathbb{Q}_+$ e nas colunas pares os elementos de $\mathbb{Q}_-^*$, seguindo a mesma lógica das linhas utilizadas anteriormente, na primeira linha terá apenas o zero e as frações de denominador 1, na segunda linha terá apenas as frações de denominador 2 e assim segue.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & \to & -\frac{1}{1} & \to & \frac{1}{1} & & -\frac{2}{1} & \to & \frac{2}{1} & & -\frac{3}{1} & \to & \frac{3}{1} & & \cdots \\
 & & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
 & & -\frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & -\frac{2}{2} & & \frac{2}{2} & & -\frac{3}{2} & & \frac{3}{2} & & \cdots \\
 & & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
 & & -\frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & & -\frac{2}{3} & & \frac{2}{3} & & -\frac{3}{3} & & \frac{3}{3} & & \cdots \\
 & & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
 & & -\frac{1}{4} & & \frac{1}{4} & & -\frac{2}{4} & & \frac{2}{4} & & -\frac{3}{4} & & \frac{3}{4} & & \cdots \\
 & & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

Acompanhando os sentidos das setas é possível enumerar cada termo, lembrando sempre de pular as frações redutíveis. Portanto, tem-se a união $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_-^*$ é enumerável, podendo ser representada de forma mais explícita pelo seguinte:

$\mathbb{N}$:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
$\mathbb{Q}$:	0	-1	1	-1/2	-1/3	1/2	-2	2	1/3	-1/4	-1/5	¼	-2/3	-3	3	-3/2	$\cdots$

Desta forma, sendo o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais um conjunto enumerável, então $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q} = \aleph_0$.

3.4 NÚMEROS REAIS: UM CONJUNTO NÃO ENUMERÁVEL

Até agora foi visto que os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais possuem mesma cardinalidade. Assim, é esperado que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais também tenha o mesmo tamanho que estes outros conjuntos. Porém, em 1878, Cantor mostrou que o conjunto dos números reais é não enumerável, ou seja, não é possível fazer bijeção entre os naturais e os reais (Dourado, 2017).

O conjunto dos números reais possuem igual cardinalidade ao intervalo (0, 1), pois existe a bijeção $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$. Então, para chegar ao resultado de $\mathbb{R}$ não enumerável Cantor primeiro mostra que o intervalo (0, 1) não é enumerável. Ele utiliza o método de redução ao absurdo supondo que o intervalo (0, 1) seja enumerável.

Observe que os números que estão entre 0 e 1 são da forma $0{,}a_1 a_2 a_3 \ldots$, onde cada dígito está no intervalo [0, 9], ou seja,

$$0 \leq a_1 \leq 9; 0 \leq a_2 \leq 9; 0 \leq a_3 \leq 9; \cdots$$

Por exemplo, o número $0{,}123456 \ldots$ está entre 0 e 1 e cada dígito está entre 0 e 9.

Repare que sempre é possível representar um número como uma expressão decimal infinita, como, por exemplo: $\frac{1}{3} = 0{,}333 \ldots$; $\pi = 3{,}14 \ldots$; $5 = 4{,}999 \ldots$; e $10{,}28 = 10{,}27999 \ldots$

Agora, supondo (0, 1) enumerável, então é possível enumerar todos os números contidos no intervalo da seguinte maneira:

$$1 \to 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \ldots$$

$$2 \to 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \ldots$$

$$3 \to 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{44} \ldots$$

$$\vdots$$

$$n \to 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4} \ldots$$

$$\vdots$$

O próximo passo é encontrar um número que esteja entre 0 e 1, porém que não esteja nesta lista acima, o que será a contradição. Utiliza-se o “processo diagonal” de Cantor para achar esse novo número, que será chamado de $D = 0, d_1 d_2 d_3 d_4$, onde

$$d_1 = a_{11} + 1; d_2 = a_{22} + 1; \cdots; d_n = a_{nn} + 1; \cdots$$

Porém, se $a_{ii} = 9$ será definido $d_i = 1$.

É claro que D está entre 0 e 1, entretanto D é desigual a qualquer número listado acima, pois é distinto do 1º número por ter o 1º dígito diferente; distinto do 2º número por ter o 2º dígito diferente; distinto do 3º número por ter o 3º dígito diferente; e assim sucessivamente, ou seja, D terá ao menos um dígito diferente aos demais números da lista. Logo, é absurdo fazer uma lista com todos os números entre 0 e 1 e nela não conter o número D, que está no mesmo intervalo. Portanto, o intervalo (0, 1) não é enumerável.

Logo, o conjunto $\mathbb{R}$ não é enumerável. E mais, $\#\mathbb{R} > \#\mathbb{N}$, pois não é possível fazer uma bijeção entre os números reais e os números naturais, os reais possuem números que não podem ser "contados".

3.5 TRÊS IMPORTANTES TEOREMAS DE CANTOR

Ao saber que $\#\mathbb{R} > \#\mathbb{N}$ houve a dúvida se existiriam conjuntos infinitos que fossem maiores que a cardinalidade do conjunto dos números reais. Cantor trouxe a resposta para essa questão através dos teoremas que serão apresentados a seguir. Tais teoremas foram publicados em duas partes, em 1895 e em 1897, no artigo "Contribuições a fundamentação da teoria dos conjuntos transfinitos" (Dourado, 2017).

Teorema 1: Se X é um conjunto, finito ou infinito, então a cardinalidade de X é estritamente menor que a cardinalidade do conjunto das partes de X. Isto é,

$$\#X < \#\mathcal{P}(X).$$

Demonstração: Se $X = \emptyset$, então $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$. Logo $\#X = 0$ e $\#\mathcal{P}(X) = 1$, ou seja,

$$\#X = 0 < 1 = \#\mathcal{P}(X).$$

Neste caso, então, o teorema é válido.

Supondo X não vazio, tem-se que $f: X \to \mathcal{P}(X)$, definida por $f(x) = \{x\}$, é injetiva, pois para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ obtem-se

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \{x_1\} = \{x_2\} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Portanto, $\#X \leq \#\mathcal{P}(X)$.

Mostre que f não pode ser sobrejetiva, ou seja, que $\#X \neq \#\mathcal{P}(X)$. Supondo que isso ocorra, então considere o conjunto $A = \{x \in X; x \notin B_x\}$, onde $B_x = f(x)$.

Observe que $A \subset X$, logo $A \in \mathcal{P}(X)$. Dessa forma, existe $a \in X$ tal que $f(a) = A$, pois f é sobrejetiva. Há, neste caso, duas possibilidades: ou $a \in A$ ou $a \notin A$. Veja:

1) Se $a \in A$, então, pela definição de A, $a \notin B_a = f(a)$. Porém, como $f(a) = A$, logo $a \notin A$, o que é um absurdo.

2) Se $a \notin A$, então, $a \notin f(a)$, pois $f(a) = A$. Porém, como $B_a = f(a)$, logo $a \notin B_a$, assim, por definição de A, $a \in A$, o que é novamente um absurdo.

Portanto, f não é sobrejetiva, o que implica que $\#X < \#\mathcal{P}(X)$.

■

No teorema apresentado Cantor prova, em particular, que dado um conjunto infinito X é sempre possível encontrar um distinto conjunto infinito que seja maior, um exemplo seria o conjunto $\mathcal{P}(X)$ das partes de X, ou seja, o conjunto formado por todos os subconjuntos de X.

Para o teorema a seguir se utiliza a seguinte definição: sejam A e B conjuntos tais que $\#A = a$, com $a \neq 0$, e $\#B = b$. O conjunto de todas as correspondências de A em B será denotado por B^A, então é definido $\#B^A = b^a$.

Teorema 2: Seja X um conjunto qualquer, finito ou infinito, então

$$\#\mathcal{P}(X) = 2^{\#X}.$$

Demonstração: Considere a função característica $\chi_A: X \to \{0, 1\}$, onde para cada subconjunto A de X tem-se

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, se\ x \in A \\ 0, se\ x \notin A \end{cases}$$

Agora, tome a função $f: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{F}(X, \{0, 1\})$ tal que $\mathcal{F}(X, \{0, 1\})$ é o conjunto das funções $f: X \to \{0, 1\}$.

Perceba que, por definição, $\#\mathcal{F} = 2^{\#X}$.

Sejam $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Se $f(A) = f(B)$, então $\chi_A = \chi_B$, o que implica que $A = B$. Logo, f é injetiva.

Seja $g \in \mathcal{F}(X, \{0, 1\})$. Considere $A = g^{-1}(1) \in \mathcal{P}(X)$. Dessa forma $f(A) = \chi_A = g$. Portanto, f é sobrejetiva.

Sendo assim, f é bijetiva. Então, $\#\mathcal{P}(X) = \#\mathcal{F}$, isto é,

$$\#\mathcal{P}(X) = 2^{\#X}.$$

■

Com base nos teoremas acima e utilizando o conjunto infinito dos números naturais é possível construir uma sequência infinita de números transfinitos, iniciando pelo menor deles (Dourado, 2017):

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} < 2^{2^{2^{2^{\aleph_0}}}} < 2^{2^{2^{2^{2^{\aleph_0}}}}} < \cdots$$

Teorema 3: A cardinalidade do conjunto das partes de $\mathbb{N}$ é igual à cardinalidade de $\mathbb{R}$, ou seja,

$$2^{\#\mathbb{N}} = \#\mathbb{R}.$$

Demonstração: Tome a função $f: \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, onde cada $x \in \mathbb{R}$ é associado a $f(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, onde $f(x) = \{a \in \mathbb{Q}; a < x\}$ é subconjunto de $\mathbb{Q}$.

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, suponha que $x < y$. Sabendo que entre dois números reais existe um racional, então existe um $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

A função f será injetiva, pois $r \notin f(x)$ e $r \in f(y)$, ou seja, $f(x) \neq f(y)$.

Logo, $\#\mathbb{R} \leq \#\mathcal{P}(\mathbb{Q}) = \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) \Rightarrow \#\mathbb{R} \leq 2^{\#\mathbb{N}}$.

Agora, tome a função $g: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, tal que $\mathcal{F} = \{f; f: \mathbb{N} \to \{0, 1\}\}$, onde cada aplicação característica f é associada a um elemento de $\mathbb{R}$, definida por

$$g(f) = 0, f(0)f(1)f(2)f(3) \ldots$$

Observe que este número real será formado apenas pelos algarismos 0 e 1, como, por exemplo,

$$0{,}0000000000 \ldots$$

$$0{,}1111111111 \ldots$$

$$0{,}0110110110 \ldots$$

Se $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, com $f_1 \neq f_2$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_1(n) \neq f_2(n)$. Assim,

$$g(f_1) = 0, f_1(0)f_1(1)f_1(2) \ldots \neq 0, f_2(0)f_2(1)f_2(2) \ldots = g(f_2).$$

Portanto, g é injetora. Logo, $\#\mathcal{F} \leq \#\mathbb{R} \Rightarrow 2^{\#\mathbb{N}} \leq \#\mathbb{R}$.

Concluindo, se $\#\mathbb{R} \leq 2^{\#\mathbb{N}}$ e $2^{\#\mathbb{N}} \leq \#\mathbb{R}$, então $2^{\#\mathbb{N}} = \#\mathbb{R}$.

■

Para se chegar a última conclusão acima foi utilizado o teorema de Cantor-Bernstein-Schroder. Aos leitores interessados na demonstração desse teorema recomenda-se a leitura de Cabral e Neri (2006).[2]

A cardinalidade dos números reais é também chamada de contínuo, e por isso denotada por c. Logo, pelos resultados apresentados,

$$\aleph_0 < c.$$

Sabendo disso, surgiu a dúvida se existe algum infinito que seja maior que a cardinalidade dos números naturais e menor que a cardinalidade dos números reais. Cantor, a

[2] Veja o Teorema 2.9. (De Cantor-Bernstein-Schroder) em CABRAL, Marco; NERI, Cassio. Números Naturais, Inteiros e Racionais. In: CABRAL, Marco; NERI, Cassio. **Curso de Análise Real**. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2006. cap. 2. p. 18.

princípio, acreditou que não existisse e chamou esta suposição de “hipótese do contínuo“, porém ele não conseguiu provar tal ideia. Na verdade, Cantor pensou ter provado, mas voltou atrás. Anos mais tarde, em 1937, o matemático Kurt Gödel (1906 - 1978) demonstrou que a teoria formal dos conjuntos não é suficiente para provar a validade da hipótese do contínuo.

4 ALGUNS PARADOXOS DO INFINITO

Foi visto no primeiro capítulo deste trabalho que muitos filósofos, teólogos e matemáticos tentaram compreender o infinito e nesta tentativa encontraram muitas dificuldades, pois ao trabalhar com esta noção chegaram a inúmeros paradoxos.

Ao buscar a etimologia da palavra paradoxo veja que oriunda do grego *parádoksos* (*παράδοξος*) e é composta pelo prefixo *pará*, que quer dizer "contrário a", "contra", "alterado", "oposto de", mais o sufixo *doksa*, que tem significado de "opinião", "senso", "crença". Assim, paradoxo é algo que vai contra o senso comum, um argumento contrário ao que a maioria acredita.

Diante disto, será citado aqui neste capítulo alguns paradoxos relacionados ao infinito, procurando mostrar o porquê da dificuldade de compreendê-lo, de que forma o infinito vai contra o pensamento comum. Primeiramente, será mostrado quatro paradoxos de autoria do filósofo grego Zenão de Eléia, que utilizava argumentos que procuravam mostrar a inconsistência dos conceitos de multiplicidade e divisibilidade. Depois será apresentado o "Hotel de Hilbert", um hotel que possui infinitos quartos, todos ocupados, mas que sempre consegue hospedar mais pessoas. E por último serão apontadas algumas curiosas somas infinitas, que mostram que nem sempre é possível encontrar um resultado para elas.

4.1 PARADOXOS DE ZENÃO

Zenão foi um filósofo da Antiga Grécia bastante conhecido por seus paradoxos, ele procurava demonstrar a inexistência do movimento e argumentava contra a divisibilidade infinita do espaço e do tempo. Alguns de seus paradoxos mais conhecidos são os chamados Aquiles, Dicotomia, Estádio e Flecha, e esses serão apresentados agora nesta seção.

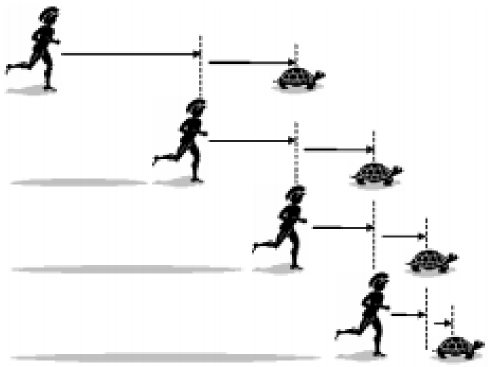
4.1.1 Paradoxo de Aquiles

Neste paradoxo tem-se uma corrida entre Aquiles, um herói da mitologia grega, e uma tartaruga. Normalmente é de se pensar que Aquiles ganhará a corrida por ele ser mais veloz que a tartaruga, mas seguindo o raciocínio de que, se a tartaruga iniciar com certa distância de vantagem, para ganhar a corrida, Aquiles primeiro deve alcançar a tartaruga e para isto é preciso que ele chegue ao ponto anterior em que a tartaruga estava antes do último deslocamento, assim

Aquiles nunca poderá ganhar a corrida, pois a tartaruga sempre estará com uma distância a frente, mesmo que essa distância seja muito pequena (veja Figura 1).

Suponha que no início da corrida Aquiles está no ponto P_0 e a tartaruga no ponto P_1, quando Aquiles chegar ao ponto P_1 a tartaruga estará no ponto P_2, quando Aquiles chegar ao ponto P_2 a tartaruga estará no ponto P_3 e assim segue infinitamente. Aparentemente, após o raciocínio apresentado, Aquiles de fato não ganhará a corrida.

Figura 1 - Paradoxo de Aquiles



Fonte: Monteiro (2015, p. 46)

Atribuindo valores ao problema, considere que a tartaruga iniciou com vantagem de 100 metros e que Aquiles é 5 vezes mais veloz que ela, isto é, quando Aquiles atinge os 100 metros o animal andou mais 20 metros, quando Aquiles alcança os 120 metros a tartaruga percorreu mais 4 metros e assim sucessivamente. A soma abaixo representa a distância percorrida por Aquiles

$$S = 100 + 20 + 4 + \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \cdots$$

O resultado desta soma pode ser obtido através da fórmula da soma de uma P.G. (Progressão Geométrica) de infinitos termos que é dada pela seguinte expressão

$$S = \frac{a_1}{1 - q},$$

onde a_1 é o primeiro termo da soma e q é o quociente entre um termo qualquer (exceto a_1) e seu antecessor, logo

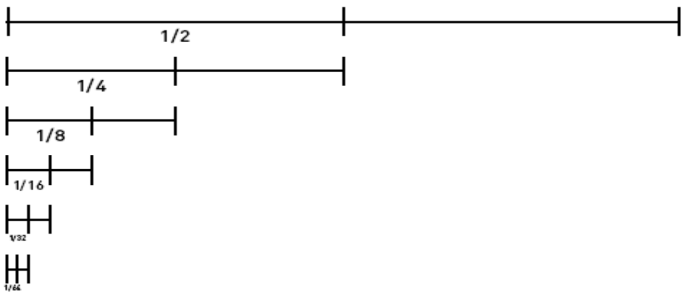
$$S = \frac{100}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{100}{\frac{4}{5}} = 100.\frac{5}{4} = \frac{500}{4} = 125$$

Portanto, quando Aquiles chega aos 125 metros ele alcança a tartaruga, a ultrapassa a partir daí e se afasta cada vez mais, consequentemente, ganhando a corrida.

4.1.2 Paradoxo da Dicotomia

O paradoxo da dicotomia afirma que para um objeto percorrer certa distância ele deve primeiro se movimentar até a metade do todo, mas antes é preciso alcançar ¼ da distância total e assim sucessivamente até o infinito, conforme ilustrado na Figura 2. Desta maneira, o movimento é impossível.

Figura 2 - Paradoxo da Dicotomia



Fonte: Machado (2013)

Suponha que o objeto percorrerá a distância d, então ele deve primeiro percorrer $\frac{d}{2}$, antes disso $\frac{d}{4}$ e assim segue infinitamente. Perceba que isto é uma sequência da forma

$$\frac{d}{2}, \frac{d}{4}, \frac{d}{8}, \frac{d}{16}, \cdots, \frac{d}{2^n}, \cdots$$

Observe que quanto mais n aumenta, tendendo ao infinito, menor é a distância percorrida, tendendo a zero, a uma distância zero, isto é, não há movimento.

Este raciocínio apresentado é a versão “regressiva” da dicotomia. Existe também a versão “progressiva” que diz que para percorrer a distância d deve-se primeiro percorrer $\frac{d}{2}$, depois andar mais $\frac{d}{4}$ e assim sucessivamente, então não é possível finalizar o percurso total, pois sempre faltará uma distância a seguir, uma distância infinitamente pequena.

Utilizando da mesma argumentação usada no paradoxo de Aquiles, veja que a distância a ser percorrida é uma soma de infinitas parcelas.

$$S = \frac{d}{2} + \frac{d}{4} + \frac{d}{8} + \cdots$$

Então, como as parcelas formam uma P.G. infinita, é possível calcular esta soma da seguinte maneira:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{d}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{d}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{d}{2}.\frac{2}{1} = d$$

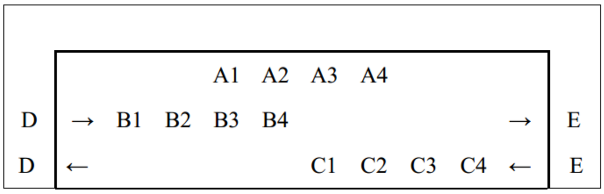
Assim, pode-se perceber que a soma das parcelas infinitas é a própria distância a ser percorrida, ou seja, é possível alcançar o objetivo de percorrer toda a distância desejada. Observe que esta soma de infinitos termos resulta em um número finito. Zenão não acreditava isto ser possível. Zenão acreditava que era impossível percorrer infinitos segmentos num tempo finito.

Os matemáticos da época de Zenão não tinham um conhecimento muito aprimorado sobre somas infinitas, por isso paradoxos como o de Aquiles e da Dicotomia causaram tantos desconfortos e foram deixados de lado por muitos séculos. Alguns matemáticos importantes para o desenvolvimento de séries e somas infinitas foram Galileu Galilei (1564 - 1642), James Gregory (1638 - 1675), Brook Taylor (1685 - 1731), Leonhard Euler (1707 - 1783) e Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857).

4.1.3 Paradoxo do Estádio

O paradoxo do estádio afirma que o dobro é igual a metade. Acompanhando na Figura 3, considere um estádio de extremos D e E, no qual há três fileiras A, B e C, paralelas entre si, contidas de igual número de corpos do mesmo tamanho, sendo que os corpos da fileira A estão em repouso e os das demais em movimento à mesma velocidade, os corpos da fileira B estão no sentido de D para E e os da C em sentido contrário, de E para D.

Figura 3 - Paradoxo do Estádio (1)



Fonte: Rodrigues (2009, p. 241)

A fileira B avança dois corpos de A indo para o extremo E e ao mesmo tempo a fileira C também avança dois corpos de A indo para o extremo D. Perceba que neste momento a fileira B avançou quatro corpos de C e vice-versa. Depois deste processo as três fileiras ficam alinhadas assim como mostra a Figura 4.

Figura 4 - Paradoxo do Estádio (2)

		A1	A2	A3	A4		
D	→	B1	B2	B3	B4	→	E
D	←	C1	C2	C3	C4	←	E

Fonte: Rodrigues (2009, p. 242)

Veja que a fileira B avançou dois corpos de A no mesmo intervalo de tempo que passou pelos quatro corpos de C, ou seja, ao mesmo tempo que B se desloca pela metade de A se move pelo total de C, então se quisesse que a fileira B passasse por apenas dois corpos de C o tempo gasto seria metade ao do caso anterior, pois os corpos têm mesmo tamanho e estão à mesma velocidade. A partir disto, conclui-se que o tempo t gasto para percorrer por dois corpos é igual a t/2, isto é, a metade de um dado tempo é igual ao seu dobro.

Neste paradoxo, Zenão ignora a noção de velocidade relativa, pois esta noção só surgiu séculos depois. Ele considera a relação de dois corpos em movimento da mesma maneira que a relação de dois corpos nos quais um está em repouso e outro em movimento. Foi somente no século XVII que os italianos Giordano Bruno (1548 - 1600) e Galileu Galilei (1564 - 1642) introduziram os estudos sobre movimento relativo de corpos.

4.1.4 Paradoxo da Flecha

Através do paradoxo da flecha, Zenão afirma que uma flecha lançada ao alvo está sempre parada. Admita que um objeto está em repouso quando ocupa um espaço que é igual a si mesmo. Imagine que uma flecha é disparada por um arqueiro e considere a situação da mesma em um instante de seu percurso, como numa imagem fotográfica, neste instante ela ocupa um espaço que é igual a si mesma, ou seja, neste exato momento ela se encontra parada. Como o tempo total da trajetória da flecha é composto de inúmeros instantes, onde, pelo descrito anteriormente, ela se encontra parada, então a flecha está imóvel durante todo o percurso (veja Figura 5).

Figura 5 - Paradoxo da Flecha

Fonte: Monteiro (2015, p. 48)

A definição de objeto em repouso utilizada neste paradoxo é diferente da dos dias atuais, hoje em dia está relacionada com a velocidade do corpo e não com o espaço que o mesmo ocupa. A autora Monteiro (2015), em seu TCC de graduação, faz uma análise deste paradoxo utilizando os conceitos de velocidades média e instantânea.

Os paradoxos Zenão mostram a dificuldade lógica ao se trabalhar com o conceito de infinito e também levam a refletir sobre a natureza do movimento.

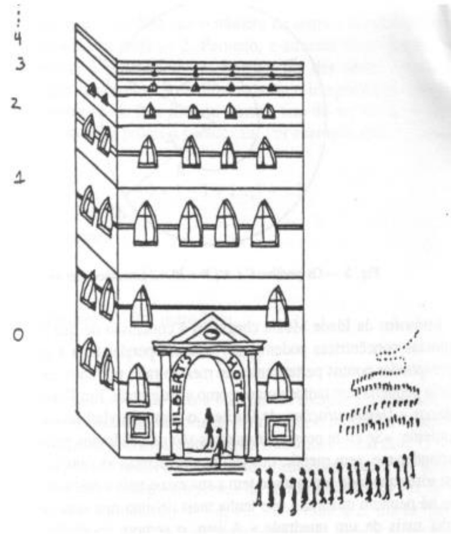
4.2 HOTEL DE HILBERT

O Hotel de Hilbert (Figura 6), localizado na cidade Infinitópolis, é um hotel que contém infinitos quartos numerados de 1 ao infinito e em cada quarto contém um hóspede. Suponha que chegue um viajante e este queira pernoitar no hotel, será isso possível? Embora os quartos estejam todos ocupados é possível acomodar o viajante sem que nenhum hóspede saia do hotel. O gerente do hotel pede aos hóspedes que se dirijam ao quarto de número sucessor aos seus, ou seja, o hóspede do quarto de número um vai para o dois, o do dois vai para o três, o do três vai para o quatro e assim sucessivamente, restando o primeiro quarto vazio e podendo acolher o viajante.

Agora, suponha que chegue mais cinco pessoas, neste caso seria utilizado um procedimento semelhante, de tal maneira que nenhum hóspede precise sair do hotel. Cada hóspede irá mudar para o quarto com cinco numerações a frente, isto é, o hóspede do quarto um vai para o quarto seis, o do dois vai para o sete, o do três vai para o oito e assim por diante. Então perceba que se chegarem qualquer quantidade finita n de pessoas sempre é possível alojá-las, basta deslocar cada hóspede para o quarto de número $n + k$, onde k é o número do quarto atual, quer dizer, o hóspede do quarto um vai para o quarto $n + 1$, o do quarto dois vai para o quarto $n + 2$ e assim infinitamente.

Certo dia, chegou na cidade Infinitópolis um ônibus com infinitos turistas e estes foram tentar se hospedar no hotel de Hilbert, que continuava com seus quartos todos ocupados.

Figura 6 - Hotel de Hilbert



Fonte: Costa e Madeira (2014, p. 59)

Até agora foi visto que é possível acomodar qualquer quantidade finita de hóspedes, mas nesta situação, com infinitas pessoas, é possível ainda disponibilizar um quarto para cada um? Surpreendentemente, é possível sim. O gerente solicita que cada hóspede do quarto de número m seja transferido para o quarto $2m$, assim todos os quartos de numeração $2m - 1$ estarão desocupados e poderá acomodar os infinitos turistas.

O paradoxo está no fato de o hotel de Hilbert, apesar de não ter vagas, sempre consegue hospedar mais pessoas, mesmo que seja uma quantidade infinita delas.

É claro que este hotel não existe, se fosse real seria finito, pois não existe nada na natureza que seja infinito, somente no campo matemático. Então, quando a hipótese diz que todos os quartos estão ocupados o pensamento humano, habituado com a natureza finita, tende a supor que não há mais vagas, mas o infinito se comporta de maneira diferente, tomando o exemplo do Hotel de Hilbert, não existe um total de quartos, um limite de vagas, pois o infinito é ilimitado, sem fim.

4.3 SOMAS PARADOXAIS

Existem algumas somas na matemática que possuem resultados confusos, onde não é possível atribuir um valor real a elas. Isso acontece em situações em que tenta-se encontrar a solução de uma soma com infinitas parcelas, tal soma é chamada de série infinita ou, simplesmente, série. Nesta seção serão apresentados três curiosos exemplos de séries infinitas que podem confundir um pouco o leitor.

A primeira soma infinita a ser citada é a conhecida “Série de Grandi”

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots$$

Qual seria o resultado dessa soma? Se ela for agrupada da seguinte forma

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

pode-se pensar que a ela resulta em 0. Mas se for escrita assim

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots$$

o resultado é 1. Logo, a soma é igual a 1 e a 0 ao mesmo tempo, o que é um absurdo.

Quando a série resulta em número real ela é chamada de série convergente, caso contrário, como a série de Grandi, é chamada de série divergente.

Outro exemplo parecido é a próxima soma:

$$1-2+3-4+5-6+7-8+9-\cdots$$

Da mesma maneira feita anteriormente associe os termos da seguinte forma

$$(1-2)+(3-4)+(5-6)+(7-8)+(9-10)+\cdots$$

Somando os pares de parcelas associadas tem-se

$$(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+\cdots$$

Perceba que a medida que se adiciona -1 a soma tende ao infinito negativo ($-\infty$). Mas, por outro lado, ao associar os termos do seguinte modo

$$1-(2-3)-(4-5)-(6-7)-(8-9)-\cdots$$

o resultado será

$$1-(-1)-(-1)-(-1)-(-1)-(-1)-\cdots$$

e, à medida que a quantidade de parcelas aumenta, a soma tende ao infinito positivo ($+\infty$).

Veja que essa série tende ao infinito positivo e negativo ao mesmo tempo. Eis, mais uma vez, uma série divergente. Não é possível encontrar um número real que seja resultado desta soma infinita.

E por último, note a próxima série

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\frac{1}{9.11}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots \tag{1}$$

Observe que

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{(2n-1)}-\frac{(n+1)}{(2n+1)} \tag{2}$$

Então utilizando de (2) para reescrever (1) obtém-se

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{7}\right)+\cdots$$

Agora utilize da propriedade associativa e reagrupe os termos da seguinte maneira

$$1-\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\right)-\cdots$$

Sendo assim, é óbvio que essa soma é igual a 1. Mas repare também que

$$\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2n-1)}-\frac{1}{(2n+1)}\right] \qquad (3)$$

Assim, é possível novamente reescrever (1) utilizando (3) do seguinte modo

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{3}-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{5}-\frac{1}{2}.\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{7}-\frac{1}{2}.\frac{1}{7}\right)-\cdots$$

e a série resulta também em $\frac{1}{2}$.

Portanto, veja que é necessário ter cuidado ao calcular uma soma com infinitas parcelas, não se deve tratar uma soma infinita da mesma maneira que uma soma finita, pois, como foi visto nos exemplos apresentados, nem sempre existe um resultado para elas, sua solução só é possível quando a série é convergente, e a comutação só existe quando ela é absolutamente convergente[3].

[3] Ao leitor interessado na definição de séries absolutamente convergentes recomenda-se a leitura de CABRAL, Marco; NERI, Cassio. Sequências e Séries. In: CABRAL, Marco; NERI, Cassio. **Curso de Análise Real**. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2006. cap. 4. p. 63.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Normalmente, é comum utilizar a palavra infinito para se referir, simplesmente, a algo muito grande, ilimitado ou que é impossível de contar. Mas, é preciso conhecer melhor o que é o infinito. Seu conceito foi alvo de discussão entre filósofos, teólogos e matemáticos durante o decorrer da história e provocou controvérsias, estando sempre ligado a inúmeros paradoxos, como os vistos neste trabalho. O infinito está relacionado com a ideia de quantidade e o matemático Georg Cantor buscou compreender essa "quantidade infinita", fazendo uma análise do "tamanho" que teria o infinito, daí criou a teoria que mostra a existência de infinitos conjuntos numéricos infinitos, uns maiores que outros.

Foi justamente em cada ponto destacado acima que essa presente pesquisa se desenvolveu. Com o objetivo de conhecer e compreender o que seja infinito, mais especificamente o infinito trabalhado na matemática. Procurou-se primeiramente descrever o desenvolvimento do conceito de infinito ao longo da história, fazendo ainda um breve relato da biografia do matemático Georg Cantor, assim também como as demonstrações de sua teoria procurando mostrar como ele chegou a ela e finalizando com a seleção de alguns paradoxos que surgiram ao se trabalhar com a ideia de infinito.

Partindo da meta traçada, através das perguntas diretrizes deste trabalho, buscou-se o êxito em responder cada interrogação. Sobre o que é o infinito esta obra trouxe, além da definição, exemplos elementares que puderam auxiliar no esclarecimento do conceito. Já acerca da teoria desenvolvida por Georg Cantor, procurou-se abordar de forma detalhada e simples as descobertas feitas pelo matemático, começando pelo "simples" conjunto dos naturais e expandido até o conjunto dos reais, finalizando com três de seus importantes teoremas. E para complementar a leitura foi descrito sobre como o infinito foi tratado no decorrer dos séculos, os paradoxos relacionados à ideia de infinito e um breve relato sobre a vida e obras do matemático Georg Cantor. Em visto disso, após concluído o atual trabalho, pode ser contemplado a conquista das expectativas.

Mas, para alcançar cada objetivo e finalizar o trabalho a autora enfrentou dificuldades. Ao escrever o terceiro capítulo desta obra, o primeiro a ser redigido, houve a dificuldade em entender e escrever com clareza os três teoremas de Cantor citados, mas estudando e ouvindo as palavras do orientador foi possível interpretar e reproduzir. Em todo o trabalho se teve a preocupação em escrever de maneira simples e clara, em particular sobre os paradoxos buscou-se selecionar aqueles que fossem interessantes e que se pudesse usar uma linguagem compreensível ao apresentá-los, então mais uma vez houve um impasse na escrita de alguns paradoxos. Com certeza existiram outros obstáculos na realização deste trabalho, mas basicamente a maior dificuldade realmente foi na escrita.

Espera-se que esse trabalho possa contribuir com projetos de outros autores, podendo fazer parte de sua revisão bibliográfica. Também pode ser usado para estudo informal, já que compreender o infinito é importante em disciplinas como a análise real e cálculo diferencial e integral, além de ser um assunto interessante a explorar. Este trabalho pode ser usado ainda por professores que queiram trabalhar história da matemática com seus alunos, mostrando a evolução do conceito de infinito e os paradoxos relacionados ao mesmo. Do mesmo modo, tal pesquisa pode ser estendida fazendo um estudo sobre a hipótese do contínuo.

Para concluir, a autora deseja destacar a satisfação em conseguir terminar esse trabalho, pois o tema era praticamente desconhecido da mesma. Foi possível uma superação pessoal, pois no começo, antes da escolha do tema, se pensava na produção deste produto como algo longínquo e muito difícil de alcançar.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Maria Gorete Carreira. Um breve passeio ao infinito real de Cantor. In: BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 5.; 2010, João Pessoa. **Anais...** João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba, 2010, p. 1-10. Disponível em: <http://www.mat.ufpb.br/~bienalsbm/arquivos/Conferencias%20Apresentadas/C%205.pdf>. Acesso em: 25 set. 2017.

BELL, Eric Temple. ¿Paraíso Perdido? In: BELL, Eric Temple. **Los Grandes Matemáticos**: Desde Zenón a Poincaré, su vida y sus obras. Buenos Aires: Losada, 1948. Cap. 29, p. 653-672. Preparado por Patricio Barros. Título Original: Men of Mathematics. Disponível em: <http://exordio.qfb.umich.mx/archivos pdf de trabajo umsnh/Aphilosofia/Mate/grandes/capitulo29.pdf>. Acesso em: 20 set. 2017.

BORGES, Bruno Andrade. **O infinito na matemática**. 2015. 89 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

BOYALLIÁN, Carina. Biografías: Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor. **Revista de Educación Matemática**, Córdoba, v. 24, n. 2, p.28-36, jan. 2009. Disponível em: <http://www.famaf.unc.edu.ar/vinculacion-2/divulgacion/revista-de-educacion-matematica/volumenes/24-2/>. Acesso em: 20 set. 2017.

CABRAL, Marco; NERI, Cassio. **Curso de Análise Real**. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2006.

COSTA, João Paulo Pita da. MADEIRA, Marta Augusta da C. Ramires. **História do Conceito de Infinito**. 2014. 90 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias, Lisboa, 2014. Disponível em: <https://edmatematica1.files.wordpress.com/2014/07/oinfinitoemmatematica1.pdf>. Acesso em: 6 set. 2017.

DOURADO, Thiago Augusto S. **O pequeno livro da grande história da teoria dos infinitos**. São Paulo: Livraria da Física. 2017.

DOURADO, Thiago Augusto S. Uma brevíssima história dos infinitos infinitos. **Gazeta de Matemática**, n. 177. p. 40-47, 2015.

MACHADO, Alexandre N. **Paradoxo da dicotomia (Zenão)**. 2013. Disponível em: <http://problemasfilosoficos.blogspot.com.br/2013/04/paradoxo-da-dicotomia-zenao.html>. Acesso em: 16 out. 2017.

MICHAELIS. **Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa**. Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/infinito/>. Acesso em: 25 out. 2017.

MONTEIRO, Gisele de Lourdes. **Considerações Históricas sobre o Infinito e Alguns de seus Paradoxos**. 2015. 70 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do Trabalho Científico**: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. 276 p.

RAMÓN ORTIZ, José. El concepto de infinito. **Boletín**,Venezuela, v. 1, n. 2, p. 59-81, 1994.

RODRIGUES, Osvaldino Marra. Zenão de Eléia, Discípulo de Parmenides: Um Esboço. **Kínesis: Revista de Estudos dos Pós-Graduandos em Filosofia**, Marília, v. 1, n. 2, p.231-247, out. 2009. Semestral. Disponível em: <http://www2.marilia.unesp.br/ojs-2.4.5/index.php/kinesis/article/view/4320>. Acesso em: 27 out. 2017.

SAMPAIO, Patrícia Alexandra da Silva Ribeiro. Infinito: Uma história a contar. **Millenium: Revista do ISPV**, Viseu, n. 34, p. 205 - 222, abr. 2008. Semestral. Disponível em: <http://www.ipv.pt/millenium/Millenium34/default.htm>. Acesso em: 21 set 2017.

SANTANA, Grace Alioska Kawakubo. **Infinitos, Contínuo e Escolha**: Teoria dos conjuntos infinitos.2010. 40f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

SENA, Christiano Otávio de Rezende. **Uma história sobre o infinito atual**. 2011. 30f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

SILVA, Guilherme Porto da. **Pensando no infinito para entender cálculo**: Uma visão de professores sobre introdução ao cálculo no Ensino Médio. 2013. 117 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Universidade do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.