Acta Oceanográfica del Pacífico, INOCAR, Ecuador, 1(1), Octubre, 1980

¿QUE ES UNA ONDA ECUATORIAL DE KELVIN.?

Por:
PEDRO RIPA (1)

Antes que nada, debo aclarar que este es un artículo de divulgación y su contenido no es el resultado de investigaciones originales del autor.

La importancia del estudio de las ondas de Kelvin (ecuatoriales o costeras) radica, en parte, en el hecho de que éstas proveen un mecanismo eficaz para el transporte de energía (en la forma de perturbaciones de densidad y corriente) en una dirección particular. Estas señales se trasladan sin dispersión, es decir, sin cambiar de forma.

Por ejemplo, una de las teorías más populares sobre el fenómeno de El Niño postula que éste se origina en la forma de una onda ecuatorial de Kelvin, producida por la relajación de los vientos medios del este. Estos vientos mantienen normalmente un gradiente de presión, caracterizado por un aumento de temperatura, a profundidad constante, hacia el oeste. Al disminuir anormalmente los vientos medios, la pendiente de las isopicnas está en desequilibrio dando origen a la onda ecuatorial de Kelvin que finalmente produce un aumento de la temperatura del agua en el Pacífico oriental. Es posible que esta señal, al llegar a la costa de América del Sur, se divida fundamentalmente en dos partes, que a su vez se propaguen hacia el Norte y el Sur, en la forma de ondas costeras de Kelvin.

Por otra parte, una onda de Kelvin provee un ejemplo muy sencillo de dos fenómenos fundamentales de la Oceanografía Física de frecuencias bajas: el balance geostrófico y la conservación de vorticidad potencial.

Para simplificar el tratamiento del problema, vamos a suponer que las escalas horizontales son suficientemente grandes como para poder hacer la "aproximación hidrostática", es decir: i) la presión en un punto es igual al peso de la columna de agua (de sección unitaria) encima de ese punto, ii) las velocidades horizontales no varían con la profundidad en cada capa de densidad constante.

De todos los agentes que modifican el estado físico del océano solo tendremos en cuenta a las *fuerzas restitutivas* (responsables de la existencia de ondas), en particular, la fuerza de presión (debida a la gravedad terrestre) y la "fuerza" de Coriolis (debida a la rotación terrestre). No analizaremos las *fuerzas externas* (debidas, por ejemplo, al viento y la presión atmosférica) que causan estas ondas, ni las *fuerzas disipativas* (debidas tanto a la viscosidad y difusión molecular como a los efectos de la "turbulencia" oceánica) que amortiguan a las ondas.

Efectos de la gravedad terrestre

Que el peso del agua es responsable de la existencia de ondas es un concepto bien conocido. Considérese, por ejemplo, un canal angosto de profundidad H(x,t) (fig.1). Si se perturba la superficie, aparecen fuerzas de presión, F_p, que tienden a volverla a su estado de equilibrio, $H = H_o$ = cte.

(1) Join Institute for the Study of the Atmosphere and the Ocean (PMEL/UW)
CICESE, Espinoza 843, a.p. 2732, Ensenada, BC. México.

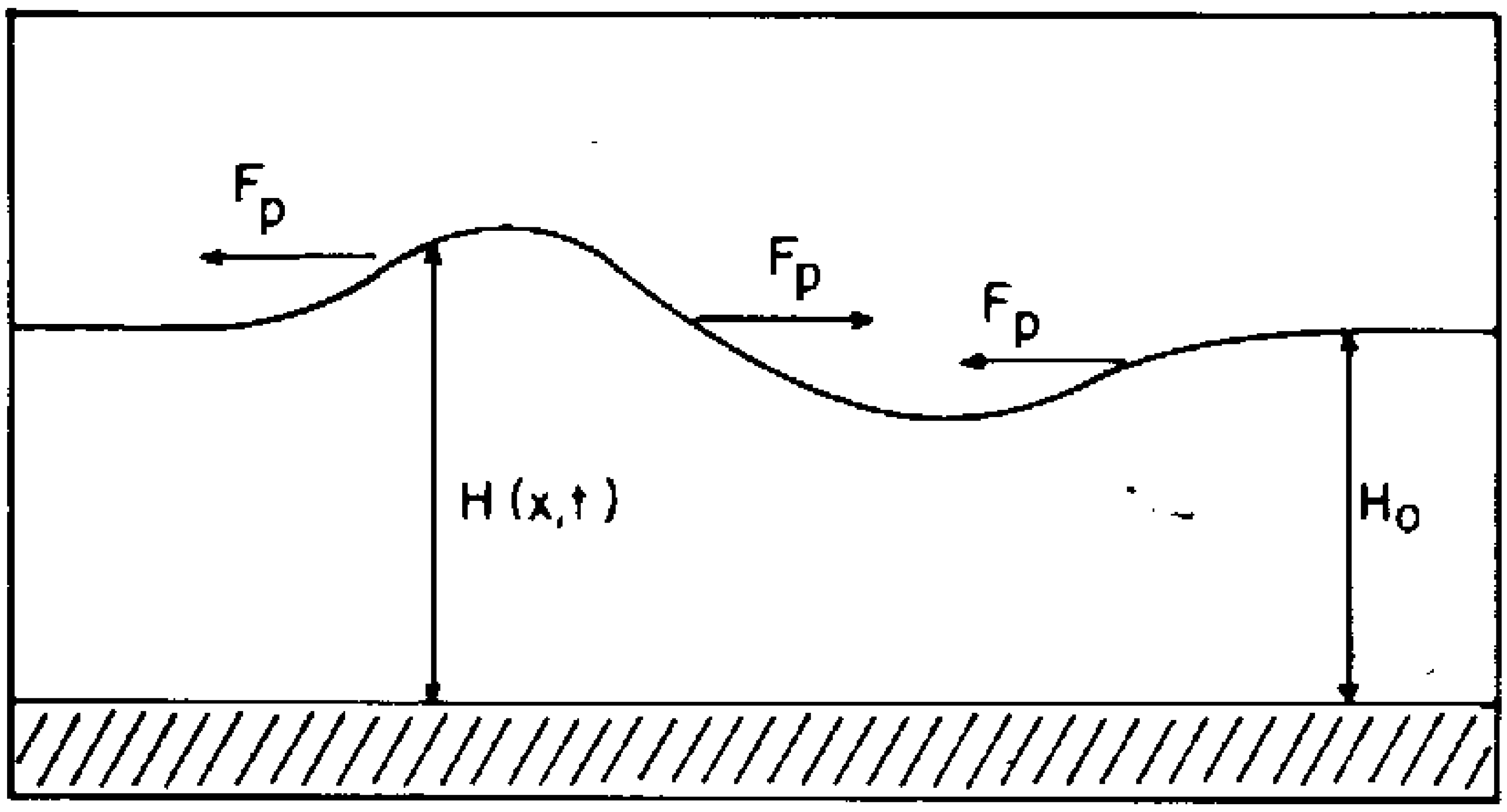

Fig. 1. Fuerza de presión que tienden a restituir la superficie libre a su forma original.

Estas fuerzas producen velocidades horizontales, cuya divergencia a su vez modifica a la altura de la superficie. El resultado final es que la perturbación original se divide en dos partes iguales que se propagan, sin cambiar forma, en ambas direcciones (fig.2).

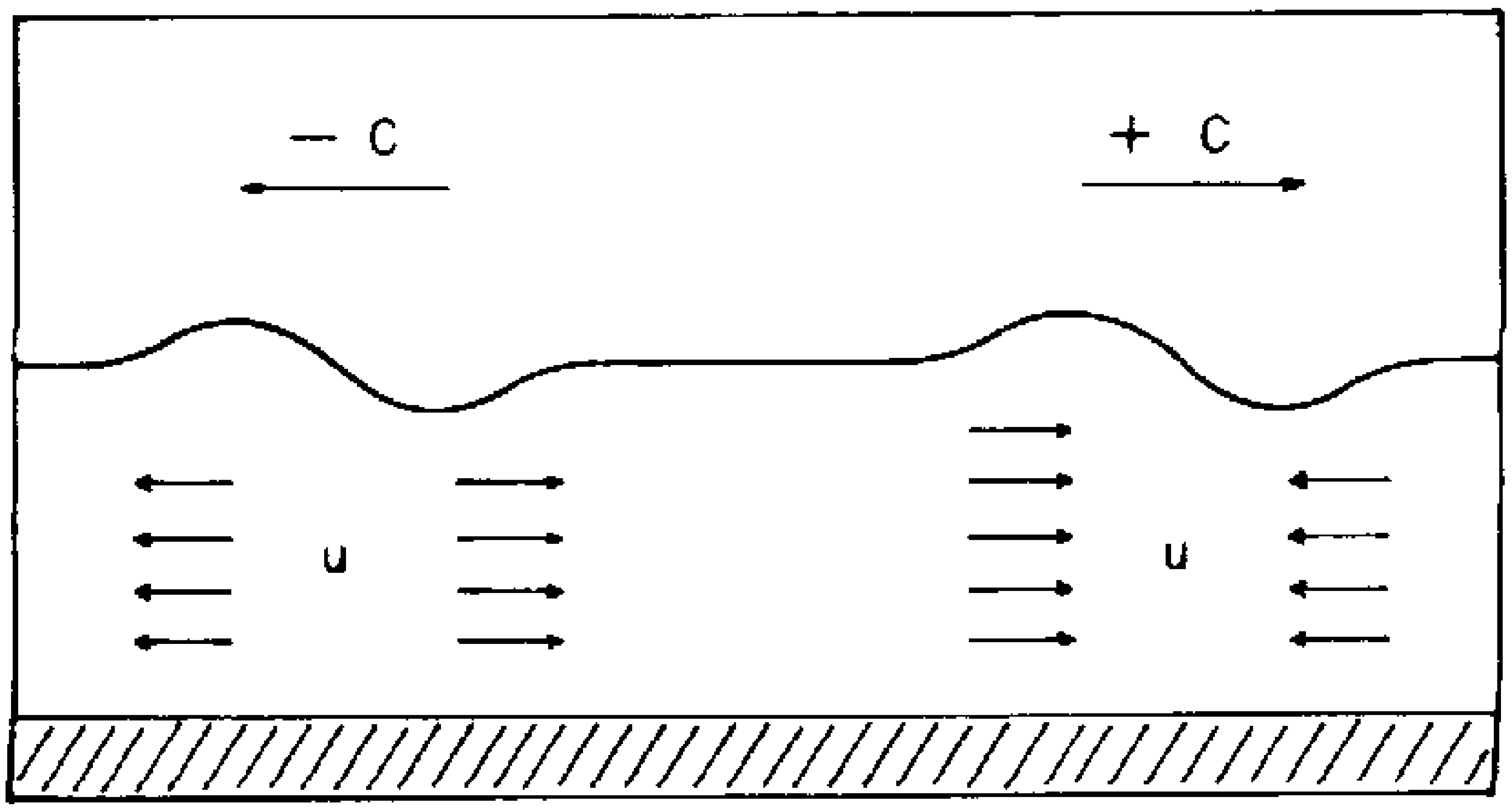

Fig. 2. Propagación de la perturbación inicial.

Esto se puede expresar matemáticamente en la forma

$$H(x,t) = \frac{1}{2} H(x\text{-}ct,0) + \frac{1}{2} H(x + ct,0), \qquad (1)$$

donde c y -c son las velocidades de fase de ambas señales.

La velocidad de las partículas, u, depende de la perturbación de la superficie y del sentido de propagación de la señal. Por ejemplo, en el punto medio de la señal de la izquierda (derecha) hay una divergencia (convergencia) de velocidad horizontal que tiende a bajar (subir) la superficie, causando efectivamente una traslación de la perturbación hacia la izquierda (derecha). Es decir que u es positivo (negativo) donde hay una elevación (depresión) de la superficie, para la señal que se propaga hacia la derecha; y tiene el signo opuesto para la otra señal. Por ejemplo, para el caso de la fig.2, el valor de u está dado por:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [H(x\text{-}ct,0) - H(x + ct,0)] c/H_o. \qquad (2)$$

La velocidad de fase está dada por $c^2=gH_o$, es decir, c=200m/seg. para una profundidad típica del océano. Este es un valor demasiado grande para el tipo de fenómenos que queremos describir (por ejemplo, a la señal le lleva solo unas 14 horas para recorrer 10.000km., el "ancho" del Pacífico). Sin embargo, el hecho de que el océano está estratificado hace que existan otros modos para la propagación de perturbaciones, con velocidades de fase mucho más inferiores. El modelo más sencillo que podemos utilizar (sacrificando detalle en pro de simplicidad) es uno de dos capas (fig.3) y tal que la capa superior (con densidad ρ_1) es mucho menos profunda que la capa inferior (con densidad $\rho_2 > \rho_1$).

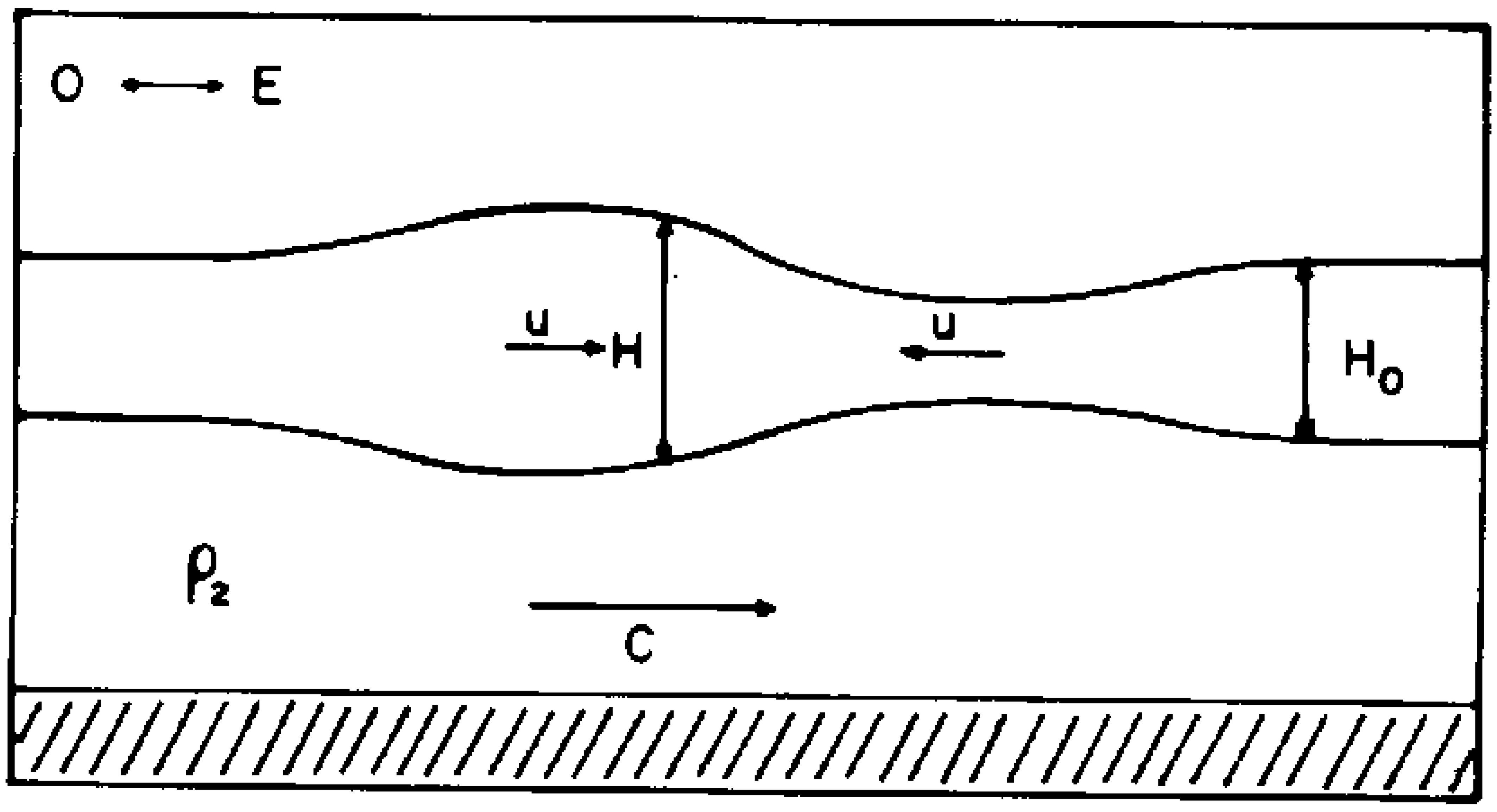

Fig. 3. Océano estratificado, modelo de dos capas.

Resulta que la dinámica de este modelo es muy similar a la del anterior, donde u y H son ahora la velocidad de partículas y profundidad de la capa superior; mientras que la capa inferior está prácticamente en reposo. Los cambios de H se deben fundamentalmente al desplazamiento de la interfase, ya que el desplazamiento de la superficie es igual al primero multiplicado por $-(\rho_2/\rho_1 -1)$, factor que tiene típicamente un valor entre -0,002 y -0,004. Es decir que si la interfase baja, digamos, unos 50 m, la superficie sube unos 10 a 20 cms.

El valor de la velocidad de fase está dado por

$$c^2 = g(1 - \rho_1/\rho_2)H_o, \quad (3)$$

que tiene normalmente un valor entre 1 y 2 m/seg.

Efectos de la rotación terrestre

Una persona parada sobre una plataforma giratoria que arroje un objeto, ve que la trayectoria de éste se curva hacia un lado (fig.4). Un observador que no esté subido a la plataforma, sin embargo, ve que el proyectil se mueve uniformemente en línea recta. Es decir que la curvatura de la trayectoria no es un fenómeno dinámico (debido a una fuerza real) sino un efecto geométrico de la descripción del movimiento desde un sistema no inercial (acelerado). El observador en la plataforma, sin embargo, atribuye la curvatura de la trayectoria a que la "fuerza" de Coriolis produce una aceleración, a, perpendicular a la velocidad, V.* De la figura 4, con t suficientemente pequeño, tenemos $\frac{1}{2}at^2=(Vt)(\omega t)$, es decir, $a=V2\omega$, donde ω es la velocidad angular de la plataforma. Más precisamente, la aceleración, velocidad y velocidad angular están representados por vectores (el último perpendicular y hacia afuera del plano de la fig.4) y la aceleración de Coriolis está dada por el producto vectorial.

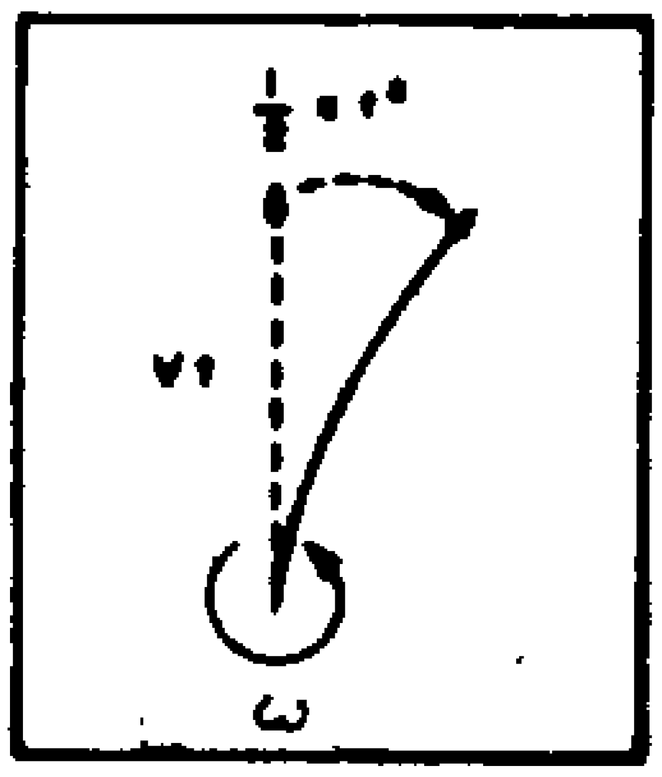

Fig. 4. Efecto de la rotación terrestre.

* Por ejemplo, desde nuestro punto de vista, el sol "gira" alrededor de la tierra con una aceleración *centrípeda* resultante de la "fuerza" *centrífuga* y la "fuerza" de Coriolis (dirigida hacia la tierra).

$$\vec{a} = \vec{V} \times 2\vec{\omega} \qquad (4)$$

En el caso de la tierra, ω tiene la dirección del eje de rotación, sentido hacia el Norte y magnitud igual a 1 cpd. Por otra parte, las velocidades $\vec{V}$ en el océano son prácticamente horizontales, y por lo tanto en la ecuación 4 sólo interesa el valor de la componente vertical (en una determinada latitud) de 2ω, cuyo valor es

$$f = 2 \text{ cpd sen(latitud)}, \qquad (5)$$

Por ejemplo, la frecuencia de precesión del péndulo de Foucault es igual a ½ f. Nótese que f (al que normalmente se llama parámetro de Coriolis) es positivo (negativo) en el hemisferio Norte (Sur).

Ondas de Kelvin.

Las ondas de Kelvin son perturbaciones de las isopicnas que se propagan, sin cambiar de forma, siempre en la misma dirección. Las corrientes asociadas con esta señal son paralelas a la dirección de propagación (es decir, son ondas longitudinales). En la dirección transversal hay, por lo tanto, un gradiente de presión, F, que equilibra a la "fuerza" de Coriolis, F (Balance geostrófico).

Una onda ecuatorial de Kelvin está centrada en el ecuador y se propaga hacia el este. El balance geostrófico está ilustrado en la fig. 5, para el caso de una estructura zonal como el de la fig.3.

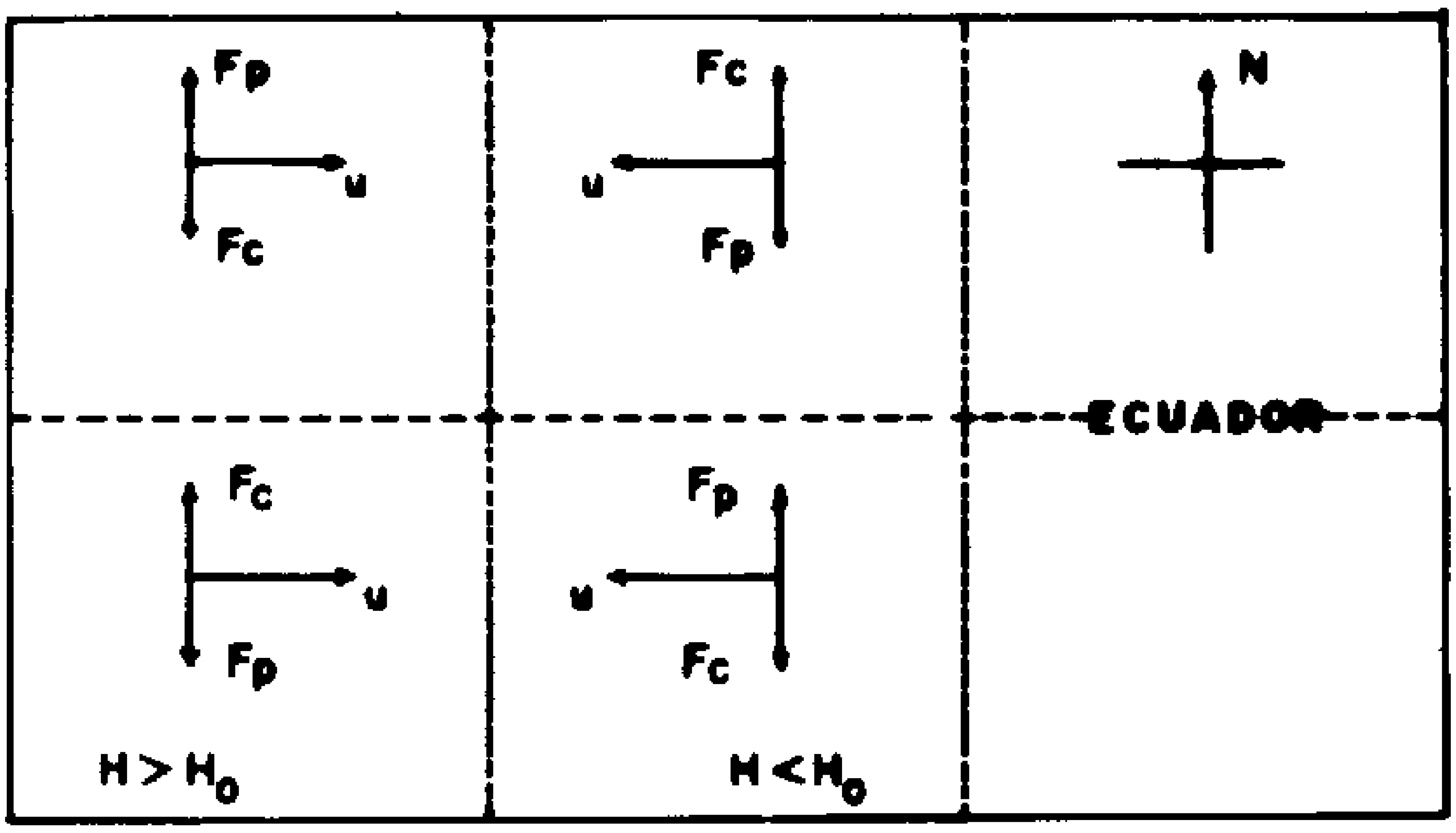

Fig. 5. Balance geostrófico de una onda ecuatorial de Kelvin centrada en el Ecuador.

En la parte de la izquierda (derecha) la capa superior es más ancha (angosta) que lo normal y la corriente u es por lo tanto positiva (negativa) de manera que la propagación de la señal sea hacia el este. La "fuerza" de Coriolis apunta, entonces hacia el (opuesta al) ecuador y, por consiguiente, el balance geostrófico requiere que H disminuya (aumente) al alejarse del ecuador. Es decir que, en ambas partes, H tiende al valor de equilibrio, H_0, a medida que crece la distancia al ecuador.

Una onda ecuatorial de Kelvin no puede propagarse hacia el oeste porque (haciendo el razonamiento del párrafo anterior, con u cambiado de signo) H no puede tender a H_o al aumentar la distancia al ecuador, sino que al contrario como veremos más adelante, el valor de H crece indefinidamente.*

Además de la propiedad particular de balance geostrófico, una onda de Kelvin satisface el principio, mucho más general, de conservación de vorticidad potencial (que es una ley exacta, dentro del contexto de la aporximación hidrostática). Este principio no es más que la constancia, para cada columna de agua, de la componente vertical del momento angular rèspecto de un sistema inercial.

El momento angular es igual al momento de inercia multiplicado por la velocidad angular. El primero, debido a que el volumen se conserva, es inversamente proporcional a la altura de la columna de agua. El segundo es igual a ½ f (que es la contribución de la tierra a la rotación alrededor de la vertical) más ½ de la vorticidad relativa (que es la rotación relativa a la tierra). Consecuentemente, la

$$\Omega = (f + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) /H, \tag{6}$$

vorticidad potencial es constante siguiendo una partícula. En pocas palabras, si una columna de agua se achica (agranda) y/o se mueve hacia el sur (norte), tiene que aumentar (disminuir) su vorticidad relativa.

Al escribir esta ecuación hemos utilizado un par de coordenadas cartesianas (con origen en algún punto del ecuador), llamando (x,y) y (u,v) a las componentes (en las direcciones hacia el este y hacia el norte) de los vectores posición y velocidad respectivamente. Es decir que despreciamos los efectos de la curvatura terrestre, salvo en lo que hace a la variación de f con la latitud (ecuación 5), la que a su vez podemos aproximar en la forma

$$f = \beta y, \tag{7}$$

donde $\beta \approx 01$ cpm/km. Esto es lo que se llama "aproximación de plano β".

En la ausencia de movimiento ($H=H_0$, $u=v=0$) la vorticidad potencial es solo función de la latitud, $\Omega = f/H_0$. Esta relación tiene que ser cierta también ante la presencia de cualquier onda de Kelvin, ya que esta última no produce desplazamientos meridionales (v=0) y cada partícula conserva su valor de Ω. Esta condición, junto con la definición (6) implican que

$$\frac{\partial u}{\partial y} + f (H/H_0 - 1) = 0. \tag{8}$$

Por otra parte, la condición de balance geostrófico puede ser escrita en la forma

$$fu + g (1- \rho_1/ \rho_2) \frac{\partial H}{\partial y} = 0. \tag{9}$$

Las dos últimas ecuaciones determinan la estructura meridional de cualquier onda de Kelvin, en la forma

$$\begin{aligned} u &= U (x,t) \exp (-½\beta\ y^2 /c,) \\ H &= H_0 (1 + u / c), \end{aligned} \tag{10}$$

con c dado por la ecuación (3).

---

* Hay otras ondas ecuatoriales, *casi* sin dispersión y casi en balance geostrófico que se propagan hacia el oeste (ondas planetarias o de Rossby). Sin embargo, el "casi" es aquí fundamental para lograr ese sentido de propagación.

De manera que la amplitud de una onda de Kelvin disminuye un 39% a una distancia del ecuador igual a $(c/\beta)^{1/2}$(a la que se llama "radio de deformación de Rossby") y un 63% a dos veces esa distancia. Un valor típico del radio de deformación de Rossby es entre 200 y 300 km.

Para terminar de caracterizar matemáticamente a una onda ecuatorial de Kelvin debemos encontrar la evolución de la amplitud U(x,t). Esto se puede hacer utilizando la ecuación de conservación de masa

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial (Hu)}{\partial x} = 0, \qquad (11)$$

reemplazando H por H_0 en el segundo término de esta ecuación (es decir suponiendo que $|u| \ll c$), lo que da como resultado

$$U(x,t) = U(x\text{-}ct,0), \qquad (12)$$

es decir que las ondas de Kelvin se propagan sin dispersión hacia el este, tal cual como fue anticipado.

Las expresiones (10) y (12) junto con la raiz positiva de (3) proveen la expresión general de una onda de Kelvin, para el modelo de la figura 3. Estas ecuaciones muestran también claramente que para una onda de Kelvin que se propague hacia el oeste (la que se obtiene con un valor negativo de c en 10 y 12) se llega al resultado absurdo que u y H divergen rápidamente con y^2.

Terminamos con algunas ideas para profundizar el tema de este artículo, para los lectores que tengan interés:

i) La estructura vertical del modelo de la figura 3 es claramente demasiado sencilla para dar una descripción detallada de fenómenos en el océano real. Con un modelo con más capas o, mejor todavía, con una variación gradual de la densidad con la profundidad se encuentra que existen diversos "modos verticales" para las perturbaciones (con varios cambios de signo de u en la vertical). También existen ondas de Kelvin para estos modos, cuya única diferencia con la aquí descrita (aparte de la estructura vertical) está en el valor de c (que es menor para cada modo sucesivo).

ii) Es común tomar a f como constante para ciertos problemas en latitudes medias (en realidad, a varios radios de deformación de distancia del ecuador); esto es lo que se llama "aproximación de plano f". En este caso las ecuaciones 8, 9 y 11 tienen también solución de ondas de Kelvin, si existe una costa (la dirección x es a lo largo de la costa) que mantiene el gradiente de presión. ¿Puede obtener el equivalente de la ecuación 10 para este caso?.

iii) Para poder obtener la ecuación 12 tuvimos que "hacer trampa" al linearizar a la ecuación 11, bajo la suposición de que la amplitud de la onda es suficientemente pequeña ($H \sim H_0$ y $|u| \ll c$). En realidad, es fácil ver que 8 y 9 (que fueron obtenidos bajo la condición $v \simeq 0$) no son estrictamente compatibles con 11, si se incluyen los términos no lineales. Esto nos lleva al fascinante mundo de las interacciones no lineales entre ondas oceánicas que, en algunos casos sirve para justificar las aproximaciones de la teoría lineal pero que en muchos otros predice la existencia de nuevos fenómenos. Este autor va a publicar un artículo sobre este tema proximamente.

AGRADECIMIENTO

Quiero aprovechar esta oportunidad para agradecer la hospitalidad del INOCAR, quien me invitó a dar una Conferencia sobre el tema de este artículo.