UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANTÔNIO MARCOS ALVES

UMA BREVE INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DISCRETO

FORTALEZA – CEARÁ
2018

ANTÔNIO MARCOS ALVES

UMA BREVE INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DISCRETO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro

FORTALEZA – CEARÁ

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Alves, Antônio Marcos.
Uma breve introdução ao Cálculo Discreto [recurso eletrônico] / Antônio Marcos Alves. - 2018.
1 CD-ROM: 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 59 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Graduação em Medicina, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro.

1. Sequências. 2. Somatórios. 3. Cálculo Discreto. 4. Calculo de Diferenças Finitas. I. Título.

ANTÔNIO MARCOS ALVES

UMA BREVE INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DISCRETO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em: 03 de dezembro de 2018

BANCA EXAMINADORA

Tiago Caula Ribeiro

Prof. Dr. Tiago Caula Ribeiro (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Claudemir Silvino Leandro

Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Manoel Pereira Gomes Neto

Prof. Me. Manoel Pereira Gomes Neto
Universidade Estadual do Ceará – UECE

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a meu orientador, o professor Tiago Caúla, por todo esse período em que me acompanhou, me ajudou, me incentivou e até mesmo me inspirou. Isso não apenas durante esses dois semestres, mas praticamente ao longo da minha graduação.

Agradeço também a banca, a professora da disciplina de TCC, professora Isabele Coelho e alguns colegas pelo tempo, empenho na leitura e pelas correções deste texto.

Agradeço a Lizandra, minha namorada, pela ajuda, apoio e companheirismo durante, basicamente, todo tempo da faculdade.

Agradeço ainda a todos aqueles colegas de graduação que me incentivaram, motivaram e me ajudaram nesse período de estudos e formação.

Por fim, agradeço a Deus por ter me dado força, coragem e disposição para realização e conclusão desta fase em minha vida.

RESUMO

O Cálculo Discreto, também chamado Cálculo de Diferenças Finitas, trabalha diretamente com sequências e somatórios. O primeiro contato com esse assunto aparece nas primeiras séries na educação básica com a sequência dos números naturais. Ao longo do tempo as contagens e as somas vão ficando mais trabalhosas. No entanto, a matemática vem auxiliar e facilitar essas operações. No ensino médio, há as progressões aritmética e geométricas que aprofundam mais o conhecimento do assunto. Na graduação, tem-se o Cálculo Diferencial e Integral (Cálculo Tradicional) que nos fornece a derivada e integral como ferramentas para o estudo de funções. Todavia, esse trabalho pretende fazer algo semelhante, porém os objetos a serem analisados são as sequências e os somatórios. Para isso, são construídas e desenvolvidas as ferramentas: derivada discreta e integral discreta para calcular esses somatórios. Assim, foi feita uma pesquisa bibliográfica em que se investiga os principais resultados do Cálculo Discreto, se verifica uma analogia com o Cálculo Tradicional e se espera aplicar tais técnicas nas resoluções de somatórios.

Palavras-chave: Sequências. Somatórios. Cálculo Discreto. Cálculo de Diferenças Finitas.

ABSTRACT

The Discrete Calculus, also called Calculus of Finites Differences, work directly with sequence and sums. The first contact with this subject shows up in the first years of the primary and secondary education with the sequence of natural numbers. Throughout the time, counting and sums become very hard. However, the Mathematics comes to assist and to ease these operations. In High School, there are arithmetic and geometric progression which deepen the knowledge of a subject. In college, there is the Differential and Integral Calculus (traditional calculus) which give us the derivative and integral as tools for the study of functions. Nevertheless, this study intends to do something similar, but the analyzed objects are the sequences and sums. For this, it was built and developed the tools discrete derivative and integral for calculate the sums. Then, it was done a bibliographic research in which investigate the mains results of Discrete Calculus, checks analogy with Traditional Calculus and it is expected to aplly such techniques in sums resolutions.

Keywords: Sequences. Sums. Discrete Calculus. Differences Finite Calculus.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Somar e contar foram tarefas importantes para o ser humano. Ao longo da história essa atividade foi ficando cada vez mais complexa. No entanto, o homem sempre veio desenvolvendo técnicas que o ajudasse nesse trabalho. De fato, a Matemática veio para facilitar a vida do homem. Com o crescimento do conhecimento matemático, vários ramos foram criados para dar suporte ao que diz respeito a contar e somar.

Segundo Morgado e Carvalho (2013), realizar uma contagem nada mais é que enumerar, fazer uma lista dos objetos a serem contados. Usando conceitos matemáticos, contar é identificar objetos com os números do conjunto $\{1, 2, 3, ..., n, ...\}$, onde n será a quantidade de objetos. Da mesma forma, somar é juntar todos os objetos para depois assim contá-los. Pode parecer algo simples e mecânico, mas a história mostrou que isso sempre fascinou a todos aqueles que o faziam, principalmente quando as contagens e as somas eram complicadas.

Segundo Renze e Wiessten (2002), o Cálculo Discreto é uma área de estudo da Matemática Discreta, também chamada Matemática Finita, que estuda diversos tópicos relativos aos números naturais e inteiros, como sequências, progressões e recorrências, matemática financeira, combinatória, grafos, probabilidade e teoria dos números.

É nesse campo que temos o Cálculo Discreto, em que estudaremos as sequências e os somatórios. Muitas vezes, também é chamado de Cálculo de Diferenças Finitas ou apenas Cálculo Finito, pois essa área se firma no contexto finito, em que não se leva em consideração limites no infinito, áreas ou variações em intervalos contínuos. Este texto também mostra como a relação entre o Discreto e o Contínuo pode ser bonita, principalmente por serem conceitos distintos, mas em alguns momentos apresentarem diversas semelhanças e ainda há muitas aplicações do Cálculo Discreto na Ciência da Computação, Engenharias, Combinatória, Estatística e vários outros campos.

Dessa forma, temos os estudos de funções, em que temos as ferramentas de limites, derivadas e integrais em que tudo é feito do ponto de vista do Contínuo, que diz respeito a intervalos de números reais e o Cálculo Diferencial e Integral (ou Cálculo Tradicional) é responsável por isso. O intuito desse trabalho é adaptar estas ferramentas citadas para o manuseio prático de somatórios, os enxergando como integrais e em conjunto com o estudo de sequências, ou seja, vamos desenvolver a derivada e integral discreta para conhecer o comportamento de sequências.

Sequências e somatórios são muito importantes, porque eles são instrumentos básicos que estão presentes em toda matemática. No entanto, a notação $\sum$ de somatório parece dar medo ou ser confusa, pois condensa muitos símbolos. Talvez isso aconteça por causa do desconhecimento e da falta de prática com esse assunto. Mas nesse texto conheceremos um pouco mais sobre os somatórios e como manuseá-los.

Entretanto, teremos como embasamento teórico para o presente estudo os três seguintes autores: Gleich (2005), Miller (1960) e Richardson (1954). Embora os três façam um comparativo entre o Cálculo Diferencial e Integral com o Cálculo Discreto, o primeiro aborda isso buscando calcular somatórios um pouco difíceis. O segundo e o terceiro basicamente trazem a mesma abordagem, no entanto, Richardson (1954) é mais detalhista que Miller (1960).

O artigo de Gleich (2005) foca no cálculo de somatórios e no desenvolvimento das ferramentas necessárias para isso. No texto, o autor começa falando da dificuldade dessa operação através de exemplos e da importância dos somatórios nos dias de hoje. Depois ele expõe as principais ferramentas do Cálculo Discreto: a derivada e a integral discreta. Dessa forma, é feito um paralelo com o Cálculo Tradicional com suas devidas adaptações. (GLEICH, 2005).

Gleich (2005) define a derivada e integral discreta e um tipo de expressão de uso frequente que é a potência modificada. Ele também demonstra alguns teoremas que são análogos aos do Cálculo Tradicional e o teorema fundamental do Cálculo Discreto. O autor continua o artigo falando sobre os números de Stirling[1] de segundo tipo, que são necessários para a transformação de potências comuns em somas de potências modificadas. Tópicos esses que serão abordados nesse trabalho. Ele ainda dá um significado combinatório para tais números e uma forma de calculá-los efetivamente. Adiante, são resolvidos alguns exemplos de somatórios, usando todas as ferramentas desenvolvidas no artigo. (GLEICH, 2005).

Já Miller (1960), em seu livro, pretende apresentar de fato o Cálculo Discreto com mais semelhanças ao Cálculo Tradicional. Dessa maneira, o autor faz as definições de derivada discreta, potências modificadas (que também é chamada de polinômio fatorial), números de Stirling de primeiro e segundo tipo e a fórmula de Newton[2], sempre tendo em vista as versões semelhante do Cálculo Tradicional. Em vários momentos, ele ilustra essas situações com exemplos de funções e sequências.

Para os números de Stirling, Miller (1960) não dá um significado combinatório como o primeiro autor, mas uma relação de recorrência para assim conseguir uma fórmula geral a

[1] James Stirling (1692 - 1770): Matemático inglês e contemporâneo de Isaac Newton.

[2] Sir Isaac Newton (1642 - 1727): Matemático inglês que deu grande contribuições para matemática, entre elas está o desenvolvimento do Cálculo.

partir da fórmula de Newton. Este autor chama integral discreta simplesmente de soma, prova alguns teoremas análogos a integral tradicional e calcula várias somas de sequências já usadas anteriormente. Ele ainda deixa diversos exercícios para o leitor aplicar as técnicas adquiridas. (MILLER, 1960).

De maneira semelhante a Miller (1960), porém mais abrangente, Richardson (1954) inicia seu livro de imediato falando sobre derivada discreta definindo primeira diferença, segunda diferença etc., e a aplica nas principais sequências trabalhadas no texto. Assim são demonstrados diversos teoremas relacionados e resolvidos alguns exemplos, chegando a definição de operador diferença, em que o primeiro autor o chama de derivada discreta. Ele mostra diversas tabelas com essas diferenças para ilustrar melhor o conceito de enésima diferença. (RICHARDSON, 1954).

Richardson (1954) também define a integral finita, que é integral discreta tratada pelos demais autores. Ele também traz aplicações da integral finita no cálculo de somatórios, com alguns métodos mais avançados de integração. Também são apresentados os números de Stirling de primeiro e segundo tipo, relacionando-os com a integral finita. Praticamente em cada tópico abordado, o autor propõe alguns exercícios. (RICHARDSON, 1954).

Contudo, esse trabalho se faz importante, pois traz consigo o conceito de Discreto, que dentro da matemática, como mencionado anteriormente, tem outro significado além do usual. Segundo Dossey (2001), o Discreto se ocupa de conjuntos enumeráveis e funções definidas em tais conjuntos, diferente do Contínuo que está relacionado com intervalos de números reais. Na educação básica, o contato que se tem com a matemática discreta é no estudo dos números naturais, inteiros, racionais, sequências e progressões, análise combinatória, probabilidade, estatística e matemática financeira.

Por isso, se faz necessário um estudo mais aprofundado nesse elemento aparentemente tão temível que é o somatório, pois pode ajudar também ao aluno do ensino médio que tem dificuldade em entender, por exemplo, o assunto de progressões aritméticas e geométricas (P.A's e P.G's) ou matemática financeira ou precisa calcular algum tipo de média que envolva muitos valores ou usar algum tipo de medida estatística ou também manusear o binômio de Newton, pois estes se utilizam dos conceitos de sequência e somatórios.

Ainda na escola regular, como já foi comentado, também é visto como se calcula a soma dos termos de P.A's e P.G's, porém há diversos outros tipos de sequências e progressões em que se é possível manuseá-las também, por exemplo, progressões aritméticas de ordem superior, progressões aritmético-geométrica, recorrências lineares, etc. Alguns desses pontos são tratados em nossa pesquisa. O Cálculo Discreto é uma dessas ferramentas que auxilia nessa tarefa e mais, tais ferramentas são análogas ao Cálculo Tradicional, facilitando bastante a tarefa.

Assim, um aluno que deseja se aprofundar no estudo de progressões e somatórios pode se utilizar deste trabalho, mesmo sem conhecer o Cálculo Tradicional, pois não há pré-requisitos que não sejam assuntos vistos no ensino médio. Ele também pode ser usado para a pesquisa em Cálculo Discreto, pois são poucos e raros os livros e trabalhos em língua portuguesa que tratam desse assunto de maneira objetiva e efetiva do ponto de vista estritamente matemático.

Em diversos cursos da graduação, ele também pode complementar o curso de Cálculo Tradicional e auxiliar na disciplina de Análise Real, também na disciplina de Combinatória, Probabilidade e Estatística, mais precisamente no estudo de sequências, somatórios e séries (somatórios infinitos). Ainda esse trabalho pode ser estendido no estudo e aprofundamento das Equações Diferenciais Discretas.

Em virtude disso, o objetivo principal desse trabalho é conhecer o conceito de discreto a partir do desenvolvimento de técnicas semelhantes do Cálculo Diferencial e Integral, estendendo alguns teoremas para o Cálculo Discreto. Assim, os objetivos específicos são: a) Descrever sequências e somatórios e seus principais exemplos e propriedades; b) Reconhecer a derivada discreta e integral discreta como semelhantes a derivada e integral tradicional e manuseá-los; c) Calcular fórmula geral para os somatórios, usando as ferramentas apresentadas nesse trabalho.

Para concretizarmos esses objetivos, traçamos um método, uma metodologia que nos leve à realização do que é proposto. Segundo o minidicionário da língua portuguesa, metodologia significa: "Tratado dos métodos; arte de dirigir o espírito da investigação da verdade; orientação para o ensino de uma disciplina" (BUENO, 2007, p. 510). Podemos entender que metodologia é a ciência que estuda os métodos, que estuda os caminhos de uma investigação e os meios para se chegar em um fim. Assim, esse estudo também tem como finalidade desenvolver métodos de calcular somas. Por isso de certo modo, este texto pode ser considerado como uma metodologia, um estudo da forma de como se resolver somatórios.

A metodologia usada é a pesquisa descritiva, em que abordamos e detalhamos as ferramentas do Cálculo Discreto, na qual fazemos também um comparativo, verificando as semelhanças com Cálculo convencional. Este trabalho é de natureza teórica, em que fazemos, segundo Lakatos e Marconi (2003), uma síntese de conhecimento e apresentamos conceitos em conjuntos com a teoria. É também qualitativa, pois, para Prodanov e Freitas (2013), analisamos e descrevemos o fenômeno e o que ele significa, para assim se ter um melhor entendimento.

O conceito Discreto está ao longo de todo texto, por isso foi feita uma pesquisa sobre esse conceito e alguns tópicos relacionados, principalmente no que diz respeito às sequências e somatórios. Dessa forma, chegamos ao ponto principal desse trabalho em que tomamos a pergunta diretriz: como calcular somatórios de maneira efetiva, usando ferramentas análogas do Cálculo Tradicional? Realizar somas sempre foi uma atividade comum para o cotidiano do homem. Quando essas somas ficam maiores e complexas, se recorre de fato a matemática e suas técnicas que visam dar uma solução ao problema.

O Cálculo Diferencial e Integral dá essa resposta, mas apenas no contexto Contínuo, pois as integrais calculam somas contínuas (áreas e volumes). O que esse trabalho quer propor é uma solução para o problema no contexto Discreto. Assim, para cumprir os objetivos propostos, apresentamos um estudo sistemático das derivadas e integrais discretas com suas propriedades e aplicações que são fundamentais para responder à pergunta norteadora.

Fizemos uma pesquisa bibliográfica em que foram escolhidos os autores mencionados anteriormente, com seus trabalhos em Cálculo Discreto e juntamos os principais tópicos sobre o assunto, fazendo um copilado do que julgamos necessário para esse trabalho introdutório. Assim, como já foi dito, o desenvolvimento desse texto será unicamente teórico, em que faremos definições e demonstraremos teoremas. Há também diversos exemplos e aplicações para ilustrar o assunto.

O trabalho tem três capítulos teóricos. No primeiro é introduzido os principais objetos de estudos: sequências e somatórios. Nós demonstramos os principais resultados elementares sobre o tema e tratamos de alguns exemplos e propriedades.

No capítulo seguinte, iniciamos de fato o Cálculo Discreto com a derivada discreta, ferramenta essa que provém do Cálculo Tradicional. Construímos a teoria que é importante para o próximo capítulo e demonstramos teoremas e aplicações, seguidos de exemplos importantes.

No último capítulo, vemos de fato como calcular somatórios, usando as técnicas desenvolvidas, vendo principalmente a relação do somatório com a integral discreta definida. Ainda temos um tópico relacionado às equações diferenciais discretas e a resolução de alguns somatórios para concluir o trabalho.

2 SEQUÊNCIAS E SOMATÓRIOS DE NÚMEROS REAIS

Ao contar uma coleção de objetos, estamos associando um número natural para cada objeto contado, ou seja, se temos em uma caixa uma bola, um lápis, uma colher e um tapete, seguramente se dirá que há 4 objetos na caixa. Nessa contagem foi feita a seguinte correspondência: 1-bola, 2-lápis, 3-colher e 4-tapete. De maneira informal, essa associação é o que chamamos de sequência e uma das primeiras sequências que se tem contato na vida é a sequência dos números naturais $(1,2,3,4,5,6,\cdots)$. Se em outra caixa há 4 lápis e foram colocados outros 3 lápis, prontamente se dirá que, no total, há 7 lápis na caixa. A operação feita foi $4+3=7$. Por isso, podemos concluir intuitivamente que a soma é a contagem do total dos objetos juntos.

Neste capítulo, vamos abordar as principais ferramentas associadas ao processo de contar e somar que são as sequências e somatórios, em que construimos os meios necessários para calcular somatórios. Demonstramos também vários resultados em que utilizamos ao longo do trabalho e que foram retirados dos trabalhos de Carneiro e Moreira (2002), Courant e Robbins (2000), Gleich (2005), Hefez (2009), Miller (1960), Morgado (2013), Neto (2013) e Richardson (1954). Falamos também sobre alguns tópicos relacionados às sequências e somatórios, mostrando diversos exemplos para ilustrar e dar melhor compreensão ao assunto.

2.1 SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS NATURAIS

Na matemática, uma sequência é, segundo Lima (2013), uma função $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ em que para cada número natural se associa um número real. Denota-se uma sequência por $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots)$, enquanto que a_n é o n-ésimo termo ou o termo geral da sequência e o índice n é chamado de variável independente. Observamos que a_n também se refere a própria sequência.

Exemplo: $(1,1,2,3,5,8,\cdots)$;

Exemplo: $(2,4,8,16,32,64,\cdots)$.

No estudo de sequências em geral, assim como no de funções, há diversos tópicos para se abordar. Contudo, os pontos com mais frequência a serem tratados relativos às sequências são:

a) Achar uma fórmula para o termo geral, ou seja, "uma expressão matemática que permita calcular s_n a partir de n"(MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 16), que usa apenas operações elementares como, por exemplo, adição, multiplicação e potenciação;

b) Calcular também o termo geral da soma dos n primeiros termos (somatórios);

c) Verificar a convergência ou divergência.

No entanto, nossa abordagem é focada nos dois primeiros itens. Em particular, buscamos por fórmulas gerais para os somatórios, utilizando derivadas e integrais discretas, que serão temas dos capítulos 3 e 4, respectivamente. A seguir, apresentamos o princípio de indução, que é usado com frequência nas demonstrações desse estudo.

2.1.1 Princípio de Indução Matemática e Sequências Recorrentes

Uma ferramenta importante referente a números naturais é o princípio de indução finita ou também chamado indução matemática, em que "[...] é utilizada para demonstrar a veracidade de um teorema matemático em uma sequência infinita [...]"(COURANT; ROBBINS, 2000, p. 11).

Segundo Morgado e Carvalho (2013), o princípio de indução é o seguinte:
Seja $P(n)$ uma propriedade referente ao número natural n. Se

i) $P(1)$ é verdadeira;

ii) Para todo $k \in \mathbb{N}$, a veracidade de $P(k)$ implica na veracidade de $P(k+1)$.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação: $P(k)$ também é chamada de hipótese de indução.

Vejamos um exemplo retirado de Courant e Robbins (2000).

Vamos demonstrar por indução que $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.

Seja $P(n): 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.

i) $P(1)$ é verdadeiro, pois $1^2 = 1 = \dfrac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6} = \dfrac{2\cdot 3}{6}$;

ii) Vamos supor que $P(k)$ é verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$ então temos:

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2 = \dfrac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}$.

Para ver que $P(k+1)$ também é verdadeira, somamos $(k+1)^2$ em ambos os membros da expressão anterior. Dessa maneira, teremos:

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 = \dfrac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6} + (k+1)^2$.

Fatorando o segundo membro

$$\frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}+(k+1)^2=(k+1)\cdot\left[\frac{k\cdot(2k+1)+6\cdot(k+1)}{6}\right]=\frac{(k+1)\cdot(2k^2+7k+6)}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)\cdot(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(2k+3)}{6}=\frac{(k+1)\cdot[(k+1)+1]\cdot[2\cdot(k+1)+1]}{6}.$$

Assim fica provado que $P(k+1)$ é verdadeiro e pelo princípio de indução fica demonstrado a igualdade. $\square$

Em alguns momentos deste trabalho, escrevemos $\square$ para simbolizar que foi concluída a demonstração. Também vamos fazer uso de somas e produtos telescópicos, pois construimos uma técnica muito útil no cálculo de somas e produtos, que, segundo Neto (2013), encurta a soma e o produto devido aos cancelamentos, por isso, vamos defini-los.

Segundo Neto (2013), chama-se soma telescópica a seguinte expressão $a_2-a_1+a_3-a_2+a_4-a_3+\cdots+a_{n-1}-a_{n-2}+a_n-a_{n-1}$ com a_n sendo uma sequência. De modo análogo, o produtório telescópico fica definido como $\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}$, com a_n sendo uma sequência de termos não nulos. A seguir, temos duas proposições importantes retirada de Neto (2013), a respeito de somatório e produtórios telescópicos, pois são usadas em diversas demonstrações ao longo do trabalho.

Proposição 1: Seja a_n uma sequência, então

$a_2-a_1+a_3-a_2+\cdots+a_n-a_{n-1}+a_{n+1}-a_n=a_{n+1}-a_1\ \forall\in\mathbb{N}$.

A demonstração é por indução

Seja $P(n): a_2-a_1+a_3-a_2+\cdots+a_n-a_{n+1}+a_{n+1}-a_n=a_{n+1}-a_1$.

Vemos que $P(1)$ é verdadeira, pois $a_2-a_1=a_{1+1}-a_1$.

Se $P(k)$ é verdadeira para algum $k\in\mathbb{N}$, então vamos verificar $P(k+1)$ também verdadeira.

$a_2-a_1+a_3-a_2+\cdots+a_{k+1}-a_k=a_{k+1}-a_1$.

Somaremos a igualdade anterior em ambos os membros $a_{k+2}-a_{k+1}$.

$a_2-a_1+a_3-a_2+\cdots+a_{k+1}-a_k+a_{k+2}-a_{k+1}=a_{k+1}-a_1+a_{k+2}-a_{k+1}$.

Dessa forma obtemos a expressão $P(k+1)$.

$a_2-a_1+a_3-a_2+\cdots+a_{k+1}-a_k+a_{k+2}-a_{k+1}=a_{k+2}-a_1$.

Assim verificamos a validade de $P(k+1)$ e pelo princípio de indução $P(n)$ é verdadeiro $\forall n\in\mathbb{N}$ e fica demonstrado o teorema. $\square$

Proposição 2: Se a_n é uma sequência de termos não nulos, então $\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_1}$.

Demonstração:

Procedemos de modo semelhante a demonstração anterior.

Seja $P(n)$: $\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_1}$.

Verificando $P(1)$, temos $\frac{a_{1+1}}{a_1} = \frac{a_2}{a_1}$, logo $P(1)$ é verdadeira.
Supondo que $P(k)$ é válida para algum k, vamos verificar a validade de $P(k+1)$:

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{k+1}}{a_1}.$$

Multiplicamos ambos os membros da expressão anterior por $\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}$, temos

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} = \frac{a_{k+1}}{a_1} \cdot \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} = \frac{a_{k+2}}{a_1} \Rightarrow P(k+1) \text{ verdadeiro.}$$

Dessa maneira, pelo princípio de indução $P(n)$ é verdadeiro para todo n natural e assim concluímos a demonstração. $\square$

Segundo Neto *et al.* (2009), muitas vezes uma sequência vem definida em forma de recorrência, em que é dado o primeiro ou os primeiros termos e o termo geral é uma expressão que depende do termo anterior ou dos termos anteriores, respectivamente.
Por exemplo: $a_1 = 7$ e $a_n = a_{n-1} + 4$, para $n > 1$
Dessa forma temos

$a_2 = 7 + 4 = 11$

$a_3 = 11 + 4 = 15$

$a_4 = 15 + 4 = 19$

$\vdots$

Assim a sequência é $(7, 11, 15, 19, \cdots)$. O tópico de recorrência é tratado novamente no capítulo de integral e equações diferenciais discretas. Na próxima seção, tratamos de alguns dos principais tipos de sequências.

2.2 SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES

Na vida contidiana, diversos fenômenos variam regularmente segundo uma constante. Por exemplo, o tempo a cada segundo, os juros de um banco que crescem ou decrescem ao dia, mês ou ano, o crescimento populacional ao longo do ano, etc. Na matemática, esses fenômemos são descritos por sequências, mais precisamente por progressões. No Ensino Médio, são estudadas as progressões aritméticas (P.A.) e geométricas (P.G.), em que detalhamos cada uma delas agora.

2.2.1 Progressão Aritmética

Segundo Morgado e Carvalho (2013), uma P.A. é uma sequência, em que a diferença de cada termo com o termo anterior é constante e essa constante é chamada de razão, denotada por r. Ou seja, $a_{n+1} - a_n = r$. Uma P.A. que tem a razão igual a zero é chamada de PA constante.

Para verificar que a fórmula do termo geral é $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, vamos escrever a expressão que define uma P.A. $a_{n+1} - a_n = r$ para os valores de 1 até n.

$a_2 - a_1 = r$

$a_3 - a_2 = r$

$\vdots$

$a_{n-1} - a_{n-2} = r$

$a_n - a_{n-1} = r$

Somando as igualdades, temos a seguinte soma telescópica:

$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) = (n-1) \cdot r$

Assim obtemos $a_n - a_1 = (n-1) \cdot r \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

Exemplo: Para calcular o termo geral do exemplo anterior $(7, 11, 15, 19, \cdots)$, temos que $a_1 = 7$ e $a_n - a_{n-1} = r = 4$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow a_n = 7 + (n-1) \cdot 4 \Rightarrow a_n = 4n + 3$.

Da mesma forma, para calcular a soma S_n dos n primeiros termos usamos basicamente a ideia de Gauss[1], que é a mesma usada nos livros do ensino médio para encontrarmos que $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$.

Seja $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$.

Escrevendo a soma dos termos na ordem contrária, o valor de S_n não mudará.

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$.

Agora somaremos as duas equações, então

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$.

Usando a fórmula do termo geral, obtemos

$a_n + a_1 = a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1) \cdot r = 2a_1 + nr - r$

$a_{n-1} + a_2 = a_2 + a_{n-1} = a_1 + r + a_1 + (n-2) \cdot r = 2a_1 + nr - r$

$a_{n-2} + a_3 = a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2r + a_1 + (n-3) \cdot r = 2a_1 + nr - r$

$\vdots$

Dessa forma, cada parcela nos parênteses é igual a $a_1 + a_n$

[1] Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855): um dos maiores matemáticos de todos os tempos, considerado o príncipe da Matemática

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)$, com n parcelas

$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$. Assim, chegamos a fórmula desejada. Agora vejamos um exemplo.

Vamos calcular a soma dos n primeiros termos da sequência $(7, 11, 15, 19, \cdots)$.

Pelo exemplo anterior, temos que $a_1 = 7$ e $a_n = 4n + 3$, então:

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \dfrac{(7 + 4n + 3) \cdot n}{2} \Rightarrow S_n = 2n^2 + 5n$

No entanto, voltando as deduções dessas fórmulas relacionadas a P.A., alguém pode se perguntar: o que acontece de fato nas reticências dessas somas? Isso pode gerar dúvidas, porque esses métodos são um tanto quanto intuitivos. Por isso, essas fórmulas necessitam de demonstrações rigorosas e assim vamos fazê-las pelo princípio de indução a seguir.

Demonstração da fórmula do termo geral de uma P.A.

Seja a seguinte propriedade $P(n) : a_n = a_1 + (n-1).r$.

Vejamos que $a_1 = a_1 + (1-1).r = a_1$. Logo $P(1)$ é verdadeiro.

Para algum $k \in \mathbb{N}$, vamos supor que $P(k)$ seja verdadeira.

$a_k = a_1 + (k-1).r$.

Vamos provar que $P(k+1)$ também é verdadeiro. Assim temos pela definição de P.A.

$a_{k+1} - a_k = r \Rightarrow a_{k+1} = a_k + r$.

Usando a hipótese de indução, temos

$a_{k+1} = a_k + r = a_1 + (k-1).r + r = a_1 + [(k+1) - 1].r = a_1 + k.r$.

Dessa maneira $P(k+1)$ é verdadeiro e pelo princípio de indução $P(n)$ é verdadeiro para todo n natural. $\square$

Demonstração da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.A.

Seja $P(n) : a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$.

Para $P(1)$, temos $S_1 = \dfrac{(a_1 + a_1) \cdot 1}{2} = a_1$. Logo $P(1)$ é verdadeira.

Agora vamos supor que $P(k)$ seja verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$, assim

$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \dfrac{(a_1 + a_k) \cdot k}{2}$.

Para provar a validez de $P(k+1)$, vamos somar a_{k+1} em ambos os membros

$$\underbrace{(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}}_{S_{k+1}} = \frac{(a_1+a_k)\cdot k}{2}+a_{k+1}.$$

Organizando e fatorando o segundo membro, temos
$\dfrac{(a_1+a_k)\cdot k}{2}+a_{k+1} = \dfrac{(a_1+a_k)\cdot k+2a_{k+1}}{2} = \dfrac{(a_1+a_k)\cdot k+a_1+kr+a_{k+1}}{2} =$

$= \dfrac{(a_1+a_k+r)\cdot k+a_1+a_{k+1}}{2} = \dfrac{(a_1+a_{k+1})\cdot k+a_1+a_{k+1}}{2} = \dfrac{(a_1+a_{k+1})\cdot(k+1)}{2}$. Dessa forma provamos que $P(k+1)$ é verdadeira. Portanto, pelo princípio de indução $P(n)$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Vale salientar que uma P.A. também é escrita como $a_n = c+b\cdot n$, em que $c = a_1 - r$ e $b = r$, ou seja, é um polinômio de grau 1 em n. No próximo capítulo tratamos mais desse assunto de maneira mais geral.

2.2.2 Progressão Geométrica

Segundo Morgado e Carvalho (2013), uma P.G. é uma sequência, em que o quociente da divisão de cada termo com o anterior é constante, sendo chamada de razão, indicada por q. Ou seja, $a_{n+1}/a_n = q$. Se $q = 1$, a P.G. é dita constante.

Para chegarmos a fórmula do termo geral $a_n = a_1\cdot q^{n-1}$ da P.G., procedemos de maneira análoga que na P.A.

Escrevemos a expressão que define a P.G. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ para valores de 1 até n.

$$\frac{a_2}{a_1}=q, \quad \frac{a_3}{a_2}=q, \quad \ldots, \quad \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=q, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}}=q.$$

Multiplicando as igualdades obtemos, o seguinte produto telescópico:

$$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}} = q^{n-1} \Rightarrow \frac{a_n}{a_1} = q^{n-1} \Rightarrow a_n = a_1\cdot q^{n-1}.$$

Exemplo: Seja uma PG $(3,15,45,225,\cdots)$. Vamos encontrar o termo geral.
$a_1 = 3$ e $q = \dfrac{15}{3} = \dfrac{45}{15} = 5$. Como $a_n = a_1\cdot q^{n-1}$ Então $a_n = 3\cdot 5^{n-1}$.

Vamos também deduzir que a soma dos n primeiros termos é $S_n = \dfrac{a_1\cdot(q^n-1)}{q-1}$, para $q \neq 1$. Seja $S_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$.

Usamos a fórmula geral para cada parcela do segundo membro.

$S_n = a_1 + a_1\cdot q + a_1\cdot q^2+\cdots+a_1\cdot q^{n-2}+a_1\cdot q^{n-1}$.

Pondo a_1 em evidência, multiplicamos o segundo membro por $\dfrac{q-1}{q-1}$, pois $q \neq 1$.

$S_n = a_1\cdot(1+q+q^2+\cdots+q^{n-2}+q^{n-1})\cdot\dfrac{q-1}{q-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_n = a_1 \cdot \frac{(q-1+q^2-q+q^3-q-2+\cdots+q^{n-1}-q^{n-2}+q^n-q^{n-1})}{q-1}.$$

Fazendo os devidos cancelamentos dessa soma telescópica, obtemos a igualdade desejada
$S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n-1)}{q-1}$.

Agora vejamos um exemplo. Vamos calcular a soma dos n primeiros termos do exemplo anterior. Temos $a_1 = 3$ e $q = 5$, então $S_n = 3 \cdot \dfrac{(5^n-1)}{5-1} \Rightarrow S_n = \dfrac{3 \cdot 5^n}{4} - \dfrac{3}{4}$.

Como mencionado anteriormente, as duas fórmulas da P.G. requerem também uma demonstração rigorosa pelo princípio de indução, assim como foi feito da mesma maneira que as fórmulas da P.A. Por isso, fazemos essas demonstrações a seguir.

Demonstração da fórmula do termo geral da P.G.

Seja $P(n) : a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

$P(1)$ é verdadeiro, pois $a_1 = a_1 \cdot q^{1-1} = a_1$.

Vamos supor que $P(k)$ seja verdadeiro para algum $k \in \mathbb{N}$, assim temos
$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$.

Vamos provar que $P(k+1)$ também é verdadeiro. Pela definição de P.G. temos
$\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = q \Rightarrow a_{k+1} = a_k \cdot q$.

Usando a hipótese de indução, obtemos
$a_{k+1} = a_k \cdot q = a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q = a_1 \cdot q^k \Rightarrow a_{k+1} = a_1 \cdot q^k$.

Logo $P(k+1)$ também é verdadeiro e pelo princípio de indução $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração da fórmula da soma da P.G.

Seja $P(n) : S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n-1)}{q-1}$.

Vejamos que $P(1)$ é verdadeiro, pois $S_1 = \dfrac{a_1 \cdot (q^1-1)}{q-1} = a_1$.

Supondo que para algum $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$ é verdadeira.
$S_k = \dfrac{a_1(q^k-1)}{q-1}$.

Vamos provar que $P(k+1)$ também o é. Dessa forma, temos

$$S_{k+1} = a_{k+1} + S_k = a_1 \cdot q^k + \frac{a_1 \cdot (q^k-1)}{q-1} = a_1 \cdot \left(q^k + \frac{q^k-1}{q-1}\right) = a_1 \cdot \left(\frac{q^{k+1}-q^k+q^k-1}{q-1}\right).$$

Dai resulta
$S_{k+1} = \dfrac{a_1 \cdot (q^{k+1}-1)}{q-1}$.

Assim provamos que $P(k+1)$ é verdadeiro e pelo princípio de indução $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Vistas as progressões aritméticas e geométricas, vemos agora uma proposição, retirada de Neto *et al.* (2009), em que se relaciona estes dois tipos de sequências.

Proposição 3: Uma sequência a_n é uma P.G. de termos positivos se, somente se a sequência $b_n = \log a_n$ é uma P.A., com $r = \log q$, em que esse logaritmo está em uma base qualquer.

Demonstração:

a_n é P.G. $\Leftrightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow \log a_n = \log(a_1 \cdot q^{n-1}) \Leftrightarrow \log a_n = \log a_1 + \log q^{n-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log a_n = \log a_1 + (n-1) \cdot \log q \Leftrightarrow b_n = b_1 + (n-1) \cdot r \Leftrightarrow b_n$ é P.A., com $r = \log q$ $\square$

Continuando no assunto de progressão aritmética, definimos, segundo Morgado e Carvalho (2013), uma P.A. de segunda ordem como uma sequência a_n onde a razão $a_{n+1} - a_n$ geram uma P.A. não-constante $\forall\ n \in \mathbb{N}$, que também é chamada de P.A. de ordem 1.

Exemplo: $(1, 3, 6, 10, \cdots, (n+1) \cdot n/2)$.

$a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2;$

$a_3 - a_4 = 6 - 3 = 3;$

$a_4 - a_5 = 10 - 6 = 4;$

$\vdots$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2} - \frac{(n+1)\cdot n}{2} = \frac{n+1}{2} \cdot (n+2-n) = n+1.$$

De modo geral, definimos indutivamente uma P.A de ordem k como sendo uma sequência onde as razões $a_{n+1} - a_n$ geram uma P.A de ordem $k-1\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Outro exemplo usado com frequência nesse estudo são as potências do números naturais n^k, com k sendo um natural fixo. Dessa forma, $(1, 4, 9, \cdots, n^2, \cdots)$ e $(1, 8, 27, \cdots, n^3, \cdots)$, generalizando, $a_n = (c + bn)^k$, com c e $b \in \mathbb{N}$, são P.A's de ordem 2, 3 e k, respectivamente.

Existem outros tipos de progressões como, por exemplo, a progressão aritmético-geométrica (P.A.G.), que é uma sequência que tem por termo geral $a_n = [a_1 + (n-1) \cdot r] \cdot q^{n-1}$, com $q \neq 1$ e $r \neq 0$. Também temos a progressão geométrico-aritmética (P.G.A.), cujo termo geral é $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} + (n-1) \cdot r$, com $q \neq 1$ e $r \neq 0$. Já uma sequência aritmético-geométrica (S.A.G.) satisfaz a seguinte relação $a_n = q \cdot a_{n-1} + r$, com $r \neq 0$ e $q \neq 1$. A progressão harmônica (P.H.) é uma sequência $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ com todos os termos diferentes de zero em que $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}\right)$ forma uma progressão aritmética. Para maiores informações, consulte Carneiro e Moreira (2002), Paiva (2010) e Neto *et al.* (2009). Agora concluimos a seção com mais um tipo de sequência que é utilizada bastante nesse texto: as potências modificadas.

2.2.3 Potências Modificadas

Segundo Gleich (2005), chama-se uma potência modificada a seguinte expressão $n^{\underline{k}} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$. A potência modificada é também chamada de polinômio fatorial e é denotado por $n^{(k)}$. De maneira geral, temos:

$(a+bn)^{(k)} = (a+bn)\cdot[a+b\cdot(n-1)]\cdot[a+b\cdot(n-2)]\cdot\ldots\cdot[(a+b\cdot(n-k+1)]$

Exemplos:

$8^{(5)} = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 6720;\quad n^{(3)} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2);\quad 3^{(5)} = 3.2.1.0.(-1) = 0;$

$(6+3n)^{(4)} = (6+3n)\cdot[6+3\cdot(n-1)]\cdot[6+3\cdot(n-2)]\cdot[6+3\cdot(n-3)]$

$\qquad = (6+3n)\cdot(3+3n)\cdot(3n)\cdot(-3+3n).$

Apresentamos uma relação entre as potências modificadas e os números binomiais, que é usada no próximo capítulo.

$$\frac{n^{(k)}}{k!} = \binom{n}{k}$$

Entretanto, segundo Richardson (1954), existe um outro tipo de potência modificada e definimos por $n^{[k]} = n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)$. A forma geral fica definido como:

$(a+bn)^{[k]} = (a+bn)\cdot[a+b\cdot(n+1)]\cdot[a+b\cdot(n+2)]\cdot\ldots\cdot[a+b\cdot(n+k-1)]$

Exemplos:

$5^{[4]} = 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 1680$

$(6+3n)^{[3]} = (6+3n)\cdot[6+3\cdot(n+1)]\cdot[6+3\cdot(n+2)] = (6+3n)\cdot(9+3n)\cdot(12+3n)$

Fica definido também as potências modificadas com expoente nulo como

$(a+bn)^{(0)} = (a+bn)^{|0|} = 1$

Para potências modificadas com expoente negativo, definimos

$(a+bn)^{(-k)} = \dfrac{1}{(a+bn)^{[k]}}$

Exemplos

$n^{(-k)} = \dfrac{1}{n^{[k]}} = \dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)};$

$4^{(-3)} = \dfrac{1}{4^{[3]}} = \dfrac{1}{4\cdot 5\cdot 6} = \dfrac{1}{120};$

$(3+2n)^{(-2)} = \dfrac{1}{(3+2n)^{[2]}} = \dfrac{1}{(3+2n)\cdot[3+2\cdot(n+1)]} = \dfrac{1}{(3+2n)\cdot(5+2n)}.$

2.3 SOMATÓRIOS DE NÚMEROS REAIS

Ao tratarmos sobre progressões na seção anterior, calculamos algumas somas, principalmente a soma dos n primeiros termos. Nessa seção, aprofundaremos mais sobre esse assunto e algumas propriedades dessas somas.

Segundo Hefez (2009), para denotar a soma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, em que a_n é uma sequência, usa-se esse símbolo $\sum$ (sigma maiúsculo) em que chamamos de somatório. Dessa forma temos

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

em que k é chamado de índice ou variável indexadora, a_k é chamado de somando ou termo geral e $k = 1$ e n são os limites inferiores e superiores, respectivamente. Outra notação: $\sum\limits_{1 \leq k \leq n} a_k$. Vale ressaltar também que somatórios podem ser definidos também pela recorrência:

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_{k+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Podemos observar também que, segundo Neto (2013), temos uma notação para o produto $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, com a_n sendo uma sequência. Usamos o símbolo $\prod$ (pi maiúsculo) para o produto desses elementos, o chamamos de produtório e denotamos da seguinte forma

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Para Graham, Knuth e Patashnik (1995), o uso de reticências para somas (respectivamente produtos) pode ser ambíguo ou confuso. Por isso, nesse estudo é feito uso da letra grega para somatório (respectivamente produtório) para simplificar a notação e deixar claro o que deve ser somado (respectivamente multiplicado) e para Neto (2013), o somatório é útil para cancelamento em somas, principalmente em somas telescópicas.

Por exemplo: Para somar os 10 primeiros termos da P.A. $(7, 11, 15, \cdots)$, temos que $a_1 = 7$, $r = 4$ e $a_k = 4k + 3$ e o décimo termo é $a_{10} = 43$ e usando a notação de somatório, temos

$$\sum_{k=1}^{10} (4k + 3) = 7 + 11 + 15 + \cdots + 43$$

Com a fórmula da soma da P.A., resulta $\sum\limits_{k=1}^{10} (4k + 3) = \dfrac{(7 + 43) \cdot 10}{2} = 250$. Os somatórios possuem várias propriedades. Adiante, enunciamos e demonstramos algumas delas retiradas de Hefez (2009) e Neto (2013), na qual tem uso frequente nesse texto.

2.3.1 Algumas propriedades dos somatórios de números reais

Sejam a_k e b_k sequências, então

i) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

Vale ressaltar aqui que $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$, assim o que a propriedade nos diz é que podemos reagrupar os elementos a ser somado de várias maneiras e o valor da soma não mudará. Vamos demonstrar por indução

Seja $P(n):\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

Vejamos que $P(1)$ é verdadeiro, pois

$\sum_{k=1}^{1}(a_k+b_k)=a_1+b_1=\sum_{k=1}^{1}a_k+\sum_{k=1}^{1}b_k$

Dessa maneira, se $P(n)$ é verdadeira para algum $n\in\mathbb{N}$, vamos provar que $P(n+1)$ também o é.

$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

Somaremos à expressão $(a_{n+1}+b_{n+1})$ em ambos os membros e agruparemos da seguinte forma

$(a_{n+1}+b_{n+1})+\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=a_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}a_k+b_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}b_k\Rightarrow$

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n+1}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n+1}a_k+\sum_{k=1}^{n+1}b_k$

Assim que $P(n+1)$ também é verdadeira. Logo, pelo princípio de indução, $P(n)$ é verdadeiro para todo $n\in\mathbb{N}$. $\square$

ii) $\sum_{k=1}^{n}(c\cdot a_k)=c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$, com $c\in\mathbb{R}$

Demonstração: Vamos provar novamente por indução

Seja $P(n):\sum_{k=1}^{n}(c\cdot a_k)=c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$

Para $P(1)$ temos: $\sum_{k=1}^{1}(c\cdot a_k)=c\cdot a_1=c\cdot\sum_{k=1}^{1}a_k$. Portanto, $P(1)$ é verdadeira.

Supondo que $P(n)$ seja verdadeira para algum n natural, temos

$\sum_{k=1}^{n}(c\cdot a_k)=c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$

Para provar que $P(n+1)$ também é verdadeira, somaremos $c\cdot a_{n+1}$ em ambos os membros da igualdade anterior.

$c\cdot a_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}(c\cdot a_k)=(c\cdot a_{n+1})+c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k\Rightarrow\sum_{k=1}^{n+1}(c\cdot a_k)=c\cdot\sum_{k=1}^{n+1}a_k$

Chegamos assim a validez de $P(n+1)$. Logo pelo princípio de indução, $P(n)$ é verdadeira para todo número natural.$\square$

iii) $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1$

Essa propriedade é a mesma soma telescópica que já foi provada na proposição 1.

iv) $\sum_{k=1}^{n} c = c \cdot n$ com c constante.
Demonstraremos também por indução
Seja $P(n)$: $\sum_{k=1}^{n} c = c \cdot n$
Vejamos que $P(1)$ é verdadeira, porque $\sum_{k=1}^{1} c = c = c \cdot 1$
Se $P(n)$ é verdadeira para algum n natural, vamos verificar que $P(n+1)$ também o é.
Vamos somar c em ambos os membros da expressão de $P(n)$: $\sum_{k=1}^{n} c = c \cdot n$, dessa maneira obtemos

$$c + \sum_{k=1}^{n} c = c + c \cdot n \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} c = c \cdot (n+1)$$

Verificado que $P(n+1)$ é verdadeira, concluimos que pelo princípio de indução, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

2.3.2 Binômio de Newton

Na maioria das vezes o símbolo de somatório aparece no ensino médio quando se estuda a seguinte expressão $(x+y)^n$, que é chamada de Binômio de Newton, e tem a expansão, segundo Neto (2013), como

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot y^p = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot y + \cdots + \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot y^p + \cdots + \binom{n}{n} y^n$$

em que x e y são números reais, n um número natural e $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

Demonstração:

Vamos demonstrar por indução em n
Seja $P(n) : (x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot y^p$
Vejamos que $P(1)$ é verdadeiro, pois $(x+y)^1 = x+y = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = \sum_{p=0}^{1} x^{1-p} \cdot y^p$
Supondo que $P(k)$ seja verdadeira para algum k natural

$$(x+y)^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} x^{k-p} \cdot y^p$$

Vamos provar que $P(k+1)$ também é verdadeiro. Assim multiplicamos por $(x+y)$ a expressão anterior e obtemos

$$(x+y) \cdot (x+y)^k = (x+y) \cdot \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} x^{k-p} \cdot y^p$$

Aplicando a distributiva no segundo membro, temos

$$(x+y)^{k+1} = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} x^{k-p+1} \cdot y^p + \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} x^{k-p} \cdot y^{p+1}$$

Separando o primeiro termo do primeiro somatório, e o último termo do segundo somatório, resulta

$$(x+y)^{k+1} = \binom{k}{0} x^{k+1} + \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} x^{k-p+1} \cdot y^p + \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} x^{k-p} \cdot y^{p+1} + \binom{k}{k} y^{k+1}$$

Fazemos a seguinte mundança de variável no segundo somatório: trocar p por $p-1$

$$(x+y)^{k+1} = x^{k+1} + \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} (x^{k-p+1} \cdot y^p) + \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p-1} (x^{k-p+1} \cdot y^p) + y^{k+1}$$

Juntando os dois somatórios, temos

$$(x+y)^{k+1} = x^{k+1} + \sum_{p=1}^{k} \left[\binom{k}{p} + \binom{k}{p-1} \right] (x^{k-p+1} \cdot y^p) + y^{k+1}$$

Usando a relação[2] de Stifel[3] para os binômios e colocando coeficientes para x^{k+1} e y^{k+1} sem alterar a igualdade, resulta

$$(x+y)^{k+1} = \binom{k+1}{0} x^{k+1} + \sum_{p=1}^{k} \binom{k+1}{p} (x^{k-p+1} \cdot y^p) + \binom{k+1}{k+1} y^{k+1}$$

Assim chegamos a igualdade desejada

$$(x+y)^{k+1} = \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} x^{k+1-p} \cdot y^p$$

Dessa forma provamos que $P(k+1)$ é verdadeiro. Logo, pelo princípio de indução, $P(n)$ também é verdadeiro para todo n natural. $\square$

Portanto, como já foi mencionado antes, uma sequência é uma restrição de uma função real ao domínio do conjunto dos números naturais. Por isso, o Cálculo de funções de uma variável real pode ser adaptado ao contexto discreto de sequência. Assim, P.A. é uma função afim restrita aos números naturais, uma P.G. é do tipo exponencial, P.A's de ordem k são como polinômios, etc. Nos próximos capítulos, vemos que as derivadas são como diferenças finitas e integrais como somatórios. No entanto, somatórios nem sempre são simples de serem calculados, mas o Cálculo Discreto fornece ferramentas muito úteis para trabalharmos com essas somas.

[2] Demonstramos essa relação no final do próximo capítulo.

[3] Michael Stifel (cerca de 1487 - 1567): Matemático alemão.

3 DERIVADA DISCRETA DE UMA SEQUÊNCIA

No Cálculo Convencional, vemos uma ferramenta importante: a derivada, que estuda a variação de uma função em um dado ponto. Segundo Guidorizzi (1987), a derivada é definida por

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

com f sendo uma função real. Também denotamos $\dfrac{dy}{dx}$ para derivada com $y = f(x)$.

No capítulo anterior, vimos diversos exemplos de sequências e somatórios, bem como suas propriedades. Agora definimos a derivada discreta, que é uma adaptação da derivada para o contexto discreto. Vemos também suas principais propriedades para estudarmos o comportamento de algumas sequências. As definições, propriedades e a maioria dos exemplos e demonstrações foram baseadas de Gleich (2005), Miller (1960), Neto (2012), Neto (2013) e Richardson (1954).

3.1 DEFINIÇÃO E EXEMPLOS DE DERIVADAS DISCRETAS

Para Richardson (1954), a derivada discreta é o estudo da variação dos valores assumidos por uma sequência a_n, quando n varia conforme os valores de uma P.A. Para estabelecer o intervalo de diferença, escolhemos o menor deles como sendo 1. Assim, os valores de variação que estão associados a P.A. $(1,2,3,\cdots)$ são $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2, \cdots, a_{n+1} - a_n$.

Já Miller (1960) tem uma ideia diferente, porém equivalente, pois ao se estudar a derivada do Cálculo Tradicional, precisamos verificar a variação do quociente $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para valores de h bem próximo de zero, onde $f(x)$ é uma dada função e h é chamado de incremento. Para uma sequência a_n tomemos $h = 1$ e o quociente fica apenas $a_{n+1} - a_n$.

Dessa maneira no Cálculo Discreto, este quociente também é muitas vezes chamado de operador diferença ou derivada discreta, que fica definido como:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

Também expressamos de maneira mais geral a derivada discreta: $\dfrac{\Delta a_n}{\Delta n} = \dfrac{a_{n+h} - a_n}{h}$, em que h é um inteiro ou racional positivo. Vale observar que, da mesma forma que no Cálculo Tradicional em que o símbolo $\dfrac{d}{dx}$ não é visto como fração, $\dfrac{\Delta}{\Delta n}$ também não o é, mas destacamos que esse quociente depende de h. Agora vejamos alguns exemplos, retirados de

Miller (1960) e Richardson (1954), em que as fórmulas das derivadas são bem semelhantes ao Cálculo Convencional.

a) $\Delta c = c - c = 0$, com c sendo uma constante;

A derivada discreta de uma P.A. é sempre constante e é igual a razão r.

b) $\Delta[a_1 + (n-1).r] = a_1 + nr - [a_1 + (n-1)r] = a_1 + nr - a_1 - nr + r = r$;

Para a derivada de uma P.G. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos

c) $\Delta(a_1.q^{n-1}) = a_1.q^n - a_1.q^{n-1} = a_1.q^{n-1}(q-1) = a_n(q-1)$;

Em particular, temos $\Delta 2^n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$

De maneira geral, temos

$\Delta(c^{a_n}) = c^{a_{n+1}} - c^{a_n} = c^{a_n} \cdot (c^{a_{n+1}-a_n} - 1) = c^{a_n} \cdot (c^{\Delta a_n} - 1)$

d) $\Delta[\log_b(a_n)] = \log_b(a_{n+1}) - \log_b(a_n) = \log_b\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$, com $b > 0$ e $b \neq 1$;

e) $\Delta\text{sen}(a.n) = 2 \cdot \text{sen}\left(\dfrac{a}{2}\right) \cdot \cos\left[a\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\right]$, com $a \in \mathbb{R}$;

De modo geral, temos:

$$\Delta[\text{sen}(a_n)] = \text{sen}(a_{n+1}) - \text{sen}(a_n) = 2\text{sen}\left(\frac{a_{n+1} - a_n}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a_{n+1} + a_n}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta[\text{sen}(a_n)] = 2\text{sen}\left(\frac{\Delta a_n}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a_{n+1} + a_n}{2}\right).$$

f) $\Delta[\cos(a.n)] = -2 \cdot \text{sen}\left(\dfrac{a}{2}\right) \cdot \text{sen}\left[a\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\right]$, com $a \in \mathbb{R}$;

Da mesma forma, temos:

$$\Delta[\cos(a_n)] = \cos(a_{n+1}) - \cos(a_n) = -2\text{sen}\left(\frac{a_{n+1} + a_n}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{a_{n+1} - a_n}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta[\cos(a_n)] = -2\text{sen}\left(\frac{\Delta a_n}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{a_{n+1} + a_n}{2}\right).$$

g) $\Delta\dbinom{n}{p} = \underbrace{\dbinom{n+1}{p} - \dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{p-1}}_{\text{relação de Stifel}}$, em que $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$;

h) $\Delta n! = (n+1)! - n! = n.(n!)$;

i) $\Delta(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$

Assim temos uma soma telescópica que resulta

$\Delta(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = a_{n+1}$.

Este item é muito importante, pois mostra que toda sequência é derivada discreta de uma outra sequência.

Para derivarmos a sequência $a_n = n^k$, precisamos modificar a sequência para $b_n = n^{(k)}$ (potência modificada), se quisermos obter um resultado semelhante[1] a $\frac{d}{dx}(x^k) = k \cdot x^{k-1}$. Vamos demonstrar que isso é válido para essas potências modificadas:

$$\begin{aligned} \Delta b_n &= (n+1)^{(k)} - n^{(k)} \\ &= [(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2)] - [n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1)] \\ &= [n+1-(n-k+1)] \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2) \\ &= k \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2) = k \cdot n^{(k-1)} \quad \square \end{aligned}$$

Uma forma geral é a seguinte: $\Delta(a+bn)^{(k)} = b \cdot k \cdot (a+bn)^{(k-1)}$. No entanto, podemos generalizar mais ainda. Seja a_n uma sequência e definamos

$[a_n]^{(k)} = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots \cdot a_{n-k+1}$, para derivá-la, temos:

$\Delta[a_n]^{(k)} = (a_{n+1} \cdot a_n \cdot \ldots \cdot a_{n-k+2}) - (a_n \cdot a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_{n-k+2} \cdot a_{n-k+1})$

$\Delta[a_n]^{(k)} = (a_{n+1} - a_{n-k+1}) \cdot (a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_{n-k+2}) = (a_{n+1} - a_{n-k+1}) \cdot [a_{n-1}]^{(k-1)} \ \square$

Para a derivação discreta de potências modificadas negativas temos:

$$\Delta n^{(-k)} = \Delta\left(\frac{1}{n^{[k]}}\right) = \frac{1}{(n+1)^{[k]}} - \frac{1}{n^{[k]}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta n^{(-k)} = \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+k-1) \cdot (n+k)} - \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta n^{(-k)} = \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta n^{(-k)} = \left[\frac{n-(n+k)}{(n+k) \cdot n}\right] \cdot \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta n^{(-k)} = \frac{-k}{n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1) \cdot (n+k)} = \frac{-k}{n^{[k+1]}} = -k \cdot n^{(-k-1)} \ \square$$

Com esse resultado, concluimos que $\Delta n^{(k)} = k \cdot n^{(k-1)}\ \forall k \in \mathbb{Z}$. Como a derivada comum satisfaz certas propriedades, da mesma maneira, a derivada discreta possui algumas propriedades análogas. Citamos e demonstramos algumas delas, retiradas de Miller (1960) e Neto (2012).

[1] Para maiores detalhes sobre o assunto, consultar Guidorizzi (1987)

3.2 PROPRIEDADES DAS DERIVADAS DISCRETAS

As propriedades aritméticas de derivada discreta são praticamente as mesmas associadas às funções do Cálculo Tradicional. Vejamos algumas delas. Seja a_n e b_n sequências e $c \in \mathbb{R}$, então:

i) $\Delta(a_n + b_n) = \Delta a_n + \Delta b_n$

Demonstração:

$\Delta(a_n + b_n) = a_{n+1} + b_{n+1} - (a_n - b_n) = a_{n+1} - a_n + b_{n+1} - b_n = \Delta a_n + \Delta b_n$ $\square$

ii) $\Delta(c \cdot a_n) = c \cdot \Delta a_n$

Demonstração:

$\Delta(c.a_n) = c.a_{n+1} - c.a_n = c.(a_{n+1} - a_n) = c.\Delta a_n$ $\square$

iii) $\Delta a_n = 0 \Leftrightarrow a_n$ é constante

Demonstração:

$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = 0 \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n$ $\square$

iv) $\Delta(a_n \cdot b_n) = (\Delta a_n) \cdot b_{n+1} + a_n \cdot (\Delta b_n)$ (Regra do Produto de Leibniz)

Demonstração:

$\Delta(a_n.b_n) = a_{n+1}.b_{n+1} - a_n.b_n$

Adicionando e subtraindo $a_n.b_{n+1}$, temos:

$\Delta(a_n.b_n) = a_{n+1}.b_{n+1} - a_n.b_{n+1} + a_n.b_{n+1} - a_n.b_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta(a_n.b_n) = (a_{n+1} - a_n).b_{n+1} + a_n(b_{n+1} - b_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta(a_n.b_n) = (\Delta a_n).b_{n+1} + a_n.\Delta b_n$ $\square$

v) $\Delta\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{(\Delta a_n) \cdot b_n - a_n \cdot (\Delta b_n)}{b_n \cdot b_{n+1}}$, para b_n e $b_{n+1} \neq 0$

Demonstração:

$$\Delta\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a_{n+1} \cdot b_n - a_n \cdot b_{n+1}}{b_n \cdot b_{n+1}}$$

Adicionando e subtraindo $a_n \cdot b_n$, temos

$$\Delta\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a_{n+1} \cdot b_n - a_n \cdot b_n + a_n \cdot b_n - a_n \cdot b_{n+1}}{b_n \cdot b_{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{(a_{n+1} - a_n) \cdot b_n - a_n \cdot (b_{n+1} - b_n)}{b_n \cdot b_{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{(\Delta a_n) \cdot b_n - a_n \cdot (\Delta b_n)}{b_n \cdot b_{n+1}} \square$$

vi) $\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1$

Demonstração:

$\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3 + \cdots + \Delta a_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n)$

Fazendo os devidos cancelamentos dessa soma telescópica pela proposição 1 do capítulo 2, obtemos:

$\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1 \square$

Esta última propriedade já nos mostra um prelúdio do Teorema Fundamental do Cálculo Discreto, que é visto no próximo capítulo. A maioria dessas propriedades são usadas com frequência no decorrer desse trabalho. A seguir, definimos as derivadas de ordem superior.

3.3 DERIVADAS DISCRETAS DE ORDEM SUPERIOR

De forma semelhante ao Cálculo Tradicional, podemos derivar mais de uma vez, assim a segunda derivada discreta ou derivada discreta de ordem 2 é a aplicação do operador diferença duas vezes na mesma sequência.

$\Delta(\Delta a_n) = \Delta(a_{n+1} - a_n) = a_{n+2} - a_{n+1} - (a_{n+1} - a_n) = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n.$

Onde denotamos também $\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n)$

$\Delta^3 a_n = \Delta(\Delta^2 a_n) = \Delta(a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n) = a_{n+3} - 2a_{n+2} + a_{n+1} - (a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n)$

$\Delta^3 a_n = a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n$

Definimos indutivamente a derivada discreta de ordem k ou k-ésima derivada discreta como $\Delta^k a_n = \Delta(\Delta^{k-1} a_n)$, para $k \geq 2$. Assim de maneira mais geral, chegamos a seguinte proposição, retirado de Neto (2012).

Proposição 4: Seja a_n uma sequência, então

$$\Delta^k a_n = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} \cdot a_{n+k-p}$$

Vamos demonstrar por indução em k.

Seja a_n uma sequência, temos

$P(k) : \Delta^k a_n = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p}(-1)^p \cdot a_{n+k-p}$, com $\binom{k}{0} = \binom{k}{k} = 1$

Vamos provar que $P(1)$ é verdadeiro.

$\Delta^1 a_n = \sum_{p=0}^{1} \binom{1}{p}(-1)^p \cdot a_{n+1-p} = \binom{1}{0}(-1)^0 a_{n+1} + \binom{1}{1}(-1)^1 \cdot a_{n+1-1}$

Dessa forma obtemos

$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. Logo $P(1)$ é verdadeiro.

Vamos supor que $P(k)$ é verdadeiro para algum $k \in \mathbb{N}$, então

$\Delta^k a_n = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p}(-1)^p \cdot a_{n+k-p}$

Vamos provar que $P(k+1)$ também é verdadeiro.

$\Delta^{k+1} a_n = \Delta(\Delta^k a_n) = \Delta\left[\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p}(-1)^p \cdot a_{n+k-p}\right]$ (aqui foi usado a hipótese de indução) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta^{k+1} a_n = \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p}(-1)^p \cdot a_{n+k+1-p} - \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p}(-1)^p \cdot a_{n+k-p}$

Separando o primeiro termo do primeiro somatório e trocando p por $p-1$ no segundo somatório, temos

$\Delta^{k+1} a_n = a_{n+k+1} + \sum_{p=1}^{k+1} \binom{k+1}{p}(-1)^p \cdot a_{n+k+1-p} - \sum_{p=1}^{k+1} \binom{k}{p}(-1)^{p-1} \cdot a_{n+k-p+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta^{k+1} a_n = a_{n+k+1} + \sum_{p=1}^{k+1} \left[\binom{k+1}{p} + \binom{k}{p}\right](-1)^p a_{n+k+1-p}$

Usando a relação de Stifel, chegamos a igualdade desejada

$\Delta^{k+1} a_n = a_{n+k+1} + \sum_{p=1}^{k+1} \binom{k+1}{p+1}(-1)^p a_{n+k+1-p} = \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p+1}(-1)^p a_{n+k+1-p}$

Logo $P(k+1)$ é verdadeiro e pelo princípio de indução $P(k)$ é verdadeiro para todo k natural.$\square$

Essa proposição nos mostra uma relação entre a derivada discreta e recorrências lineares. Essa relação é explorada com mais detalhes no capítulo seguinte. Adiante, temos mais algumas proposições relativas as derivadas de ordem k que são usadas também nas demonstrações do próximo capítulo.

Proposição 5: Se a_n e b_n são sequências, então $\forall k \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}$

$$\Delta^k(a_n + c.b_n) = \Delta^k a_n + c.\Delta^k b_n.$$

Vamos demonstrar por indução em k.

Seja $P(k) : \Delta^k(a_n + c \cdot b_n) = \Delta^k a_n + c \cdot \Delta^k b_n$

Para $k = 1$ temos

$\Delta(a_n + c \cdot b_n) = a_{n+1} + c \cdot b_{n+1} - (a_n + c \cdot b_n) = a_{n+1} - a_n + c \cdot (b_{n+1} - b_n) = \Delta a_n + c \cdot \Delta b_n$

Logo $P(1)$ é verdadeiro.

Vamos supor que $P(k)$ seja válido para algum $k \in \mathbb{N}$, então

$\Delta^k(a_n + c \cdot b_n) = \Delta^k a_n + c \cdot \Delta^k b_n$

Vamos provar a validez de $P(k+1)$

$\Delta^{k+1}(a_n + c \cdot b_n) = \Delta[\Delta^k(a_n + c \cdot b_n)]$

Usando a hipótese de indução, temos

$\Delta[\Delta^k(a_n + \cdot b_n)] = \Delta[\Delta^k a_n + c \cdot \Delta^k b_n] = \Delta(\Delta^k a_n) + \Delta(c \cdot \Delta^k b_n) = \Delta^{k+1} a_n + c \cdot \Delta^{k+1} b_n$

Assim provamos que $P(k+1)$ também é verdadeiro, logo pelo princípio de indução $P(n)$ é verdadeiro para todo n natural. $\square$

Proposição 6: Se $\Delta^k n^k$ é constante, então $\Delta^k n^k = k!$

Demonstração:

Vamos demonstrar por indução forte[2]. Seja $P(k) : \Delta^k n^k = k!$

Para $k = 1$ temos $\Delta^1 n^1 = \Delta n = n + 1 - n = 1 = 1!$ Assim $P(1)$ é verdadeiro.

Vamos supor que $P(k)$ é válida $1, 2, \cdots, k$, com $k \in \mathbb{N}$ ou seja, que $\Delta^k n^k = k! \forall k \leq n$

Provamos que $P(k+1)$ também é verdadeiro, desse temos:

$\Delta^{k+1} n^{k+1} = \Delta^k(\Delta n^{k+1}) = \Delta^k[\Delta(n^k \cdot n)]$

Usando a fórmula de Leibniz, obtemos:

$\Delta(n^k \cdot n) = \Delta n^k \cdot (n+1) + n^k \cdot \Delta n = \Delta n^k \cdot (n+1) + n^k$

Para calcular Δn^k, usamos o binômio de Newton

$$\Delta n^k = (n+1)^k - n^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} n^p - n^k = \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} n^p$$

Assim resulta

$$\Delta n^k \cdot (n+1) + n^k = \left[\sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} n^p\right] \cdot (n+1) + n^k = \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} [n^{p+1} + n^p] + n^k$$

Faremos uma mudança de variável, trocando $p+1$ por p e p por $p-1$ em que obtemos

$$\sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} [n^{p+1} + n^p] + n^k = \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p-1} [n^p + n^{p-1}] + n^k$$

Vamos separar do somatório o último termo e reorganizar a expressão

$$\binom{k}{k-1} [n^k + n^{k-1}] + n^k + \sum_{p=1}^{k-1} \binom{k}{p-1} [n^p + n^{p-1}]$$

Por fim vamos calcular Δ^k da expressão obtida na linha anterior.

$$\Delta^k \left\{ \binom{k}{k-1} [n^k + n^{k-1}] + n^k + \sum_{p=1}^{k-1} \binom{k}{p-1} [n^p + n^{p-1}] \right\} =$$

[2] O princípio de indução forte diz: Seja uma proposição $P(n)$, então i) $P(1)$ verdadeira e ii) $P(n)$ é verdadeira para $n = 1, 2, \cdots, k$, com $k \leq n \Rightarrow P(k+1)$ também é verdadeira. Para mais detalhes, consultar Morgado e Carvalho (2013)

$$= \binom{k}{k-1}\Delta^k n^k + \underbrace{\binom{k}{k-1}\Delta^k n^{k-1}}_{=0} + \Delta^k n^k + \underbrace{\Delta^k\left\{\sum_{p=1}^{k-1}\binom{k}{p-1}[n^p + n^{p-1}]\right\}}_{=0}$$

Essas derivadas discretas são iguais a zero, pois as sequências em questão tem grau menor ou igual a $k-1$, sobrando apenas $\binom{k}{k-1}\Delta^k n^k + \Delta^k n^k$

Usando a hipótese de indução, temos
$\Delta^{k+1}n^{k+1} = \binom{k}{k-1}\Delta^k n^k + \Delta^k n^k = k \cdot k! + k! = (k+1)!$ Assim provamos que $P(k+1)$ é verdadeiro. Logo pelo princípio de indução, $P(k)$ é verdadeiro $\forall k \in \mathbb{N}$ e portanto, concluimos a demostração. $\square$

Proposição 7: Para as potências modificadas, também temos $\Delta^k n^{(k)} = k!$

Demonstração:

A prova é por indução. Então seja $P(k)$: $\Delta^k n^{(k)} = k!$

Para $k = 1$ temos $\Delta n^{(1)} = \Delta n = n+1-n = 1$, assim $P(1)$ é verdadeiro.

Supondo que $P(k)$ seja válida para algum k, vamos provar que $P(k+1)$ também é válida.

$\Delta^{k+1}[n^{(k+1)}] = \Delta^k[\Delta n^{(k+1)}] = \Delta^k[(k+1)\cdot n^{(k)}] = (k+1)\cdot\Delta^k n^{(k)} =^* (k+1)\cdot k! = (k+1)!$

Nessa igualdade $=^*$ usamos a hipótese de indução ($\Delta^k n^{(k)} = k!$) e, por fim, pelo princípio de indução $P(k)$ é verdadeiro $\forall k \in \mathbb{N}$. Assim terminamos a demonstração. $\square$

Definimos uma P.A. (a_n) de ordem k, quando Δa_n é uma P.A de ordem $k-1$. De maneira geral, uma P.A. é de ordem k, quando $\Delta^k a_n$ é constante $\neq 0$. Provamos isso na proposição 8. Vejamos um exemplo.

A P.A. $(1, 8, 27, 64, 125, \cdots, n^3)$ é de ordem 3, pois

$\Delta a_2 = 8-1 = 7$	$\Delta^2 a_2 = 19-7 = 12$	$\Delta^3 a_2 = 18-12 = 6$
$\Delta a_3 = 27-8 = 19$	$\Delta^2 a_3 = 37-19 = 18$	$\Delta^3 a_3 = 24-18 = 6$
$\Delta a_4 = 64-27 = 37$	$\Delta^2 a_4 = 61-37 = 24$	$\vdots$
$\Delta a_5 = 125-64 = 61$	$\vdots$	
$\vdots$		

A partir de tudo isso, chegamos as seguintes proposições que, de maneira mais geral, relacionam P.A.'s, polinômios e derivadas discretas de ordem k, pois a maioria dos somatórios usados no texto são de expressões polinomiais, por isso, se faz necessária essa ligação.

Proposição 8: a_n é uma P.A. de ordem $k \Leftrightarrow \Delta^k a_n$ é constante $\neq 0$.

Demonstração:

Vamos provar por indução em k a implicação de ida $(\Rightarrow)$. Se a_n é uma P.A. de ordem k, então $\Delta^k a_n$ é constante. Para $k = 1$, temos que a_n é uma P.A. de ordem $1 \Rightarrow \Delta a_{n+1} - a_n = r$ que é constante.

Supondo que toda P.A. de ordem k, a_n, satisfaz $\Delta^k a_n = c \neq 0$, para algum $k \in \mathbb{N}$, vamos provar que para $k+1$, o resultado também é verdadeiro.

Seja a_n uma P.A. de ordem $k+1$, por definição temos que $b_n = \Delta a_n$ é uma P.A. de ordem k.

Por hipótese de indução, $\Delta^k b_n = c$ com c constante $\neq 0$.

Assim, resulta $\Delta^k b_n = \Delta^k(\Delta a_n) = \Delta^{k+1} a_n = c$

Vamos também provar a recíproca da implicação $(\Leftarrow)$ por indução k. Se $\Delta^k a_n$ é constante $\neq 0$, então a_n é uma P.A de ordem k.

Para $k = 1$, temos que $\Delta a_n = c \Rightarrow a_{n+1} - a_n = c \Rightarrow$ por definição, a_n é uma P.A de ordem 1.

Logo, a proposição é verdadeiro para $k = 1$.

Supondo que esse resultado é verdadeiro para algum k, temos que: $\Delta^k a_n = c \neq 0 \Rightarrow a_n$ P.A. de ordem k. Vamos provar que a proposição também é válida para $k+1$, temos

$\Delta^{k+1} a_n = c \Rightarrow \Delta^k(\Delta a_n) = \Delta^k b_n = c$, com $\Delta a_n = b_n$.

Pela hipótese de indução, $b_n = \Delta a_n$ é uma P.A. de ordem k. Dessa maneira, por definição, a_n é uma P.A. cujo grau é $k+1$. Pelo princípio de indução, a proposição é verdadeira para todo k natural. $\square$

Proposição 9: a_n é um polinômio em n de grau $k \Leftrightarrow \Delta^k a_n$ é constante $\neq 0$.

Demonstração:

Vamos provar a implicação de ida $(\Rightarrow)$ por indução em k. Se p_n é um polinômio em n de grau k, então $\Delta^k p_n = c$ com c constante $\neq 0$.

Para $k = 1$, seja $p_n = c \cdot n + d$, com c e d constantes $\neq 0$.

Temos que $\Delta p_n = c(n+1) + d - (cn+d) = c$. Logo, a proposição é verdadeira para $k = 1$.

Supondo que cada polinômio em n de grau k, $p_n = \sum_{j=0}^{k} b_j n^j$ satisfaz $\Delta^k p_n = c \neq 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

$p_n = \sum_{j=0}^{k+1} b_j n^j$ tem grau $k+1$, vamos provar que $\Delta^{k+1} p_n = c$, com c constante $\neq 0$.

Assim temos que $\Delta^{k+1} p_n = \Delta^{k+1} \sum_{j=0}^{k+1} b_j n^j = \sum_{j=0}^{k+1} b_j \Delta^{k+1} n^j$.

Pela proposição 6, obtemos

$\Delta^{k+1} n^j = \begin{cases} (k+1)!, & \text{para} \quad j = k+1 \\ 0, & \text{para} \quad j \leq k \end{cases}$. Portanto, $\Delta^{k+1} p_n = b_{k+1}(k+1)!$, que é constante $\neq 0$.

Assim, demonstramos a primeira parte.

Vamos então provar, por indução em k, a recíproca da proposição $(\Leftarrow)$. Se $\Delta^k p_n$ é constante $\neq 0$, então p_n é um polinômio em n de grau k

Para $k=1$, temos que $\Delta p_n = c \Rightarrow p_{n+1} - p_n = c$, aplicando o somatório em ambos os membros, resulta

$\sum_{n=1}^{m}(p_{n+1}-p_n) = \sum_{n=1}^{m} c$. Usando a proposição 1 e a propriedade iv) da subseção 2.4.1, temos

$p_{m+1} - p_1 = cm$, ou, trocando m por n, $p_{n+1} = cn + p_1$, que é um polinômio de grau 1.

Supondo que para algum $k \in \mathbb{N}$, se tenha

$\Delta^k p_n = c \Rightarrow p_n = \sum_{j=0}^{k} b_j n^j$

Vamos provar que o resultado é válido para $k+1$

Seja p_n um polinômio, tal que $\Delta^{k+1} p_n = c$, com c constante $\neq 0$, temos

$\Delta^{k+1} p_n = \Delta^k(\Delta p_n) = \Delta^k r_n = c$, em que $r_n = \Delta p_n$

Pela hipótese de indução, temos $r_n = \sum_{j=0}^{k} b_j n^j$, que resulta

$\sum_{n=1}^{m}(p_{n+1}-p_n) = \sum_{n=1}^{m}\sum_{j=0}^{k} b_j n^j$

Calculando a soma telescópica do primeiro membro (proposição 1) e invertendo os somatório do segundo membro, obtemos

$p_{m+1} - p_1 = \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=1}^{m} b_j n^j = \sum_{j=0}^{k} b_j \sum_{n=1}^{m} n^j \Rightarrow p_{n+1} = p_1 + \sum_{j=0}^{k} b_j q_j(n)$, com $q_j(n) = \sum_{n=1}^{m} n^j$

Assim concluimos que $p_{n+1} = p_1 + \sum_{j=0}^{k} b_j \cdot q_j(n)$ é um polinômio de grau $k+1$. Isso necessita de uma demonstração, por isso no próximo capítulo provamos esse resultado. Dessa maneira, encerramos o tópico de derivadas de ordem superior e seguimos nosso estudo para o assunto de números de stirling e potências modificadas, para entender a relação existente entre os mesmos.

3.4 NÚMEROS DE STIRLING E POTÊNCIAS MODIFICADAS

Foi visto no capítulo anterior que as potências modificadas foram definidas como $n^{(k)} = n.(n-1).(n-2).\cdots.(n-k+1)$. No entanto, se efetuarmos as multiplicações, obtemos um polinômio em n de grau igual a k. Segundo Gleich (2005), podemos transformar um polinômio de potências modificadas de grau k em um polinômio de potências comuns de grau k. O próximo resultado generaliza esse fato.

Proposição 10: Seja o seguinte polinômio fatorial $a_n = c_k n^{(k)} + c_{k-1} n^{(k-1)} + \cdots + c_1 n^{(1)} + c_0$, com $c_0, c_1, \cdots, c_k$ constantes e $c_k \neq 0$. Então existem constantes $b_0, b_1, \cdots, b_k$ com $b_k \neq 0$ tal que $a_n = b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0$. A demonstração será feita por indução em k.

Seja $P(k): a_n = \sum_{p=0}^{k} c_p n^{(p)} = \sum_{p=0}^{k} b_p n^p$

Para $k = 1$, temos $\sum_{p=0}^{1} c_p n^{(p)} = c_0 + c_1 n^{(1)} = c_0 + c_1 n$, pois $n^1 = n = n^{(1)}$

Dessa forma, obtemos $c_0 = b_0$ e $c_1 = b_1$. Logo $P(1)$ é verdadeiro.

Vamos supor que $P(k)$ seja verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$

$\sum_{p=0}^{k} c_p n^{(p)} = \sum_{p=0}^{k} b_p n^p$

Vamos provar que $P(k+1)$ também é verdadeira. Seja o polinômio fatorial de grau $k+1$

$\sum_{p=0}^{k+1} c_p \cdot n^{(p)} = c_{k+1} n^{(k+1)} + \sum_{p=0}^{k} c_p n^p = c_{k+1} \cdot n \cdot (n-1)^{(k)} + \sum_{p=0}^{k} c_p n^p$

Usando a hipótese de indução, obtemos

$c_{k+1} \cdot n \cdot (n-1)^{(k)} + \sum_{p=0}^{k} c_p n^p = c_{k+1} \cdot n \cdot \sum_{p=0}^{k} e_p (n-1)^p + \sum_{p=0}^{k} c_p n^p \Rightarrow$

$\Rightarrow c_{k+1} \cdot n \cdot \sum_{p=0}^{k} e_p (n-1)^p + \sum_{p=0}^{k} c_p n^p = \underbrace{c_{k+1} \cdot n \cdot e_k \cdot (n-1)^k}_{Q(n)} + \underbrace{n \cdot \sum_{p=0}^{k-1} e_p (n-1)^p}_{R(n)} + \underbrace{\sum_{p=0}^{k} c_p n^p}_{S(n)}$

Veja que $Q(n)$ tem grau $k+1$ e $R(n)$ e $S(n)$ tem grau k. Logo $Q(n) + R(n) + S(n)$ tem grau $k+1$. Assim $P(k+1)$ é verdadeira e pelo princípio de indução $P(k)$ é verdadeiro para todo k natural. $\square$

De forma particular, segundo Miller (1960), uma potência modificada $n^{(k)}$ é expressa como um polinômio de potências comuns. Dessa forma, temos

$$n^{(k)} = \sum_{p=1}^{k} F_{k,p} \cdot n^p$$

onde os coeficientes $F_{k,p}$ são chamados de números de Stirling de primeiro tipo e também são representados por $\begin{bmatrix} k \\ p \end{bmatrix}$. Vejamos alguns exemplos:

$n^{(1)} = n$ $\quad F_{1,1} = 1$

$n^{(2)} = n.(n-1) = n^2 - n$ $\quad F_{2,1} = -1 \quad F_{2,2} = 1$

$n^{(3)} = n.(n-1).(n-2) = n^3 - 3n^2 + 2n$ $\quad F_{3,1} = 2 \quad F_{3,2} = -3 \quad F_{3,3} = 1$

$\vdots$

Segundo Miller (1960), podemos também reciprocamente transformar um polinômio de potências comuns de grau k em um polinômio de potências modificadas em n de mesmo grau. A próxima proposição demonstra isso.

Proposição 11: Seja a sequência $a_n = c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \cdots + c_1 n + c_0$ sendo $c_k, c_{k-1}, \cdots, c_1, c_0$ constantes e $c_k \neq 0$, então existem constantes $b_k, b_{k-1}, \cdots, b_1, b_0$ com $b_k \neq 0$ tal que $a_n = b_k n^{(k)} + b_{k-1} n^{(k-1)} + \cdots + b_1 n^{(1)} + b_0$.

Da mesma maneira, vamos demonstrar por indução em k

Seja $P(k) : a_n = \sum\limits_{p=0}^{k} c_p n^p = \sum\limits_{p=0}^{k} b_p n^{(p)}$

Para $k = 1$, temos

$\sum\limits_{p=0}^{1} c_p n^p = c_0 + c_1 n^1 = c_0 + c_1 n^{(1)}$, pois $n^1 = n = n^{(1)}$

Assim temos $c_0 = b_0$ e $c_1 = b_1$. Logo $P(1)$ é verdadeiro.

Vamos supor que $P(k)$ seja verdadeiro para algum $k \in \mathbb{N}$, ou seja, que existem $b_0, b_1, \cdots, b_k$ tal que

$$a_n = \sum_{p=0}^{k} c_p n^p = \sum_{p=0}^{k} b_p n^{(p)}$$

Vamos provar que $P(k+1)$ também é verdadeiro, assim

Seja $\sum\limits_{p=0}^{k+1} c_p n^p = c_{k+1} n^{k+1} + \sum\limits_{p=0}^{k} c_p n^p = c_{k+1} n \cdot (n^k) + \sum\limits_{p=0}^{k} c_p n^p$

Usando a hipótese de indução, então existem $d_0, d_1, \cdots, d_k$ e $b_0, b_1, \cdots, b_k$ tais que

$$c_{k+1} n \cdot (n^k) + \sum_{p=0}^{k} c_p n^p = c_{k+1} n \cdot \sum_{p=0}^{k} d_p n^{(p)} + \sum_{p=0}^{k} b_p n^{(p)}$$

Somaremos e subtrairemos $c_{k+1} \cdot \sum\limits_{p=0}^{k} d_p n^{(p)}$ à expressão, assim resulta

$$\sum_{p=0}^{k+1} c_p n^p = c_{k+1} n \cdot \sum_{p=0}^{k} d_p n^{(p)} + c_{k+1} \sum_{p=0}^{k} d_p n^{(p)} + \sum_{p=0}^{k} b_p n^{(p)} - c_{k+1} \sum_{p=0}^{k} d_p n^{(p)}$$

Reagrupando os somatórios, temos

$$\sum_{p=0}^{k+1} c_p n^p = c_{k+1} \cdot (n+1) \cdot \sum_{p=0}^{k} d_p n^{(p)} + \sum_{p=0}^{k} (b_p - c_{k+1} d_p) \cdot n^{(p)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{p=0}^{k+1} c_p n^p = c_{k+1} \sum_{p=0}^{k} d_p n^{(p)} \cdot (n+1) + \sum_{p=0}^{k} e_p n^{(p)} \text{ com } e_p = b_p - c_{k+1} d_p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{p=0}^{k+1} c_p n^p = c_{k+1} \sum_{p=0}^{k} d_p (n+1)^{(k+1)} + \sum_{p=0}^{k} e_p n^{(p)}$$

Separando o primeiro termo do primeiro somatório do lado direito da igualdade, obtemos

$$\sum_{p=0}^{k+1} c_p n^p = c_{k+1} d_k (n+1)^{(k+1)} + c_{k+1} \cdot \sum_{p=0}^{k-1} d_p (n+1)^{(p+1)} + \sum_{p=0}^{k} e_p n^{(p)}$$

Fazendo $c_{k+1} d_k = f_{k+1}$ e uma mudança de variável $p+1$ para p e p para $p-1$ no primeiro somatório do segundo membro, obtemos

$$\sum_{p=0}^{k+1} c_p n^p = \underbrace{f_{k+1} (n+1)^{(k+1)}}_{Q(n)} + \underbrace{\sum_{p=1}^{k} d_{p-1} (n+1)^{(p)}}_{R(n)} + \underbrace{\sum_{p=0}^{k} e_p n^{(p)}}_{S(n)}$$

Assim temos $R(n)$ e $S(n)$ com grau k e $Q(n)$ tem grau $k+1$. Logo, $Q(n)+R(n)+S(n)$ tem grau $k+1$, provando que $P(k+1)$ é verdadeiro. Com isso, pelo princípio de indução, $P(k)$ é verdadeiro $\forall\ k \in \mathbb{N}$, terminando a demonstração. $\square$

Particularmente da mesma forma, segundo Miller (1960), uma potência comum n^k pode ser expressa como um polinômio de potências modificada. Dessa forma, temos

$$n^k = \sum_{p=1}^{k} S_{k,p} \cdot n^{(p)}$$

onde $S_{k,p}$ é chamado de número de Stirling de segundo tipo. Outra notação $\left\{ \begin{matrix} k \\ p \end{matrix} \right\}$. Alguns exemplos:

$n = n^{(1)}$ $\qquad S_{1,1} = 1$

$n^2 = n^{(1)} + n^{(2)}$ $\qquad S_{2,1} = 1 \quad S_{2,2} = 1$

$n^3 = n^{(1)} + 3n^{(2)} + n^{(3)}$ $\qquad S_{3,1} = 1 \quad S_{3,2} = 3 \quad S_{3,3} = 1$

$\vdots$

Estas duas proposições são bem relevantes, pois fica mais simples calcular integrais discretas[3] de potências comuns, transformando-as em somas de potências modificadas. No entanto, vemos isso apenas no próximo capítulo. Adiante apresentamos uma ferramenta análoga à fórmula de Taylor, que é a fórmula de Newton. Ela também é importante, pois nos ajuda a encontrar os números de Stirling de segundo tipo.

[3] No próximo capítulo, definimos a integral discreta e suas semelhanças com o somatório.

3.5 FÓRMULA DE NEWTON E POLINÔMIOS

No Cálculo Tradicional "é mostrado que se $f(x)$ é um polinômio de grau n, então $f(x)$ pode ser escrito na forma

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + f''(0)\cdot\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\cdot\frac{x^n}{n!}\text{"}$$

(MILLER, 1960, p. 18, tradução nossa), em que $f^{(n)}$ é a n-ésima derivada no ponto 0. Essa fórmula também é conhecida como fórmula de Taylor. No entanto, o Cálculo Discreto, segundo Miller (1960), tem uma fórmula análoga que é chamada de Fórmula de Newton, em que a_n é um polinômio em n de grau k expresso por:

$$a_n = a_0 + \Delta a_0 \cdot n^{(1)} + \Delta^2 a_0 \cdot \frac{n^{(2)}}{2!} + \cdots + \Delta^k a_0 \cdot \frac{n^{(k)}}{k!},$$

em que $\Delta^k a_0$ é a derivada discreta de a_n de ordem k quando $n = 0$. Como $\frac{n^{(k)}}{k!} = \binom{n}{k}$, a fórmula de Newton também é escrita com a notação de somatório da seguinte forma

$$a_n = \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p} \Delta^p a_0,$$

em que $\Delta^0 a_0 = a_0$ e $\binom{n}{0} = 1$

Para encontrar essa primeira fórmula, usamos a proposição anterior, em que se a_n é um polinômio de potências comuns de grau k em n, então a_n pode ser escrito como polinômio de potências modificadas de mesmo grau.

$a_n = a_0 + b_1 n^{(1)} + b_2 n^{(2)} + \cdots + b_k n^{(k)}$

Vamos aplicar a derivada discreta em ambos membros na expressão anterior, para encontrar cada b_i

$\Delta a_n = b_1 + 2b_2 n^{(1)} + 3b_3 n^{(2)} + \cdots + k b_k n^{(k-1)}$

Para $n = 0$ temos $\Delta a_0 = b_1 \Rightarrow b_1 = \Delta a_0$

Derivando mais uma vez temos

$\Delta^2 a_n = 2b_2 + 3\cdot 2b_3 n^{(1)} + 4\cdot 3b_4 n^{(4)} + \cdots + k\cdot(k-1)b_k n^{(k-2)}$

Para $n = 0$, temos $\Delta^2 a_0 = 2b_2 \Rightarrow b_2 = \frac{\Delta^2 a_0}{2!}$

$\ldots$

Sucessivamente temos $\Delta^k a_0 = k!\cdot b_k \Rightarrow b_k = \frac{\Delta^k a_0}{k!}$. Assim substituindo cada b_k pelos coeficientes encontrados, obtemos $a_n = a_0 + \Delta a_0 \cdot n^{(1)} + \Delta^2 a_0 \cdot \frac{n^{(2)}}{2!} + \cdots \Delta^k a_0 \cdot \frac{n^{(k)}}{k!}$. Agora veja um exemplo de como isso funciona na prática.

Exemplo: Seja a sequência $a_n = n^4$.

Como é um polinômio de grau 4, basta calcular as derivadas até de quarta ordem, pois todas as outras derivadas superiores são nulas (consequência da proposição 8 e 9).

Os termos da sequência a_n são $(0,1,16,81,256,625,1296,\cdots)$.

A sequência da primeira derivada discreta: $(1,15,65,175,369,671,\cdots)$.

A sequência da segunda derivada: $(14,50,110,194,302,\cdots)$

A sequência da terceira derivada: $(36,60,84,108,\cdots)$

A sequência da quarta derivada: $(24,24,24,\cdots)$

Assim, temos que $a_0 = 0$, $\Delta a_0 = 1$, $\Delta^2 a_0 = 14$, $\Delta^3 a_0 = 36$ e $\Delta^4 a_0 = 24$

Logo $n^4 = 0 + 1 \cdot n^{(1)} + 14 \cdot \dfrac{n^{(2)}}{2!} + 36 \cdot \dfrac{n^{(3)}}{3!} + 24 \dfrac{n^{(4)}}{4!} = n^{(1)} + 7n^{(2)} + 6n^{(3)} + n^{(4)}$

Então concluimos que $S_{4,0} = 0$, $S_{4,1} = 1$, $S_{4,2} = 7$, $S_{4,3} = 6$ e $S_{4,4} = 1$

De maneira geral, para $a_n = n^k$ temos que

$$S_{k,p} = \frac{\Delta^p a_0}{p!}$$

Com $\Delta^p a_0$ sendo a derivada discreta de ordem p de a_n para $n = 0$. Assim uma potência comum também é escrita da sequinte forma

$$n^k = S_{k,1} \cdot n^{(1)} + S_{k,2} \cdot n^{(2)} + \cdots + S_{k,k} \cdot n^{(k)}$$

Por fim, concluimos o capítulo com a demonstração da relação de Stifel, retirada de Neto (2013).

Proposição 11: Seja n e p inteiros não-negativos, com $n > p$ então

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

em que $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$

Demonstração:

$$\frac{n!}{(n-p)!p!} + \frac{n!}{[n-(p+1)]!(p+1)!} = \frac{n!(p+1)+n!(n-p)}{(n-p)!(p+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-p)!(p+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{[n+1-(p+1)]!(p+1)!} = \binom{n+1}{p+1} \square$$

Agora, já temos em mãos algumas ferramentas necessárias para começarmos o cálculo de somatórios. Vimos que basicamente calcular uma derivada discreta é como calcular a "razão" de uma sequência e que várias sequências cujas suas derivadas discretas e propriedades são bem semelhantes às suas contrapartes no Cálculo Tradicional. No próximo capítulo, vemos a operação inversa da derivada discreta que é integral discreta. Vemos também algumas equações que envolvem derivadas, chamadas equações diferenciais discretas.

4 INTEGRAL DE UMA SEQUÊNCIA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DISCRETAS

Continuando o nosso estudo de sequências e somatórios, chegamos a parte mais importante do estudo, mas antes de falarmos das integrais discretas e dos somatórios, vamos relembrar um conceito importante vindo do Cálculo Tradicional: a integral. Segundo Guidorizzi (1987), definimos integral indefinida (ou antiderivada) como:

$$\int f(x)dx = F(x) + k,$$

com k constante e que f e F são funções reais, tal que $F'(x) = f(x)$.

Dessa forma, vamos apresentar nesse capítulo uma extensão, uma versão discreta da integral citada acima e ainda associar ao somatório. Também apresentamos alguns resultados que auxiliam no cálculo de somatórios e resolvemos vários exemplos. Concluímos com uma breve exposição sobre equações diferenciais discretas. As definições, os resultados, os teoremas e alguns exemplos apresentados nesse capítulo foram retirados de Boole (1860), Gleich (2005), Guidorizzi (1987), Guidorizzi (1988), Miller (1960), Poço (2008) e Richardson (1954).

4.1 ANTIDERIVADA DISCRETA DE UMA SEQUÊNCIA

Segundo Gleich (2005), uma sequência a_n é dita antiderivada (ou primitiva) discreta de b_n, se $\Delta a_n = b_n$. Entendemos a integral discreta indefinida, denotada por $\sum b_n \delta n$, como a família das sequências cuja derivada discreta é b_n e escrevemos assim:

$$\sum b_n \delta n = a_n + C$$

em que C é uma constante.

Vejamos que $\Delta x_n = \Delta y_n \Leftrightarrow \Delta x_n - \Delta y_n = 0 \Leftrightarrow \Delta(x_n - y_n) = 0 \Leftrightarrow x_n - y_n = C$ por iii) da seção 3.2. Ou seja, se duas sequências tem a mesma derivada, então elas diferem por apenas uma constante. Segundo Richardson (1954), a antiderivada pode ser também denotada por Δ^{-1} ou $1/\Delta$. Vejamos alguns exemplos de antiderivadas, retirados de Miller (1960) e Richardson (1954):

a) $\sum r\delta n = \sum \Delta(r \cdot n)\delta n = rn + C$

Pois $\Delta(r \cdot n) = r \cdot (n+1) - r \cdot n = r$, sendo r uma constante;

b) $\sum q^n \delta n = \sum \Delta\left(\dfrac{q^n}{q-1}\right)\delta n = \dfrac{q^n}{q-1} + C$, para $q \neq 1$

Pois $\Delta q^n = q^n \cdot (q-1)$;

c) $\sum \text{sen}(an)\delta n = -\dfrac{\cos[a(n-1/2)]}{2\text{sen}(a/2)} + C$

Como $\Delta\cos\left(an - \dfrac{a}{2}\right) = -\text{sen}\left(\dfrac{a}{2}\right) \cdot \text{sen}(an) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum \Delta\cos\left[a\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\right]\delta n = -\text{sen}\left(\dfrac{a}{2}\right) \cdot \sum \text{sen}(an)$

Assim $\cos\left[a\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\right] = -\text{sen}\left(\dfrac{a}{2}\right) \cdot \sum \text{sen}(an) + C$;

d) $\sum \cos(an)\delta n = \dfrac{\text{sen}[a(n-1/2)]}{2\text{sen}(a/2)} + C$

Pois $\cos(an) = \dfrac{\Delta\text{sen}[a(n-1/2)]}{2\text{sen}(a/2)}$;

e) $\sum \binom{n}{p}\delta n = \binom{n}{p+1} + C$, para $n \geq p+1$

Pois $\Delta\binom{n}{p+1} = \binom{n}{p}$;

f) $\sum n(n!)\delta n = n! + C$

Pois $\Delta n! = n \cdot n!$;

g) $\sum n^{(k)}\delta n = \dfrac{n^{(k+1)}}{k+1} + C$

Pois $\Delta n^{(k+1)} = (k+1)n^{(k)}$.

Muitos desses exemplos acima são bem semelhantes ao caso da integral tradicional. A seguir, temos então o principal resultado desse trabalho: o Teorema Fundamental do Cálculo Discreto. Pois a partir disso, podemos calcular somatórios praticamente do mesmo jeito que calculamos integrais convencionais.

4.2 TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO DISCRETO (TFCD)

Do Cálculo Convencional, também relembramos um dos principais resultados sobre a integral definida: o Teorema Fundamental do Cálculo. Segundo Guidorizzi (1987), se f é uma função integrável[1] em $[a,b]$ com $F'(x) = f(x)$, então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Para a versão discreta, temos o Teorema Fundamental do Cálculo Discreto em que relaciona o somatório com a antiderivada discreta. Mas primeiro, vamos definir a antiderivada discreta definida e relacioná-la com o somatório usual. Segundo Gleich (2005), definimos antiderivada discreta definida como $\sum_j^k b_n \delta n$ em que $\Delta a_n = b_n$, e também temos

$$\sum_j^k b_n \delta n = \sum_{n=j}^{k-1} b_n,$$

em que o somatório do lado direito é o somatório usual que foi citado na seção 2.4.

Agora vejamos o Teorema Fundamental do Cálculo Discreto (TFCD), retirado de Gleich (2005), Miller (1960) e Richardson (1954). Sejam a_n e b_n sequências tais que $\Delta a_n = b_n$, então:

$$\sum_j^k b_n \delta n = a_k - a_j,$$

Demonstração: Temos que

$$\sum_j^k b_n \delta n = \sum_{n=j}^{k-1} b_n = \sum_{n=j}^{k-1} \Delta a_n = \Delta a_j + \Delta a_{j+1} + \cdots + \Delta a_{k-2} + \Delta a_{k-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=j}^{k-1} b_n = (a_{j+1} - a_j) + (a_{j+2} - a_{j+1}) + \cdots + (a_{k-1} - a_{k-2}) + (a_k - a_{k-1})$$

Resolvendo as somas telescópicas (proposição 1), temos

$$\sum_j^k b_n \delta n = a_k - a_j \quad \square$$

Dessa maneira, para calcular a forma geral de somatórios, basicamente basta encontrar a antiderivada do somando, transformá-lo em uma integral discreta e usar o TFCD. Agora para ilustar o assunto, vejamos alguns exemplos, retirado de Miller (1960), Gleich (2005) e Poço (2008), em que aplicamos as técnicas desenvolvidas até aqui nesse estudo.

Vamos calcular a soma dos n primeiros números naturais. Ela pode ser facilmente calculada aplicando o TFCD.

$$\sum_{n=1}^k n = \sum_{n=1}^{k+1} n^{(1)} \delta n = \left.\frac{n^{(2)}}{2}\right|_1^{k+1} = \frac{(k+1)^{(2)} - 1^{(2)}}{2} = \frac{(k+1).k - 1.0}{2} = \frac{k.(k+1)}{2}.$$

[1] Para maiores informações sobre funções integráveis, consultar Guidorizzi (1987)

Da mesma forma, podemos calcular a soma dos termos da P.G.
$\sum_{n=1}^{k} a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot \sum_{n=1}^{k+1} q^{n-1} \delta n = a_1 \cdot \left.\frac{q^{n-1}}{q-1}\right|_1^{k+1} = a_1 \cdot \frac{q^k - q^0}{q-1} = \frac{a_1 \cdot (q^k - 1)}{q-1}$, com $q \neq 1$.

Calculamos também a fórmula geral para $\sum_{n=1}^{k} n^2$ e $\sum_{n=1}^{k} n^3$.

Usando o TFCD no primeiro somatório, temos
$\sum_{n=1}^{k} n^2 = \sum_{n=1}^{k+1} n^2 \delta n$
Substituindo o somando por potências modificadas (proposição 11) $n^2 = n^{(1)} + n^{(2)}$, resulta

$$\sum_{n=1}^{k+1} n^2 \delta n = \sum_{n=1}^{k+1} [n^{(1)} + n^{(2)}] \delta n = \sum_{n=1}^{k+1} n^{(1)} \delta n + \sum_{n=1}^{k+1} n^{(2)} \delta n = \left.\frac{n^{(2)}}{2}\right|_1^{k+1} + \left.\frac{n^{(3)}}{3}\right|_1^{k+1} =$$

$$= \frac{(k+1)^{(2)} - 1^{(2)}}{2} + \frac{(k+1)^3 - 1^{(3)}}{3} = \frac{(k+1) \cdot k - 1 \cdot 0}{2} + \frac{(k+1) \cdot k \cdot (k-1) - 1 \cdot 0 \cdot (-1)}{3} =$$

$$= \frac{(k+1) \cdot k}{2} + \frac{(k+1) \cdot k \cdot (k-1)}{3} = (k+1) \cdot k \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{k-1}{3}\right) = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6}.$$

Assim temos que $\sum_{n=1}^{k} n^2 = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6}$.

Da mesma maneira, para calcular $\sum_{n=1}^{k} n^3$, temos:
Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo Discreto, temos
$\sum_{n=1}^{k} n^3 = \sum_{n=1}^{k+1} n^3 \delta n$
Substituindo $n^3 = n^{(1)} + 3n^{(2)} + n^{(3)}$ (proposição 11), resulta

$$\sum_{n=1}^{k+1} n^3 \delta n = \sum_{n=1}^{k+1} [n^{(1)} + 3n^{(2)} + n^{(3)}] \delta n = \sum_{n=1}^{k+1} n^{(1)} + 3 \sum_{n=1}^{k+1} n^{(2)} \delta + \sum_{n=1}^{k+1} n^{(3)} \delta n =$$

$$= \left.\frac{n^{(2)}}{2}\right|_1^{k+1} + 3 \cdot \left.\frac{n^{(3)}}{3}\right|_1^{k+1} + \left.\frac{n^{(4)}}{4}\right|_1^{k+1} =$$

$$= \frac{(k+1)^{(2)} - 1^{(2)}}{2} + 3 \cdot \frac{(k+1)^{(3)} - 1^{(3)}}{3} + \frac{(k+1)^{(4)} - 1^{(4)}}{4} =$$

$$= \frac{(k+1) \cdot k}{2} + (k+1) \cdot k \cdot (k-1) + \frac{(k+1) \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}{4} =$$

$$= (k+1) \cdot k \cdot \left[\frac{1}{2} + k - 1 + \frac{(k-1) \cdot (k-2)}{4}\right] = \frac{(k+1) \cdot k \cdot (k^2 + k)}{4} = \left[\frac{(k+1) \cdot k}{2}\right]^2$$

Assim temos que $\sum_{n=1}^{k} n^3 = \left[\frac{k\cdot(k+1)}{2}\right]^2$.

Finalizamos essa seção com o Teorema das Colunas, visto em Combinatória.

Proposição 12: Seja $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$, com $n \geq p$ então

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$$

Demonstração: Usando a notação de somatório e o TFCD, temos

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{n} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{n+j}{n} \delta j = \binom{n+j}{n+1}\Bigg|_0^{k+1} = \binom{n+k+1}{n+1} - \binom{n}{n+1} = \binom{n+k+1}{n+1}$$

Pois $\binom{n}{n+1} = 0$. Assim concluimos a demonstração. $\square$

Vimos que todas as técnicas desenvolvidas até aqui foram para calcular esses somatórios de maneira prática. Na próxima seção, vemos uma última ferramenta desse trabalho que é a fórmula de somação por partes que é o análogo da fórmula de integral por partes do Cálculo e vemos também sua utilidade ao se calcular somatórios de produto de sequências.

4.3 FÓRMULA DE SOMAÇÃO POR PARTES (FSP)

A fórmula de integral por partes é muito usada para calcular a integral em que há uma multiplicação de funções. Segundo Guidorizzi (1987), sejam f e g funções reais e deriváveis, então:

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx$$

Chamamos a versão discreta de fórmula de somação por partes em que é muita usada no caso que há no somando alguma multiplicação de sequências. Segundo Miller (1960) e Poço (2008), sejam a_n e b_n sequências, então:

$$\sum a_n \cdot (\Delta b_n)\delta n = a_n \cdot b_n - \sum (\Delta a_n)\cdot b_{n+1}\delta n$$

Demonstração: Considere a derivada discreta do produto de duas sequências a_n e b_n:

$\Delta(a_n.b_n) = (\Delta a_n).b_{n+1} + a_n.(\Delta b_n)$

Aplicamos a antiderivada discreta em ambos os membros

$\sum \Delta(a_n.b_n)\delta n = \sum (\Delta a_n).b_{n+1}\delta n + \sum a_n.(\Delta b_n)\delta n \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n.b_n = \sum(\Delta a_n).b_{n+1}\delta n + \sum a_n.(\Delta b_n)\delta n$

Organizando os termos, obtemos a fórmula desejada:
$\sum a_n \cdot (\Delta b_n)\delta n = a_n \cdot b_n - \sum(\Delta a_n) \cdot b_{n+1}\delta n \quad \square$

Agora vamos fazer um exemplo para aplicar essa fórmula e outros métodos já estudados, calculando a soma da seguinte P.A.G.:

$$\sum_{n=1}^{k} n \cdot 2^n$$

Se $a_n = n$ e $\Delta b_n = 2^n$, temos que $\Delta a_n = 1$ e $b_n = 2^n$, usando o TFCD e a FSP, obtemos que

$$\sum_{n=1}^{k} n \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{k+1} n \cdot 2^n \delta n = n \cdot 2^n \Big|_1^{k+1} - \sum_{n=1}^{k+1} 2^{n+1} \cdot 1\delta n = (n \cdot 2^n - 2^{n+1})\Big|_1^{k+1} =$$

$$= 2^n(n-2)\Big|_1^{k+1} = 2^{k+1}(k+1-2) - 2^1(1-2) = 2^{k+1}(k-1) + 2.$$

Dessa maneira, reduzimos o problema de calcular somatórios ao método de calcular integrais. Antes de concluir essa seção, damos a demonstração para um resultado pendente que foi usado na proposição 8 do capítulo anterior.

Proposição 13: Se $p(n)$ é um polinômio em n de grau k, então $q(n) = \sum\limits_{m=0}^{n} p(m)$ tem grau $k+1$

Demonstração:

Seja um polinômio $p(m) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i m^i$

Então $\sum\limits_{m=0}^{n} p(m) = \sum\limits_{m=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{k} a_i m^i = \sum\limits_{i=0}^{k}\sum\limits_{m=0}^{n} a_i m^i = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i \sum\limits_{m=0}^{n} m^i$

Usando a proposição 10 do capítulo anterior resulta

$$\sum_{i=0}^{k} a_i \sum_{m=0}^{n} m^i = \sum_{i=0}^{k} a_i \sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} b_j m^{(j)} = \sum_{i=0}^{k} a_i \sum_{j=0}^{i} b_j \sum_{m=0}^{n} m^{(j)}$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo Discreto no terceiro somatório, obtemos

$$\sum_{i=0}^{k} a_i \sum_{j=0}^{i} b_j \sum_{m=0}^{n} m^{(j)} = \sum_{i=0}^{k} a_i \sum_{j=0}^{i} b_j \sum_{m=0}^{n+1} m^{(j)}\delta m = \sum_{i=0}^{k} a_i \sum_{j=0}^{i} b_j \frac{m^{(j+1)}}{j+1}\Big|_0^{n+1}$$

Temos que $\dfrac{m^{(j+1)}}{j+1}\Big|_0^{n+1} = \dfrac{(n+1)^{(j+1)} - 0^{(j+1)}}{j+1} = \dfrac{(n+1)^{(j+1)}}{j+1}$

Veja que o polinômio $r_i(n) = \sum\limits_{j=0}^{i} b_j \dfrac{(n+1)^{(j+1)}}{j+1}$ tem grau $i+1$

Por fim, concluímos que $\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot r_i(n)$ é um polinômio de grau $k+1$ $\square$

4.4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DISCRETAS (EDD)

No Cálculo Tradicional, depois de se estudar derivadas e integrais de funções, temos as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) que, segundo Miller (1960), são equações do tipo

$$F[x, f(x), f'(x), f''(x), \cdots, f^k(x)] = 0,$$

com $f^k(x)$ sendo a derivada de ordem k de f. Essas equações são importantes, pois muitos movimentos físicos na natureza são descritos por equações diferenciais.

No Cálculo Discreto, temos as Equações Diferenciais Discretas (EDD) ou também chamadas de equações de diferenças finitas que, segundo Miller (1960), são equações do tipo

$$F(n, a_n, \Delta a_n, \Delta^2 a_n, \cdots, \Delta^k a_n) = 0,$$

em que a_n é uma sequência.

Exemplos:

a) $\Delta^2 a_n - \Delta a_n - 2a_n = 8$

b) $\Delta^3 a_n + \Delta^2 a_n - 2a_n - a_n = 0$

c) $3\Delta^5 a_n - [\Delta a_n]^4 + 5 = n$

d) $(\Delta^3 a_n) \cdot (a_n) + 5n = 0$

Segundo Richardson (1954), uma EDD se relaciona diretamente com uma equação de recorrência, ou seja, cada derivada discreta é expressa em termos da sequência em questão, assim temos

$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

$\Delta^2 a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$

$\Delta^3 a_n = a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n$

$\Delta^4 a_n = a_{n+4} - 4a_{n+3} + 6a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n$

De maneira geral, pela proposição 4 do capítulo 3, temos

$\Delta^k a_n = \sum_{p=0}^{k} b_{k,p} \cdot a_{n+k-p}$, em que $b_{k,p} = \binom{k}{p}(-1)^p$

Vejamos um exemplo. Vamos transformar a equação $\Delta^2 a_n + \Delta a_n - 2a_n = 8$ em uma recorrência. Substituindo as derivadas, temos

$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n - (a_{n+1} - a_n) - 2a_n = 8 \Rightarrow a_{n+2} - 3a_n = 8$

Portanto, o problema de resolver uma EDD se reduz a resolver uma recorrência, pois as duas podem ser tratadas da mesma forma. Segundo Moreira (2007), o estudo de recorrencias é muito usado na teoria dos Sistemas Dinâmicos[2] e há também aplicações em teoria dos números. Embora existam várias tipos de equações discretas, no entanto, nesse trabalho focamos nas EDD's Lineares que definimos a seguir.

4.4.1 Equação Diferenciais Discretas Lineares

Segundo Richardson (1954), se a_n e b_n são sequências, entendemos por Equação Diferencial Discreta Linear (ou apenas equação linear) uma expressão do seguinte tipo

$$\Delta^k a_n + c_1\Delta^{k-1}a_n + c_2\Delta^{k-2}a_n + \cdots + c_{k-1}\Delta a_n + c_k a_n = b_n,$$

em que $c_1, c_2, \cdots, c_k$ são sequências ou constantes que também chamamos de coeficientes.

Chamamos de EDD linear em n de ordem k (ou k-ésima) as equações em que a derivada discreta de maior grau é igual a k. Vejamos alguns exemplos:

a) $\Delta^2 a_n + \Delta a_n - 2a_n = 0$ é uma EDD de ordem 2 ou de segunda ordem;

b) $\Delta^3 a_n + \Delta^2 a_n - 3\Delta a_n - a_n = 0$ é uma EDD de ordem 3 ou de terceira ordem;

c) $3\Delta^5 a_n - \Delta a_n + 5 = n$ é uma EDD de ordem 5 ou de quinta ordem.

Também podemos redefinir uma equação linear aos moldes de uma recorrência. Seja a_n uma sequência, segundo Richardson (1954), uma equação diferencial discreta linear de ordem k é uma equação do seguinte tipo:

$$a_{n+k} + b_1 \cdot a_{n+k-1} + \cdots + b_p \cdot a_{n+k-p} + \cdots + b_k \cdot a_n = d_n$$

com b_n e d_n sendo sequências ou constantes. Se $d_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, diremos que a EDD Linear é chamada homogênea.

Exemplos:

a) $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ é homogênea e tem ordem 2 ou de segunda ordem.

b) $a_{n+1} - na_n = 2$ tem ordem 1

A solução de uma EDD, segundo Richardson (1954), é uma sequência que satisfaz a equação de recorrência. Basta substituir a solução e verificar a igualdade.

Exemplo$_1$: Vejamos que $a_n = c \cdot 2^n$ é solução da seguinte equação $a_{n+1} - 2a_n = 0$, com c sendo uma constante.

$a_{n+1} - 2a_n = c \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot c \cdot 2^n = 2^{n+1}(c - c) = 0$

[2] Área da Matémática que estuda movimentos caóticos

Exemplo$_2$: $a_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot 4^n$ é uma solução de $a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 0$

Substituindo a solução na EDD, resulta:

$c_1 \cdot 3^{n+2} + c_2 \cdot 4^{n+2} - 7 \cdot (c_1 \cdot 3^{n+1} + c_2 \cdot 4^{n+1}) + 12 \cdot (c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot 4^n) =$

$= 9 \cdot c_1 \cdot 3^n + 16 \cdot c_2 \cdot 4^n - 21 \cdot c_1 \cdot 3^n - 28 \cdot c_2 \cdot 4^n + 12 \cdot c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot 4^n =$

$= 3^n \cdot (9 \cdot c_1 - 21 \cdot c_1 + 12 \cdot c_1) + 4^n \cdot (16 \cdot c_2 - 28 \cdot c_2 + 12 \cdot c_2) = 0$

Já para encontrar soluções de EDD's, há vários modos assim como nas EDO's. Por isso, dividimos por tipos. Primeiro vejamos alguns casos mais simples.

a) Vamos resolver $a_{n+1} - a_n = b^n$, com b constante

Para $b \neq 1$, temos que

$a_{n+1} - a_n = b^n \Rightarrow \Delta a_n = b^n \Rightarrow \sum \Delta a_n \delta n = \sum b^n \delta n \Rightarrow a_n = \dfrac{b^n}{b-1} + C$, com C constante

Para $b = 1$, temos que

$\Delta a_n = 1 \Rightarrow \sum \Delta a_n \delta n = \sum 1 \delta n \Rightarrow a_n = n + C$, com C constante.

b) Segundo Richardson (1954), para resolvermos a equação da P.G. $a_{n+1} - d \cdot a_n = 0$, com d constante, multiplicamos a expressão pelo fator d^{-n-1}, que resulta

$a_{n+1} d^{-n-1} - d^{-n-1} \cdot d \cdot a_n = 0 \Rightarrow a_{n+1} d^{-(n+1)} - d^{-n} a_n = 0 \Rightarrow \Delta a_n \cdot d^{-n} = 0$

Assim, por iii da seção 3.2 temos

$a_n \cdot d^{-n} = c \Rightarrow a_n = c \cdot d^n$ com c constante.

c) Vamos resolver a seguinte equação $\Delta^2 a_n = 2$

Usando a integral discreta em ambos os membros, temos que

$\sum \Delta^2 a_n \delta n = \sum 2 \delta n$

Pelo TFCD temos que $\Delta a_n = 2n + C_1$, com C_1 constante

Aplicando novamente a integral discreta e TFCD, lembrando que $n = n^{(1)}$ temos

$\sum \Delta a_n \delta n = \sum (2n^{(1)} + C_1) \delta n \Rightarrow a_n = 2 \cdot \dfrac{n^{(2)}}{2} + C_1 \cdot n + C_2$, com C_1 e C_2 constante.

Assim a solução geral é $a_n = n^{(2)} + C_1 n + C_2$ ou $a_n = n^2 + C_3 n + C_2$, com $C_3 = C_1 - 1$

São muitas as técnicas de resolução para as mais variadas EDD's, mas vejamos agora um tipo em particular, em que damos uma forma de achar uma solução geral para a equação linear de primeira ordem.

4.4.2 EDD Linear de Primeira Ordem

Do Cálculo Convencional, lembramos que, segundo Guidorizzi (1987), sejam f e g funções reais e contínuas, uma EDO Linear de primeira ordem é uma equação da seguinte forma

$$\frac{dy}{dx} - y \cdot f(x) = g(x),$$

cuja a solução é

$$y = e^{F(x)} \cdot \left[k + \int \frac{g(x)}{e^{F(x)}} dx \right]$$

em que $F(x)$ é uma antiderivada para $f(x)$.

Analogamente no Cálculo Discreto, temos a Equação Diferencial Discreta Linear de primeira ordem que é, segundo Boole (1860), uma equação do tipo

$$a_{n+1} - b_n \cdot a_n = d_n$$

com a_n, b_n e d_n sendo sequências e $a_n \neq 0$.

Para acharmos a solução completa, primeiros consideramos a EDD linear homogênea associada. Assim temos

$a_{n+1} - b_n \cdot a_n = 0 \Rightarrow a_{n+1} = b_n a_n \Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = b_n$

Escreveremos a expressão obtidas com índices variando de 0 até n.

$$\frac{a_1}{a_0} = b_0, \qquad \frac{a_2}{a_1} = b_1, \qquad \frac{a_3}{a_2} = b_2, \qquad \cdots \qquad \frac{a_n}{a_{n-1}} = b_{n-1}$$

Multiplicamos as expressões, obtendo um produto telescópico

$$\frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = b_0 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}$$

Pela proposição 2 do capítulo 2, temos que $\dfrac{a_n}{a_0} = [b_{n-1}]^{(n)} \Rightarrow a_n = c \cdot [b_{n-1}]^{(n)}$, com $c = a_0$

Para resolver o caso geral, segundo Boole (1860), trocamos a constante c por c_n na solução homogênea e substituimos a EDD linear geral para encontrarmos c_n, assim

$a_n = c_n \cdot [b_{n-1}]^{(n)}$ e $a_{n+1} = c_{n+1} \cdot [b_n]^{(n+1)}$

Para $a_{n+1} - b_n \cdot a_n = d_n$ temos

$$c_{n+1}[b_n]^{(n+1)} - b_n \cdot c_n [b_{n-1}]^{(n)} = d_n \Rightarrow c_{n+1}[b_n]^{(n+1)} - c_n [b_n]^{(n+1)} = d_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (c_{n+1} - c_n)[b_n]^{(n+1)} = d_n \Rightarrow \Delta c_n = \frac{d_n}{[b_n]^{(n+1)}} \Rightarrow c_n = \sum \frac{d_n}{[b_n]^{(n+1)}} \delta n.$$

Por fim, como $a_n = c_n \cdot [b_{n-1}]^{(n)}$ concluimos que a solução geral é

$$a_n = [b_{n-1}]^{(n)} \cdot \left[\sum \frac{d_n}{[b_n]^{(n+1)}} \delta n \right]$$

Vejamos um exemplo. Vamos resolver a seguinte equação: $a_{n+1} - 2a_n = 3^n$

Temos que $b_n = 2$ e $d_n = 3^n$ assim $[b_{n-1}]^{(n)} = 2^n$ e $[b_n]^{(n+1)} = 2^{n+1}$

A solução é $a_n = 2^n \cdot \left[\sum \frac{3^n}{2^{n+1}} \delta n \right] = 2^n \cdot \frac{1}{2} \left[\sum \left(\frac{3}{2} \right)^n \delta n \right] = 2^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3/2 - 1} \cdot \left[\left(\frac{3}{2} \right)^n + C \right]$

Portanto, a solução geral fica $a_n = 3^n + C \cdot 2^n$, com C constante. A seguir, concluímos o capítulo com uma breve explanação sobre equações lineares de ordem k.

4.4.3 Solução de uma EDD Linear de ordem k com coeficientes constantes

Segundo Guidorizzi (1988), a solução completa da EDO linear de ordem k com $b_1, b_2, \cdots, b_k$ constantes e f uma função real

$$\frac{d^k y}{dx^k} + b_1 \frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} + \cdots + b_{k-1} \frac{dy}{dx} + b_k x = f(x)$$

é $y = y_p + y_g$ em que y_p é uma solução particular e y_g é solução geral da equação homogênea associada. A solução dessa EDO linear homogênea é $y = e^{c_1 x} + e^{c_2 x} + \cdots + e^{c_k x}$ no caso[3] em que $c_1, c_2, \cdots, c_k$ são as k raízes reais e distintas do polinômio característico associado.

Para o caso discreto, vimos anteriormente que uma equação diferencial discreta linear de ordem k pode ser escrita em termos da recorrência

$$a_{n+k} + b_1 \cdot a_{n+k-1} + \cdots + b_p \cdot a_{n+k-p} + \cdots + b_k \cdot a_n = d_n,$$

com $b_1, b_2, \cdots, b_k$ e d_n sendo sequências. No entanto, nesse trabalho vemos apenas o caso em que os coeficientes b_k são constantes, pois no caso contrário, segundo Richardson (1954), a solução dessas equações com grau maior do que 1 em geral não são encontradas.

Vejamos primeiro o caso em que a equação é homogênea. Assim temos que $a_{n+k} + b_1 \cdot a_{n+k-1} + \cdots + b_p \cdot a_{n+k-p} + \cdots + b_k \cdot a_n = 0$ com coeficientes constantes. Antes de chegarmos a solução geral, vejamos uma propriedade importante para as EDD's lineares homogêneas, que nos dá a "cara"da solução geral desse tipo de equação.

[3] Para ver os outros casos, consultar Guidorizzi (1988)

Proposição 14: Se $A_n, B_n, \cdots, P_n$ são soluções de uma EDD linear homogênea e $c_1, c_2, \cdots, c_p$ constantes, então a expressão $c_1 \cdot A_n + c_2 \cdot B_n + \cdots + c_p \cdot P_n$ também é solução dessa mesma equação.

Demonstração: Vamos provar por indução no número de soluções.

Se tivermos 1 solução A_n como solução da EDD linear homogênea, temos que

$A_{n+k} + b_1 \cdot A_{n+k-1} + \cdots + b_k \cdot A_n = 0$

Multiplicando a equação por c_1, obtemos

$c_1 \cdot A_{n+k} + c_1 \cdot b_1 \cdot A_{n+k-1} + \cdots + c_1 \cdot b_k \cdot A_n = c_1 \cdot 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c_1 A_{n+k} + b_1 \cdot (c_1 A_{n+k-1}) + \cdots + b_k \cdot (c_1 A_n) = 0$

Assim $c_1 A_n$ também é solução da Equação

Suponha que as p soluções formam a solução $c_1 A_n + c_2 B_n + \cdots + c_p P_n$

Vamos provar que se tivermos as $p+1$ soluções $A_n, B_n, \cdots, P_n$ e R_n, então $c_1 A_n + c_2 B_n + \cdots + c_p P_n + c_{p+1} R_n$ também é solução da equação homogênea.

Seja $X_n = c_1 A_n + c_2 B_n + \cdots + c_p P_n$, substituindo $X_n + c_{p+1} R_n$ na EDD temos

$X_{n+k} + c_{p+1} R_{n+k} + b_1 (X_{n+k-1} + c_{p+1} R_{n+k-1}) + \cdots + b_k (X_n + c_p R_n) =$

$= X_{n+k} + b_1 X_{n+k-1} + \cdots + b_k X_n + c_{p+1} R_{n+1} + c_{p+1} b_1 R_{n+k-1} + \cdots + c_{p+1} b_k R_n = 0$

É igual a zero, pois, por hipótese, X_n e R_n são soluções para a equação. Assim demonstramos a proposição. $\square$

Entretanto, segundo Richardson (1954), para achar a solução de uma EDD linear homogênea, temos que resolver um polinômio característico a ela associada, ou seja, se temos $a_{n+k} + b_1 \cdot a_{n+k-1} + \cdots + b_{k-1} \cdot a_{n+1} + b_k \cdot a_n = 0$, façamos $a_{n+k} = x^k \cdot a_n$ que resulta

$x^k \cdot a_n + b_1 \cdot x^{k-1} a_n + \cdots + b_{k-1} \cdot x \cdot a_n + b_k \cdot a_n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^k + b_1 \cdot x^{k-1} + \cdots + b_{k-1} \cdot x + b_k) \cdot a_n = 0$. Assim obtemos que

$x^k + b_1 \cdot x^{k-1} + \cdots + b_{k-1} \cdot x + b_k = 0$

Chamamos esse polinômio obtido de polinômio característico associado a EDD linear homogênea. Se esse polinômio tiver as k raízes reais e distintas $c_1, c_2, \cdots, c_k$, então a solução completa da EDD linear homogênea associada é

$$a_n = p_1(c_1)^n + p_2(c_2)^n + \cdots + p_k(c_n)^n$$

com $p_1, p_2, \cdots, p_k$ constantes.

Dessa forma, segundo Richardson (1954), a solução geral da EDD linear é composta por duas partes chamadas de sequência complementar (SC) e integral particular (IP). Dizemos que SC é uma sequência complementar quando ela é solução da EDD linear homogênea associada.

Já a integral particular é uma solução particular da EDD linear. Assim a solução geral é igual SC + IP.

Exemplo: Para resolver $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 5^n$ temos que

A equação característica da equação homogênea é $x^2 - 5x + 6 = 0$

As raízes são 2 e 3, SC $= c_1 2^n + c_2 3^n$ e IP $= \dfrac{5^n}{6}$.

Portanto, a solução geral é $a_n = \dfrac{5^n}{6} + c_1 2^n + c_2 3^n$. Nem sempre é simples achar uma IP para uma equação em questão. Porém existem alguns métodos para isso que podem ser encontrados em Richardson (1954) e Boole (1860).

Realmente, o Cálculo Discreto é bem semelhante ao Cálculo Diferencial Integral. No entanto, é necessário perceber também suas diferenças como foi notado nesse trabalho. Vimos como os somatórios são resolvidos usando as técnicas utilizadas nas integrais. Da mesma forma, as equações discretas foram vistas e podem ser resolvidas da mesma maneira que EDO e recorrências.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Contar e somar fascinou o homem ao longo do tempo. Contar seus próprios pertences ou objetos a sua frente, somar o dinheiro que tem. O objetivo sempre foi ter um resultado final, um valor que expressasse uma quantidade total, um número. Adicionar números e calcular áreas de maneira geral também intrigava principalmente os matemáticos, especificamente quando essas somas tornavam-se grandes e complexas. Não precisava ter uma aplicação no cotidiano, bastava um desafio, um tipo de quebra-cabeça. Não é a toa que isso atraiu e ainda atrai as pessoas para a matemática atualmente.

Por exemplo, calcular $1+2+3+\cdots+100$ pode parecer de imediato algo mecânico ou enfadonho, mas a empolgação esteve em tentar achar a maneira que facilitasse o cálculo, um padrão de generalização. No caso citado, a forma foi perceber que $1+100=2+99=3+98=\cdots=50+51=101$, que é a ideia atribuída a Gauss e também é usada para soma da P.A. Assim, concluímos que o valor da soma foi $101\cdot 50=5050$. A ideia é transladar o problema que ainda não se conhece uma solução para um caso em que já se sabe como resolver. Isso torna o processo prático e motivador. Isso também nos impulsionou a pesquisar mais sobre o assunto. Também nos motivou pelo tema, o pouco conhecimento sobre o tema e as dificuldades adquiridas no início da graduação, pois ao ingressar ao curso com pouco preparo matemático se tornou mais complicado o desenvolvimento sem a devida ajuda e orientação.

Ao se conhecer o Cálculo Diferencial e Integral, buscou-se aprofundamento nos estudos de somas de áreas e volumes, principalmente no contexto do Contínuo. Mas ainda precisou-se de algo a mais para se calcular somatórios. É assim que entrou o Cálculo Discreto, pois ele que faz o elo entre somatórios e as derivadas e integrais. Ainda mais, pudemos adaptar as fórmulas do Cálculo Tradicional para o Cálculo Discreto. Ou seja, basicamente reduzimos o problema de calcular somatórios, que há diversos métodos diferentes, às técnicas básicas de se calcular uma integral. Assim, um estudante de Cálculo, que familiarizado com o assunto, vê grande semelhança entre o Cálculo Discreto e Tradicional. Já, para os não familiarizados com o tema, como por exemplo, os alunos do ensino médio, também não há preocupação, pois basta ter um breve conhecimento sobre sequências para o acompanhamento do texto.

A partir de tudo isso, foi traçado um objetivo que foi, com essas ferramentas, calcular os somatórios, ou seja, achar uma fórmula geral que usasse apenas operações elementares. Assim, surgiu a necessidade de conhecer derivada e integral discreta e, com elas as suas propriedades e teoremas relacionados.

Para alcançar tal meta, começamos uma pesquisa bibliográfica, e verificamos que havia pouco material em língua portuguesa no Brasil sobre o assunto. Já de imediato, também houve a preocupação de deixar o texto acessível, claro e objetivo para todos aqueles que tem um conhecimento básico de matemática. O que parecia ser um obstáculo tornou-se um favorecimento, pois uma vez concluído o trabalho, espera-se que o mesmo seja uma boa contribuição ao Cálculo Discreto para este idioma.

Uma das dificuldades enfrentadas ao longo dessa pesquisa foi o pouco material em português sobre o Cálculo Discreto, pois a maioria dos livros encontrados abordava apenas alguns tópicos de maneira bem objetiva e suscinta. Por isso, recorremos também a autores de língua inglesa, em que foi necessária a tradução desses materiais. Também o texto foi produzido na plataforma LaTeX, assim tivemos o esforço e o empenho para a formatação do mesmo.

Apesar de haver referências externas, o texto é autocontido no geral. Assim, não há necessidade inicialmente de fontes exteriores para a compreensão, pois dentro do trabalho houve toda uma construção das ferramentas e métodos a serem usados. Pois, começamos pelo conceito de sequência e em seguida pelos somatórios, onde foram dadas várias propriedades. Após isso, demonstramos vários resultados sobre derivadas discretas que foram a base para a teoria. No capítulo de integral foi feito um paralelo do somatório com a integral discreta e assim conseguimos a concretização dos objetivos traçados. Ainda fomos um pouco mais além, porque, a princípio, não estava prevista a seção de Equações Diferenciais Discretas.

Contudo, esperamos que esse texto possa ajudar na pesquisa e no estudo de Cálculo e Matemática Discreta e possa servir de referência a muitos outros que serão produzidos. Este estudo pode ser usado principalmente como curso complementar ao Cálculo Diferencial e Integral ou Análise Matemática ou um aprofundamento ao assunto de progressões. Esperamos também que haja continuidade e um detalhamento dos tópicos abordados nessa pesquisa, seja por nossa parte ou por terceiros, pois há muito o que ser explorado sobre o tema, como por exemplo, Geometria Discreta. Esperamos que os estudantes, não só de Matemática, mas também de Física, Computação, Estatística e das Engenharias, bem como professores de Matemática e estusiastas no geral, possam utilizar esse texto como instrumento e auxílio nas suas atividades relacionadas ao tema.

Por fim, mesmo em meio as dificuldades e obstáculos enfrentados, para nós é uma grande satisfação ter aprendido um assunto tão fantástico, mas pouco conhecido, e poder contribuir com o mesmo na reunião e na divulgação desses conteúdos que resultaram nesse estudo.

REFERÊNCIAS

BOOLE, George. **A treatise on calculus of finite differences.** New York: Cambridge University Press, 1860.

BUENO, Silveira. **Minidicionário da língua portuguesa.** 2. ed. São Paulo: FTD, 2007.

CARNEIRO, João Paulo; MOREIRA; Carlos Gustavo. Sequências aritmético-geométricas. **Revista EUREKA!**, São Paulo, n. 14, p. 32-34, set. 2002.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O Que é Matemática?** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

DOSSEY, John A. *et al*. **Discrete Mathematics.** 4. ed. New York: Addison Wesley, 2001.

GLEICH, David F. **Finite Calculus:** A Tutorial for Solving Nasty Sums. 17 jan. 2005. Disponível em: <https://www.cs.purdue.edu/homes/dgleich/publications/Gleich%202005%20%20finite%20calculus.pdf>. Acesso: em 14 mai. 2018.

GRAHAM, Ronald E.; KNUTH, Donald E.; PATASCHINK, Oren. **Matemática Concreta**: Fundamentos para Ciência da Computação. 2. ed, Rio de Janeiro: LTC, 1995.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo.** 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1987. v. 1.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo.** Rio de Janeiro: LTC, 1988. v. 4.

HEFEZ, Abramo. **Indução Matemática.** Rio de Janeiro: OBMEP, 2009 (Programa de Iniciação Cientifíca OBMEP, 4).

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos de metodologia científica.** 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real.** 10. ed. Rio de Janeiro; SBM, 2013 (Coleção Matemática Universitária).

MILLER, Kenneth S. **An Introduction to the Calculus of Finite Differences and Difference Equations.** New York: Doves Publications, 1960.

MOREIRA, Carlos Gustavo. Sequências Recorrentes. **Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina**, Santa Catarina, n. 4, p. 53-69, abr. 2007

MORGADO, Augusto César; CARVALHO; Paulo César Pinto. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT, 12).

NETO, Antônio Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar**: números reais. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. v. 1.

NETO, Antônio Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar**: Polinômios. Rio de Janeiro: SBM, 2013. v. 6.

NETO, Aref Antar et al. **Progressões e Logaritmos.** Fortaleza: Vestseller, 2009. (Noções de Matemática, v. 2).

PAIVA, R. E. B. Progressões Aritmético-Geométricas (PAG) e Progressões Geométrico-Aritméticas (PGA). **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 73, p. 47-.49, set. 2010

POÇO, Eduardo. Integrais Discretas. **Revista EUREKA!**, São Paulo, n. 27, p. 25-31, jun. 2008.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cézar de. **Metodologia do Trabalho Científico**: Métodos e Técnicas de Pesquisa e do Trabalho Acadêmico. 2. ed. Rio Grande do Sul: Freevale, 2013.

RENZE, John; WEISSTEIN, Eric W. **Discrete Mathematics**. 2002. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/DiscreteMathematics.html>. Acesso em: 19 nov. 2018.

RICHARDSON, C. H., **An Introduction to the Calculus of Finite Differences.** New York: D. Van Nostrand Company, 1954.