

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Análise não linear geométrica de estruturas reticuladas espaciais

João José Guerra Martins

(Licenciado em Ciências Militares na especialidade de Engenharia pela Academia Militar)

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do grau de mestre em
Estruturas de Engenharia Civil

Realizada sob supervisão de:

Professor Catedrático Joaquim Azevedo Figueiras, do Departamento de Estruturas da
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Professor Associado Convidado José A. F. Mota Freitas, do Departamento de Estruturas da
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Porto, Setembro de 1997

Agradecimentos

Tem as próximas linhas o simples mas sincero intuito de agradecer a quantos tornaram possível efectuar este trabalho e dos quais esquecer-me seria uma profunda injustiça:

- À Instituição Militar e dentro desta, com relevo, ao Ex.^{mo} Senhor General Frutuoso Pires Mateus, ao Ex.^{mo} Senhor Coronel de Engenharia Augusto Branquinho Ruivo e ao Ex.^{mo} Senhor Coronel de Engenharia Sérgio Lima Bacelar, cuja iniciativa e apoio se mostrou absolutamente determinante.
- Aos coordenadores deste trabalho, o Ex.^{mo} Senhor Professor Catedrático Joaquim Azevedo Figueiras e o Ex.^{mo} Senhor Professor Associado Convidado José Mota Freitas, pela sua inexcedível disponibilidade e o seu muito saber.
- Aos camaradas, colegas, amigos e todas as pessoas que de forma directa ou indirecta tiveram um contributo efectivo ou uma palavra de incentivo e que pelo seu elevado número não refiro com receio de omitir algum.
- À minha família em geral e, sobretudo, à Dalila e ao João dos quais privei, demasiadamente, da minha presença.

A todos o meu muito obrigado.

Resumo

Pretende este trabalho apresentar um estudo sobre a não linearidade geométrica de estruturas reticuladas espaciais, com base em alguns dos vários métodos que foram sendo desenvolvidos nos últimos trinta anos, designadamente, quanto à sua formulação matricial e procedimentos incrementais e iterativos.

Visa-se, desta forma, estabelecer as técnicas de cálculo mais representativas, nomeadamente, no que concerne à obtenção de deslocamentos e esforços de dimensionamento.

Uma breve comparação será efectuada entre as teorias abordadas.

Em complemento, a instabilidade elástica de estruturas também é trazida à discussão, através da enunciação e apreciação de alguns processos de previsão de cargas críticas, sua utilidade e alcance.

Procurar-se ainda estabelecer:

- Comparação directa da nitidez e grandeza da diferença que podem atingir os resultados entre a análise linear e não linear geométrica;
- Influência da divisão das barras em mais de um elemento, tanto para a análise não linear geométrica de deslocamentos e esforços como para o estudo da instabilidade de uma estrutura;
- Confrontação dos resultados obtidos com ou sem actualização de geometria;
- Aparecimento dos efeitos consequentes à sensibilidade da estrutura e do seu carregamento aos momentos induzidos;
- Realidade dos movimentos de corpo rígido nos deslocamentos não lineares e consequente eventual necessidade da sua eliminação na obtenção de esforços;
- Importância da análise espacial da instabilidade em detrimento da plana;
- Utilidade no conhecimento dos coeficientes complementares de encurvadura.

Abstract

The purpose of this work it's to present a study about the no linear geometrical effects in structures of space frame type, in base on some of the methods that as been development in the last thirty years, in respect of its matrices formulations and incremental and iterative proceedings.

We will try, by this way, to establish the computation techniques of the most representative methods, in particular, in what concern to the calculations of displacements and the internal forces.

A short comparison will be made among the presented theories.

In addition, the elastic instability of space frames also will be brought to discussion, through the enunciation and appreciation of some processes of prediction of critical loads, its utility and domain.

We will also try to establish:

- A direct comparison of the clarity and the dimension of the difference of the results that it can be afforded between the linear and no linear geometric analysis;
- Influence of the division of the bars in more than one element, so applied to the no linear geometric as to the buckling analysis of structures;
- Confrontation of the obtained results with or without geometric actualisation;
- Appearance of the effects and its consequences caused by the sensibility of the structure and its charges to the induced moments;
- Reality of the rigid body movements in no linear displacements and the sequential eventual necessity of its elimination to obtain good internal forces results;
- The importance of instability space analysis in place of a planar one;
- Utility on the knowledge of the buckling complement coefficients.

Résumé

L'objectif de cette thèse il est présenter un étude sur la non lineairité géométrique des ossatures réticulées spatiales, s'appuyant plusieurs travaux que a été développés dans les derniers trente ans, spécialement, quant à sa formulation matriciels et procès incrémentiel et itératifs.

Dans cette façon, nous désirons établir les techniques de calcul plus représentatives, nommément, en ce qui se rapporte à obtention des déplacements et efforts de dimensionnement.

Une brève comparaison sera effectuée parmi les théories abordées.

Complémentairement, l'instabilité élastique entre aussi dans la discussion, en travers le listage et présentation de quelques méthodes de prévision de charges critiques, sa utilité et atteint.

Nous chercherons ainsi établir:

- La comparaison directe de la netteté et grandeur des différences qui peuvent atteindre les résultats entre l'analyse au premier et second ordre.
- L'influence de la division des barres en plus qu'un élément, tant pour l'analyse au second ordre des déplacements et efforts que pour l'étude de l'instabilité d'une ossature.
- La confrontation des résultats obtenus avec ou sans actualisation de géométrie.
- L'apparition des effets conséquents à sensibilité de la ossature et son chargement aux moments induits.
- La réalité des mouvements de corps rigide dans les déplacements du second ordre et la conséquent éventuel nécessité de sa élimination dans l'obtention d'efforts.
- L'importance de l'analyse spatiale de l'instabilité au détriment de la plane.
- L'utilité dans la connaissance des coefficients complémentaires de flambement.

Simbologia

[] – Referência bibliográfica.

() – Referência a fórmula ou expressão matemática.

[] – Matriz.

[]^T – Matriz transposta.

[I] – Matriz identidade.

[0] – Matriz nula.

{ } – Vector.

{ }^T – Vector transposto.

{0} – Vector nulo.

{1} – Vector com todas as componentes unitárias.

F_X – Força (axial) segundo X em eixos gerais.

F_Y – Força (transversal) segundo Y em eixos gerais.

F_Z – Força (transversal) segundo Z em eixos gerais.

F_x – Força (axial) segundo x em eixos locais.

F_y – Força (transversal) segundo y em eixos locais.

F_z – Força (transversal) segundo z em eixos locais.

M_x – Momento torsor x em eixos locais.

M_y – Momento flector y em eixos locais.

M_z – Momento flector z em eixos locais.

I_x - Inércia de torção.

I_y – Momento de inércia segundo eixos locais y da secção.

I_z – Momento de inércia segundo eixos locais z da secção.

A – Área total da secção.

A' – Área de corte da secção.

W_i^j - Índice i e j relativos ao número do incremento ou iteração, sendo:

i – Índice relativo ao número do incremento, com posição inferior à linha.

j – Índice relativo ao número da iteração, com posição superior à linha.

[K] – Matriz de rigidez.

[K_T] – Matriz de rigidez tangente ou, simplesmente, matriz de rigidez.

[K_L] – Matriz de rigidez linear ou, simplesmente, matriz linear.

$[K_G]$ – Matriz de rigidez geométrica ou, simplesmente, matriz geométrica.

$[K_C]$ – Matriz de rigidez de carga (Petr Kryl).

$[K_I]$ – Matriz dos momentos induzidos (Yang & Kuo).

$[K_J]$ – Matriz dos momentos nodais (Yang & Kuo).

$[K_M]$ – Matriz dos momentos exteriores aplicados nos nós (Yang & Kuo).

$[T]$ – Matriz de rotação ou transformação.

$\{P\}$ – Vector das cargas totais, conjunto das cargas directas nos nós e das aplicadas nas barras.

$\{R\}$ – Vector das forças desequilibradas ou resíduos.

$\{F\}$ – Vector das forças nodais equivalentes ou forças instaladas nos nós da estrutura ou esforços nas barras projectados nos nós.

$\{E\}$ – Vector das forças instaladas nas barras da estrutura ou esforços nas barras em eixos locais.

$\{U\}$ – Vector dos deslocamentos nodais (totais), devidos a $\{P\}$.

$\{V\}$ – Vector dos deslocamentos nodais, devidos a $\{F\}$.

$\{X\}$ – Vector dos deslocamentos nodais, devidos a $\{R\}$.

L, M, N – Co-senos directores de um eixo definido no espaço.

C, S – Co-senos e seno de um ângulo.

$\{\phi\}$ – Vector de modo de encurvadura (deslocamentos na configuração de instabilidade).

δ – Acréscimo, variação ou tolerância.

Δ – Acréscimo ou variação.

Λ – Acréscimo ou variação.

α – Ângulo.

$\{\hat{u}\}$ – Vector genérico auxiliar, como de deslocamentos ou outro.

$\{u\}$ – Vector genérico auxiliar, como de deslocamentos ou outro.

1. INTRODUÇÃO

1.1. Tema

Concebida a geometria da estrutura e das suas secções, bem como determinadas as prováveis solicitações actuantes em serviço e à rotura, é objecto da análise de estruturas a determinação das correspondentes deformações e tensões ou deslocamentos e esforços. Com base nestes resultados, podemos ajuizar se os pressupostos iniciais que foram fixados satisfazem os propósitos em mente, ou seja: se a solução actual preenche os requisitos de resistência e utilização tidos por exigíveis, segundo uma perspectiva que estabeleça um sensato compromisso entre a segurança e a economia.

Permanece ainda nos nossos dias a análise elástica e linear como suporte doutrinário de cálculo no exercício da actividade profissional do engenheiro de estruturas, muito embora os novos regulamentos publicados [23] abram outros horizontes.

Ora, uma das deficiências desta análise é a sua inaptidão para reflectir o real comportamento de estruturas menos comuns ou sob condições de carregamento não ordinárias ou, ainda, perto do colapso. Não se trata de uma situação tão extraordinária como poderá parecer, uma vez que quase todas as estruturas se comportam de forma não linear quando se aproximam dos seus limites de resistência, muito embora se tenha a consciência de não se pretender levar tão longe o seu nível de aproveitamento em situações práticas da construção. Daí que os próprios regulamentos da década anterior, e que já se baseavam no conceito de estados limites, incorporavam de maneira implícita, processos de contabilização de comportamento não linear. Hoje, são esses próprios códigos que incitam à adopção de análises mais exactas em prejuízo de procedimentos mais simplificados com a grande vantagem de um maior rigor e eficiência.

Temas específicos existem em que é imperioso o uso de técnicas não lineares, como é o caso do desenvolvimento de materiais de elevada resistência, em que se torna obrigatório o escrupuloso aproveitamento das suas capacidades. Caem nesta área de estudo a engenharia aeroespacial, a engenharia mecânica, a construção de edifícios de grande altura e pontes de elevado vão, sendo nestes últimos casos o peso próprio da estrutura determinante nas condicionantes do seu projecto. Mas não seja esta descrição illusória, pois, estruturas de muito

pequeno porte podem, pela sua particular configuração e solicitação, ter um desempenho altamente não linear.

Existem dois tipos principais de não linearidade: a material e a geométrica.

A primeira diz respeito às mudanças na resposta física dos materiais, nomeadamente, à distribuição das tensões ao longo da extensão de uma barra, bem como ao longo dos eixos e das faces das suas próprias secções. A variação das leis constitutivas que governam o comportamento não linear material tem como inconveniente o facto das equações de equilíbrio terem que ser determinadas para estruturas cujas propriedades físicas dependem da tensão, existindo o problema de não poderem ser estas conhecidas, antecipadamente. Neste trabalho será admitido apenas um comportamento linear material.

A segunda, também conhecida, em estruturas correntes, por efeitos de segunda ordem, é produzida por deformações finitas acompanhadas de alterações da rigidez da estrutura em sequência das cargas aplicadas.

Este trabalho refere-se, pois, exclusivamente, à análise deste último caso.

Neste contexto, visa este trabalho não só a comparação e discussão de diversas formulações que nos últimos trinta anos foram sendo desenvolvidas ou melhoradas, como, e sobretudo, a enunciação de procedimentos de cálculo coerentes e transparentes no que ao estudo da não linearidade geométrica de estruturas reticuladas espaciais diz respeito, designadamente, nas suas vertentes de obtenção de deslocamentos e esforços de dimensionamento, bem como a previsão de cargas críticas elásticas.

Outra discussão que se pretende aflorar, sem se efectuar o seu estudo exaustivo, corresponde à situação em que o valor dos deslocamentos se torna de tal modo apreciável que se afigura negligente uma análise mais simplista. Esclareça-se que *simplista* aqui não se refere, propriamente ou somente, à formulação matricial (como, por exemplo, a não utilização de elementos diferenciais de ordem superior na matriz geométrica), mas a outros importantes pormenores que vão desde a escolha dos processos de cálculo (como, por exemplo, o método de iteração directa, o método de Newton-Raphson, etc.) à simples decisão de efectuar ou não a actualização de geometria e dentro desta com que profundidade.

Como se vai poder constatar, o domínio da análise não linear permanece um tema em aberto em que o volume, a vivacidade e a riqueza da discussão está longe de atingir consenso e as certezas ainda são poucas.

1.2. Breve referência histórica

A título não só de curiosidade, mas também de enquadramento desta temática, segue-se uma pequena resenha histórica sobre a análise não linear de estruturas e, mais particularmente, da análise da encurvadura em pilares [26].

A investigação nesta área da Engenharia de Estruturas soma já 253 anos, se fixarmos como ponto de partida os estudos de Euler (cuja fórmula permanece válida e de comum utilização nos casos em que se mostra aplicável).

Decorria o ano de 1678 quando Robert Hooke lançava os conceitos preliminares para o desenvolvimento da teoria da estabilidade elástica, estabelecendo que a deformação de qualquer mola era proporcional à força que a causava.

Um segundo passo foi dado por Jacob Bernoulli, em 1705, que estudou a flexão e a curvatura de uma viga em consola. Baseando-se na Lei de Hooke, afirmou que a curvatura de qualquer ponto era proporcional ao momento aí instalado.

Leonard Euler (1707-1863), discípulo de um irmão de Jacob, John Bernoulli (1667-1748), alicerçando-se em métodos variacionais deduziu a fórmula para colunas que conserva o seu nome¹: carga crítica de Euler.

Mariotte (1620-1684) efectuou várias experiências em vigas em consola em 1680, tendo sido o primeiro a reconhecer que para uma carga vertical descendente as fibras do topo sofriam uma extensão e as inferiores uma contracção.

Leibniz, em 1713, confirmou a correcção das conclusões de Mariotte e recomendou a aplicação da Lei de Hooke ao problema.

Em 1773, 39 anos após o aparecimento desta lei, Coulomb (1736-1806) aplicou-a correctamente, bem como o fez com a equação de equilíbrio estático para o desenvolvimento dessa fórmula, relacionando o momento flector com a tensão axial devida à flexão numa viga em consola. A deformação por esforço transversal era negligenciada por Coulomb, tendo uma teoria mais completa sido, posteriormente, trabalhada por Navier e St.Venant.

A fórmula de Euler permaneceria em discussão até ao início deste século (1905 - Johnson, Byran & Turneasure) só se começando a assimilar os casos em que resultava a sua

¹ Será Euler o mais profícuo matemático de todos os tempos, contendo a sua biografia científica um

validade nos meados do século passado. Refiram-se as 32 colunas ensaiadas por Considère em 1889, a partir da observação das quais este revelou por que razão a fórmula de Euler nunca tinha sido muito útil aos engenheiros projectistas. Concluiu este investigador que a instabilidade ocorria abaixo do limite de proporcionalidade do módulo de elasticidade, devendo este, por conseguinte, ser substituído na fórmula de Euler por um módulo de elasticidade efectivo: E_{ef}^2 .

Era o despertar para a realidade da instabilidade inelástica, não existindo ainda um conhecimento capaz das relações entre as deformações, as tensões, as curvaturas e os momentos no domínio do não elástico.

Engesser (1889) sugeriu que bastaria no estudo da resistência da coluna no domínio do não elástico se substituísse o módulo de elasticidade convencional pelo tangente.

Em 1910, Theodor von Kármán deduziu expressões explícitas para o “módulo reduzido” em secções rectangulares e perfis em “I” e “H”, mas foi só em 1947 que Shanley de novo redefiniu este conceito como módulo tangente, com a seguinte redacção: «A carga correlativa ao módulo tangente é a que corresponde ao menor valor que esta pode tomar para se dar a bifurcação de equilíbrio, quer esta transição para a posição deformada ocorra ou não por acréscimo de carga axial». Shanley corrobora, pois, o preceito que Engesser 57 anos antes tinha enunciado. Osgood diria, em 1951, que esta teoria designada por “Engesser-Shanley” mereceria uma referência histórica comparável à da contribuição de Euler.

Duberg e Wilder que, em 1950, analisaram a evolução da variação inelástica ao longo da extensão total de uma coluna, poriam esta concepção de Shanley do seguinte modo: «Se o comportamento de uma coluna perfeitamente recta é visto como o comportamento de uma coluna teórica equivalente sem quaisquer imperfeições iniciais, então, a carga correspondente ao módulo tangente é a carga crítica da coluna, isto é, a carga iniciadora da flexão».

Teriam sido estes alguns dos últimos grandes axiomas precursores da análise não linear de colunas dos nossos tempos que, como se vê, tem menos de 50 anos.

Não se pretende, com esta breve descrição, indexar ou limitar a análise não linear ao estudo de elementos verticais solicitados axialmente, muito embora sejam estas as peças mais sensíveis a tais questões. Outros tipos de instabilidade podem ser determinantes na análise de

impressionante número superior a 866 entradas.

² Este módulo efectivo E_{ef} deveria ter um valor entre o módulo de elasticidade clássico E e o tangente E_t .

estruturas e em distintos tipos de componentes estruturais, como é o caso do bambeamento em vigas e o enfunamento em chapas.

Sobre toda esta múltipla envolvente, em 1969, Graham Powell publicava um artigo [39] em que referia “que apesar dos recentes estudos realizados, não existe ainda uma consistente formulação teórica do problema”. Nos nossos dias, não estando esta questão categoricamente sanada, parecem identificadas e solidificadas várias teorias de análise não linear de estruturas, idealizadas e interpretadas como sistemas, teoricamente, exactos em termos geométricos e materiais. Contudo, idênticas preocupações às de há mais de um século surgem ao procurar simular-se a realidade ligada à sua execução prática e dos seus materiais constituintes, ou seja: a passagem dos modelos teóricos perfeitos para a realidade dos ensaios e, sobretudo, para o dia-a-dia da construção.

Assumindo por ultrapassado o problema da garantia de qualidade dos materiais e o rigor das secções das peças pré-fabricadas (como os perfis metálicos, obrigados a processos de homologação e ainda sujeitos a coeficientes de segurança que reduzem os seus valores resistentes), há que ter em consideração deficiências óbvias da montagem em obra, onde não se consegue assegurar a perfeição absoluta no fabrico dos elementos estruturais. Assim, podemos dizer que se procura hoje contabilizar, ainda que de forma necessariamente aproximada, mas com o rigor de base científica e estatística, alguns dos efeitos não previstos nas teorias clássicas.

Sendo essas condicionantes de vária natureza, enumeram-se algumas, ficando-se aquém de uma listagem completa:

- Imperfeições geométricas iniciais;
- Deformações decorridas no tempo de vida da estrutura (devidas a fenómenos reológicos, a excesso de carga em serviço e outras das quais resultem tensões e deformações residuais permanentes);
- Fadiga dos materiais, por efeito de ciclos de carga e descarga, com eventual conexão a fenómenos de histerese;
- Alteração das condições de ligação dos elementos estruturais ou do comportamento das fundações.

Naturalmente, nem todos estes fenómenos são passíveis de ser contabilizados ou previstos, no entanto, e concentrando-nos na actualidade, o primeiro dos citados é já alvo de

imposição regulamentar [23] na prática do projecto.

Concluindo este sucinto relato, podemos dizer que a análise não linear geométrica de estruturas reticuladas espaciais, cuja problemática se pretende abordar, é um tema de actualidade que continua a necessitar de discussão e desenvolvimento.

1.3. Definição do problema

Ficou, pois, segura e claramente, já estabelecido ser a temática deste trabalho a análise não linear geométrica de estruturas reticuladas tridimensionais, cabendo agora definir o conjunto de conceitos básicos do problema para se poder vir a fixar os objectivos a atingir.

De uma forma preliminar, estamos em condições de afirmar que com a análise não linear geométrica se pretende aferir e determinar o agravamento nas deformações e, consequentemente, nos esforços que uma estrutura sofre ao longo do seu processo de carregamento. Quer sejam esses acréscimos nos esforços resultado directo das novas e sucessivas excentricidades criadas pelos movimentos próprios da estrutura em deformação ou pela alteração da rigidez gerada pelo significativo valor que as forças internas venham a assumir, estamos, em qualquer dos casos, perante fenómenos que podemos considerar de efeitos de segunda ordem ou de não linearidade geométrica.

Vários factores concorrem para o desenvolvimento destes comportamentos não lineares e pela sua maior participação no fenómeno destacam-se:

- Geometria global da estrutura;
- Geometria dos elementos da estrutura e das suas secções;
- Condições de apoio (ligações ao exterior);
- Condições de continuidade dos elementos (ligações interiores);
- Propriedades dos materiais.

Ilustram-se, seguidamente, alguns dos processos de deformação não linear que uma estrutura pode sofrer, devendo ainda em certos casos falar-se de instabilidade, desde que em qualquer momento tenha existido uma perda de equilíbrio [15,16,45].

Dos comportamentos a apresentar todos terão cabimento no âmbito deste trabalho, enquanto situados dentro do campo das estruturas reticuladas planas ou espaciais³,

³ Falar de estruturas espaciais ou tridimensionais é referirmos, intrinsecamente e por inclusão, estruturas planas.

procurando-se encontrar a solução para o seu deslize e análise.

a) Caso normal

É aquele que ocorre na generalidade das estruturas construídas, em que a solicitação a que estão sujeitas leva a alguma perda na sua rigidez e ao aumento moderado da sua deformação que, podendo ser mais ou menos acentuada, nunca deve atingir valores que comprometam a sua utilização. Queremos com isto dizer que, muito embora não se mantenha linear a relação entre cargas e deslocamentos, existirá sempre entre estes uma relação de univocidade (fig.1.1).

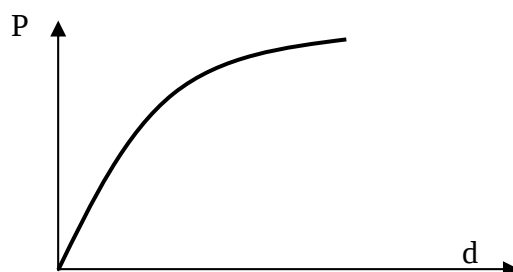


Figura 1.1: Curva carga-deslocamento num caso normal.

Nestes casos nunca se chega a atingir uma situação de instabilidade estrutural sem cedência significativa dos materiais constituintes.

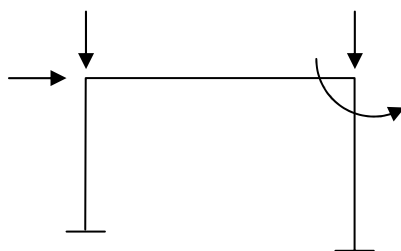


Figura 1.2: Exemplo de um caso normal.

b) Inflexão da trajectória de equilíbrio

Embora nestes casos não exista, propriamente, uma perda de equilíbrio, falamos de instabilidade pelo facto da rigidez da estrutura apresentar um valor mínimo numa fase intermédia do processo (fig.1.3).

Conforme se poderá avaliar por comparação, é uma situação particular de um caso de inversão de equilíbrio com descontinuidade (“snap-through”), existindo, em ambos os casos,

uma fase de amaciamento e outra de endurecimento da rigidez da estrutura⁴.

Esta mudança entre as fases de amaciamento e endurecimento é caracterizada por um ponto de inflexão, daí a designação do próprio fenómeno.

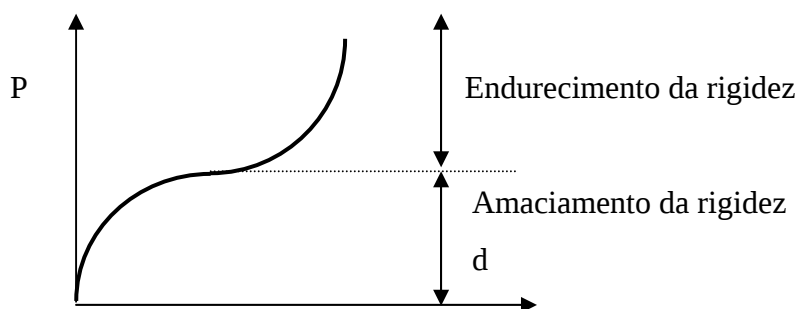


Figura 1.3: Curva carga-deslocamento num caso de inflexão da trajectória de equilíbrio.

O exemplo que se ilustra, como representação de um comportamento deste tipo, consiste numa estrutura formada por dois elementos que formam um vértice ao qual é aplicada uma carga vertical descendente (fig.1.4). Uma vez que um dos apoios é elástico, a passagem da situação inicial de compressão e amaciamento para a final de endurecimento e tracção é realizada suavemente e sem descontinuidade (snap-through), ou seja, limita-se este caso a uma inflexão na trajectória da relação carga-deslocamento.

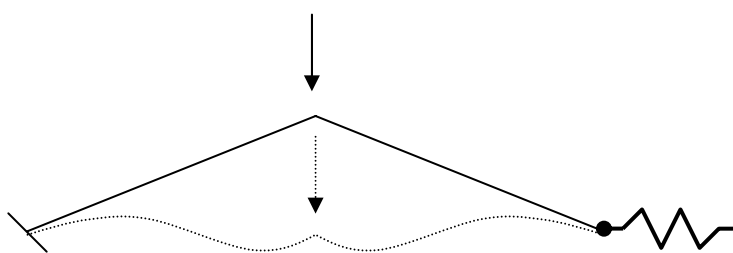


Figura 1.4: Exemplo de um caso de inflexão da trajectória de equilíbrio.

c) Bifurcação de equilíbrio

Numa fase inicial, que pode atingir um avançado nível de carregamento, a estrutura tem um comportamento essencialmente linear, até atingir um ponto a partir do qual entra em

⁴ Não se trata aqui de situações, propriamente ditas, de não linearidade material em que na literatura anglo-

ampla não linearidade.

O nome bifurcação surge aqui ligado à possibilidade de existirem duas trajectórias que passem pelo mesmo estado de equilíbrio, a partir do qual estas se tornam instáveis (fig.1.5). É uma situação em que deixa de haver univocidade entre carga e deslocamento no seu ponto de aplicação.

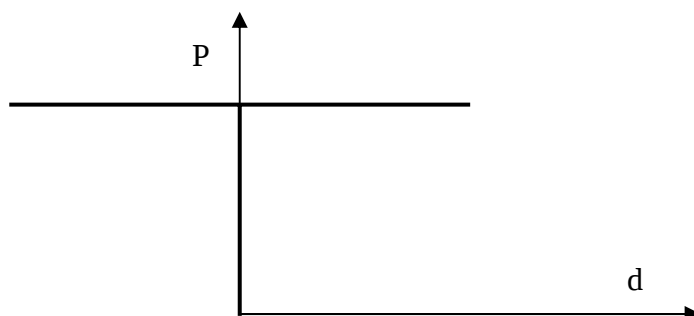


Figura 1.5: Curva carga-deslocamento num caso de bifurcação de equilíbrio.

Como exemplo, admita-se uma coluna geometricamente perfeita em consola vertical solicitada por uma força descendente de valor crescente (fig.1.6). A partir de um certo nível de carregamento, e de forma brusca, esta estrutura perde o seu equilíbrio não se conseguindo estabelecer qual a forma que a sua configuração deformada assumirá. Ilustra-se este fenómeno para o caso plano (fig.1.6) onde apenas duas situações são possíveis (se do espaço se tratasse, esse número tornar-se-ia infinito).

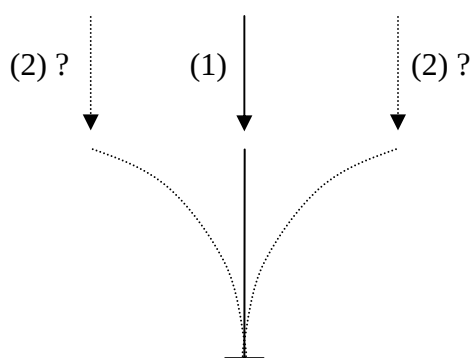


Figura 1.6: Exemplo de um caso de bifurcação de equilíbrio.

saxónica o amaciamento aparece ligado ao “softenning” e o endurecimento com o “stiffenning”.

d) Inversão de equilíbrio com descontinuidade (“snap-through” e “snap-back”)

É uma situação semelhante à da inflexão da trajectória de equilíbrio, só que aqui esse ponto notável não é de mínimo mas de máximo relativo na escala de carregamento. Ou seja, os efeitos de não linearidade, acompanhados de uma diminuição da rigidez, vão-se acentuando com o aumento de carga, prosseguindo isto até que a trajectória alcança um ponto de máximo, onde a rigidez se anula e a estrutura se torna instável. É então procurada uma nova configuração de estabilidade e a estrutura vê o seu equilíbrio restituído, após o aumento brusco de deformação (fig.1.7).

A energia potencial assim libertada está associada a um fenómeno fortemente dinâmico que acompanha a variação profunda sofrida pela geometria da estrutura.

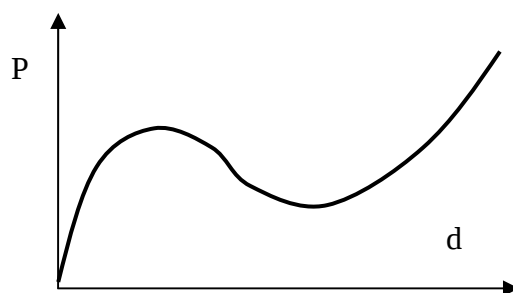


Figura 1.7: Carga-deslocamento com inversão de equilíbrio com descontinuidade tipo “snap-through”.

À semelhança do modelo apresentado no caso de inflexão da trajectória de equilíbrio, a estrutura que serve de exemplo também é composta por dois elementos que formam um vértice e no qual é aplicada uma carga vertical descendente (fig.1.8). Contudo, neste caso, retirou-se o apoio elástico, sendo a estrutura conduzida a uma situação de concentração de energia que determina o comportamento acima descrito (snap-through).

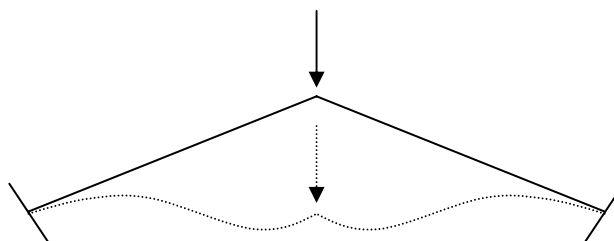


Figura 1.8: Exemplo de inversão de equilíbrio com descontinuidade do tipo “snap-through”.

Diga-se que não há qualquer obrigatoriedade na presença ou ausência desse apoio elástico para que um ou o outro fenómeno tenham lugar. Na verdade, tanto uma barra

ordinária como um dispositivo de mola tem uma rigidez própria que, essa sim, vai estabelecer a atitude do sistema. Daí que o importante esteja, sem dúvida, na rigidez das próprias barras, tendo servido a inclusão da mola apenas como ajuda na compreensão da diversidade destas manifestações.

Um caso análogo, mas em que se verifica adicionalmente uma diminuição transitória em termos de deslocamento é designado por “snap-back” (fig.1.9).

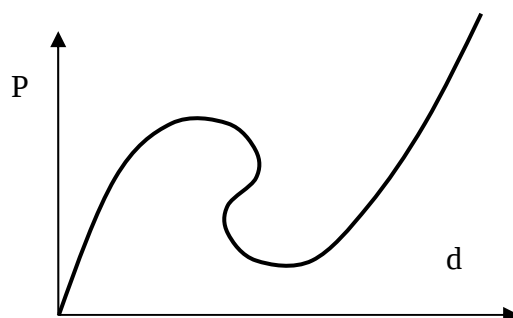


Figura 1.9: Curva carga-deslocamento com inversão de equilíbrio com descontinuidade tipo “snap-back”.

Na figura 1.10 espelha-se um caso para o qual este fenómeno pode ter lugar.

Trata-se de uma estrutura flexível que sujeita a uma carga crescente vê a sua geometria passar por várias fases ao longo do seu processo de deformação. Concentrando-nos no que se passa no ponto i , constatamos que este sofre, em virtude desse carregamento, um percurso em que a direcção do seu deslocamento passa por uma inversão do mesmo durante uma fase transitória da sua deformação ((1) $\rightarrow$ (2)), após o que regressa ao sentido inicial ((2) $\rightarrow$ (3)).

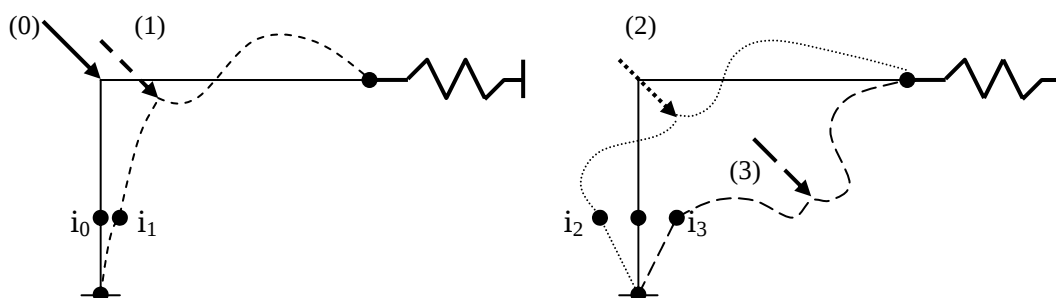


Figura 1.10: Exemplo de inversão de equilíbrio com descontinuidade do tipo “snap-back” (no ponto i).

Registe-se que, como noção teórica muito importante e tanto relativa a este caso como a outros, nunca será o valor absoluto desta carga-tipo que fará variar o aspecto desta curva

carga-deslocamento. Ou seja: entenda-se que o valor dessa acção só determinará quão longo vai ser a extensão total desta linha representativa da relação carga-deslocamento, jamais a sua forma. A aparência desta trajectória está intimamente ligada com as propriedades geométricas e físicas das secções dos elementos⁵, podendo, por exemplo, uma variação da inércia destas secções, isso sim, determinar a maior ou menor concavidade e convexidade do seu percurso (em que, no extremo, entraremos numa situação de instabilidade por inversão de equilíbrio).

Fiquemos, assim e desde, já com a basilar noção que o grau de comportamento não linear de uma estrutura, para uma mesma geometria global, varia decisivamente com a rigidez dos seus membros. Na verdade, só secundariamente o valor da carga-tipo assume importância fundamental, sendo esta mais relevante quando a sua dimensão coloca a estrutura já perto do colapso geométrico, ou seja, na iminência da bifurcação de equilíbrio.

As mensagens dos últimos parágrafos não pretendem trazer novidades que não têm, simplesmente, relembrar e clarificar uma das reflexões elementares para o entendimento do comportamento não linear e seus efeitos.

1.4. Objectivo

Pretende, então, este trabalho efectuar o estudo da não linearidade geométrica de estruturas reticuladas espaciais, especificamente, nas seguintes vertentes:

- 1) Comparação e discussão de diversas formulações que nos últimos anos foram sendo desenvolvidas ou melhoradas, designadamente, das vantagens e inconvenientes da sua maior simplicidade ou complexidade e rigor na análise.
- 2) Apresentação dos procedimentos de cálculo mais representativos, nomeadamente, no que concerne à obtenção de deslocamentos e esforços de dimensionamento, tendo como orientação a coerência e a transparência dos processos.
- 3) Instabilidade elástica de estruturas, discriminadamente, enunciação e apreciação de alguns métodos de previsão de cargas críticas, sua utilidade e alcance.

⁵ Além, evidentemente, da própria geometria global da estrutura.

1.5. Organização

Este trabalho foi dividido em seis capítulos, tendo esta organização o objectivo de separar as matérias de forma conveniente, sem com isso se perder o seu natural encadeamento. Complementarmente, incluem-se no final três anexos cujo conteúdo não se introduziu no corpo principal, a fim de não se correr o risco de tornar dispersa a sua exposição.

Capítulo 1: Introdução

O presente capítulo visa uma *introdução temática e histórica* da análise da não linearidade geométrica de estruturas reticuladas, bem como a própria *definição genérica desse problema*, o *objectivo que se pretende atingir* com este estudo e a *organização do texto* que o apresenta.

Capítulo 2: Análise não linear geométrica de estruturas reticuladas espaciais - órgãos

Trata esta parte a análise não linear geométrica de estruturas reticuladas no que aos seus órgãos diz respeito. Com esta designação de *órgãos* pretende-se sublinhar o facto das entidades aqui tratadas não dependerem dos procedimentos de cálculo adoptados, ou seja, os seus elementos são imutáveis independentemente do processo. Assim, integram este capítulo assuntos como a definição das matrizes de transformação, das matrizes de rigidez linear e das matrizes de rigidez geométrica.

Capítulo 3: Análise não linear geométrica de estruturas reticuladas espaciais - processos

Esta secção versa a análise não linear geométrica de estruturas reticuladas no que incumbe aos seus processos. Com esta denominação de *processos* quer-se salientar que as matérias aqui tratadas dependem dos procedimentos de cálculo que se pretendem tomar, ou seja e sobretudo, do modo como os órgãos vão ser utilizados durante a sequência de carregamento e deformação, especificamente: onde, quando e como. Razão pela qual, temas como a descrição dos métodos incrementais e iterativos serão aqui incluídos.

Capítulo 4: Previsão de cargas críticas

A instabilidade elástica, na sua pendente de cargas críticas e modos de encurvadura

associados, é introduzida neste sector, sendo uma importante componente da órbita da não linearidade, embora não se deva classificar, única e propriamente, como tal, já que é possível efectuar este tipo de estudo em linearidade geométrica e elasticidade material.

Entendeu-se por conveniente não omitir esta área correndo, muito embora, o perigo de ser excessivo. Tal eventual ousadia estará justificada, se pensarmos na extensão e riqueza da informação que um estudo desta espécie nos pode proporcionar. Pensamos conseguir, adiante e em local próprio, transmitir a importância suplementar que este tema encerra. Aliás e como se verá, esta análise será equivalente ao conduzir proporcionalmente o carregamento-tipo aplicado ao ponto em que o sistema de equações deixa de ser definido positivo (ou seja: não há uma solução única para o problema, pois gerou-se uma situação de instabilidade criada pela anulação da matriz tangente em virtude do valor atingido pela matriz geométrica).

Capítulo 5: Exemplos numéricos

São aqui incluídos alguns dos exemplos que concretizam as afirmações produzidas ao longo dos capítulos anteriores e que nestes não foram apresentados. Na impossibilidade de serem abrangidos todos os casos testados e, sobretudo, de serem expostas todas as figuras expressivas dos resultados alcançados, é seleccionado um conjunto de ilustrações tidas por mais significativas para o que se pretende demonstrar em cada tipo de análise.

Efectuam-se ainda neste capítulo breves comentários sobre o programa de cálculo automático que se elaborou.

Na verdade, no âmbito do plano de trabalhos desta dissertação, foi desenvolvido, integralmente, um programa de cálculo que inclui todas as formulações adiante apresentadas. A concepção e execução do código, mais de 15.000 linhas de programação, cuja organização se apresenta, sumariamente, absorveu cerca de 80% do tempo total consumido na realização da mesma.

Diga-se que se o esforço despendido na sua produção talvez tenha sido exagerado em comparação com o que restou para a análise e comparação de todas as suas possibilidades e realização da parte escrita, a verdade é que esta ferramenta de cálculo permanece e mais profundos e cuidados estudos podem vir a ser efectuados, bem como modificações e novos acréscimos serem integrados, resultando num instrumento que, na opinião do autor, longe estará de se esgotar. Algumas sugestões sobre as possibilidades agora referidas serão

incluídas no capítulo referente às conclusões.

É este capítulo destinado a esclarecer, de forma extremamente sucinta, como o programa e seus algoritmos se adequam às teorias apresentadas.

Capítulo 6: Conclusões

Faz-se aqui um sumário das conclusões que puderam ser retiradas ao longo deste trabalho e apontam-se caminhos para eventuais futuros desenvolvimentos.

2. ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS RETICULADAS ESPACIAIS - ÓRGÃOS

2.1. Introdução

Tem por objecto esta parte da discussão e da própria análise não linear geométrica de estruturas reticuladas, o estudo das entidades que, não dependendo dos procedimentos de cálculo adoptados, materializam as bases vitais da sua modelação, ou seja, aquilo que já se classificou como os seus órgãos: matrizes de transformação, matrizes de rigidez linear e não linear, enfim, a formulação matricial não sujeita à conjuntura e, portanto, invariável no problema⁶.

Todavia, não se pode falar numa análise não linear sem que primeiro algo se diga, mesmo que de maneira breve, sobre a teoria de suporte que se encontra mais a montante. Referimo-nos, naturalmente, à análise linear. Este tema, embora seja passível de se pensar esgotado em termos de investigação, tal não deverá tomar-se por definitivo, sendo, de qualquer modo, uma obrigatoriedade a sua abordagem como estabelecimento dos conceitos e dos limites em que se trabalha e dos quais se parte para análises mais elaboradas.

Sobre este assunto diversas formulações existem, dependendo dos princípios que são fixados (como a contribuição ou não do esforço transversal para a deformação dos elementos, a redução do módulo de elasticidade longitudinal e transversal para ter em conta os efeitos da fendilhação, etc.) e que vão pesar na selecção da matriz de rigidez a utilizar. Outras questões se podem pôr ainda, sendo uma das mais importantes (como ainda se verá neste capítulo) a escolha da matriz de transformação que, especialmente no caso tridimensional, tem uma intervenção preponderante no entendimento de tudo o que se passa ao nível do elemento.

⁶ Queremos com isto dizer que cada formulação matricial enquanto entendida doutrinariamente pode variar em função da teoria que lhe está subjacente, na certeza, porém, que no seu emprego várias formas são possíveis de adoptar sem que a sua natureza ou o seu significado e composição dos seus índices se alterem.

2.1.1. Formulação para a análise não linear

Quando se trata de análise não linear, pressupõe-se mudanças ao longo do percurso de um processo. Tratando-se do estudo de um parâmetro como o movimento (caso em que caem os deslocamentos de uma estrutura), em termos gerais existem duas formas de o descrever:

Formulação Euleriana (descrição espacial)

O referencial espacial é imutável, cada ponto do espaço não vê variar as suas coordenadas; o interesse está em saber o que sucede nesse ponto fixo do espaço em cada intervalo de tempo.

Formulação Lagrangeana (descrição material):

O referencial espacial é móvel, cada ponto do espaço pode ver variar as suas coordenadas; o interesse reside no percurso de cada ponto material do sistema.

Fácil será entender que a formulação Euleriana se adequa, por exemplo, ao estudo de problemas de escoamento de fluidos, enquanto que a formulação Lagrangeana é própria para teorias de análise de estruturas, pois, se adapta ao estudo da deformação da mesma.

Parecendo, embora, transparente e inequívoca a adopção de uma formulação Lagrangeana, convém separar duas vias distintas [24,35]:

- Formulação Lagrangeana Total

O sistema de eixos de referência está ligado à configuração inicial da estrutura deformada: $A(i) = A(0) + U(i)$.

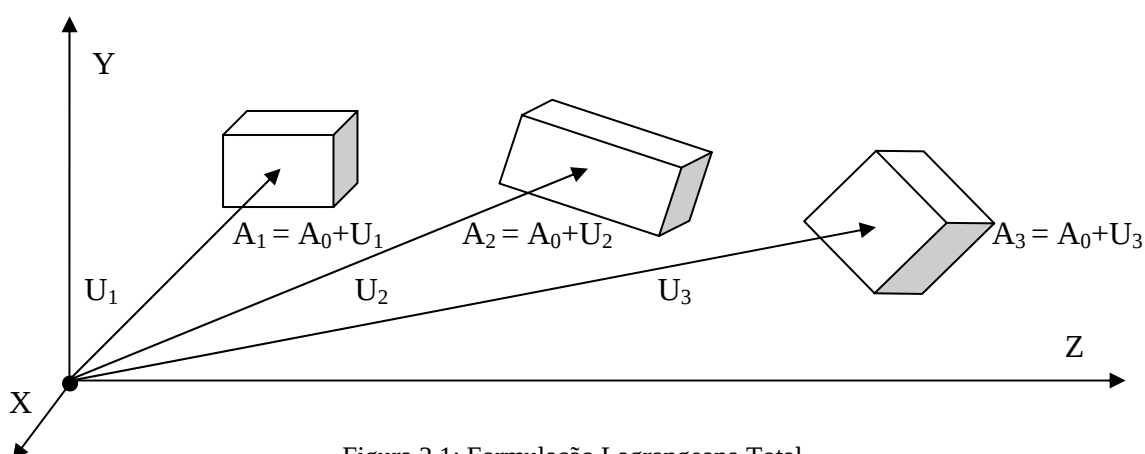


Figura 2.1: Formulação Lagrangeana Total.

- Formulação Lagrangeana Modificada/Atualizada

Em qualquer configuração de equilíbrio torna-se como referência a configuração de

equilíbrio anterior: $A(i) = A(i-1) + U(i)$.

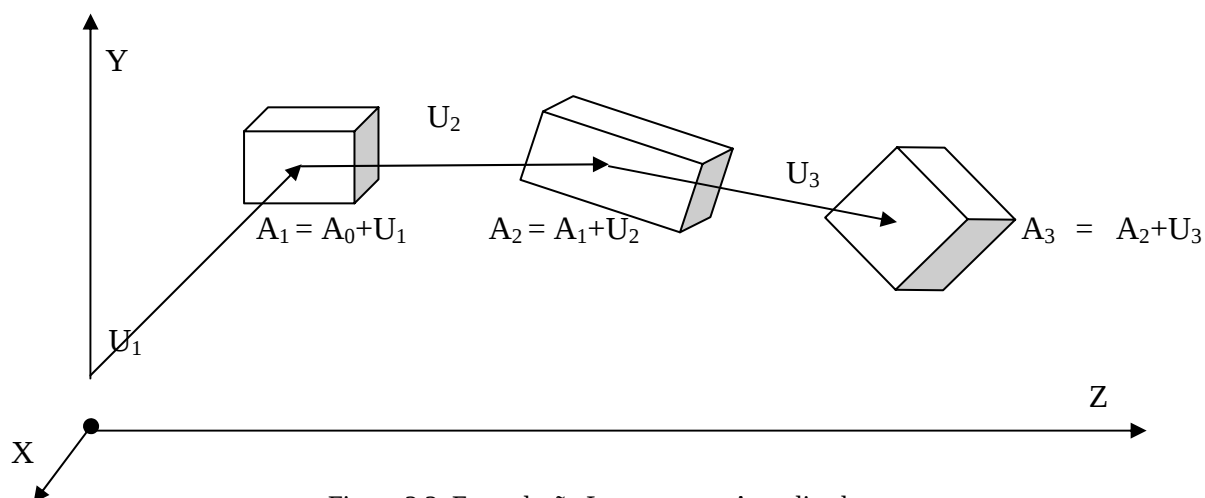


Figura 2.2: Formulação Lagrangeana Atualizada.

De um modo simplista podemos dizer, numa adaptação ao cálculo não linear geométrico de estruturas reticuladas que se pretende comentar, que a Formulação Lagrangeana Total corresponde a um processo em que pode não ocorrer actualização de coordenadas de forma explícita, enquanto que para uma Formulação Lagrangeana Atualizada tal é sempre obrigatório. Frise-se que, muito embora em manifesta minoria, métodos existem que adoptam uma Formulação Euleriana na dedução dos seus mecanismos de cálculo.

2.2. Matriz de Rigidez Linear

É na matriz de rigidez que se concentram todas as premissas de cálculo, todas as propriedades do elemento, todas as regras que fundamentam o seu previsível comportamento.

A dedução, exaustiva e cuidadosamente comentada, destas matrizes encontra-se vastamente coberta em diversa bibliografia [1,2,18,35,46], pelo que apenas se faz uma breve alusão de enquadramento à dedução da matriz de rigidez na sua forma mais comum, a que se segue a simples apresentação de várias versões em função das hipóteses fixadas. Por simplicidade, essa descrição é feita para o plano, sendo a sua tradução para o espaço imediata, já que não é admitida qualquer hipótese de interinfluência entre os eixos locais y e z .

Como é sabido, o coeficiente de rigidez k_{ij} representa a força na coordenada nodal i devida a um deslocamento unitário na coordenada nodal j , permanecendo todos os restantes

graus de liberdade fixos e nulos. Na figura (2.3) representa-se para o caso do grau de liberdade de rotação no extremo i , as reacções que surgem nos restantes graus de liberdade quando a este se aplica uma rotação unitária [1] (não se considerando, por agora, variações na dimensão do comprimento da barra).

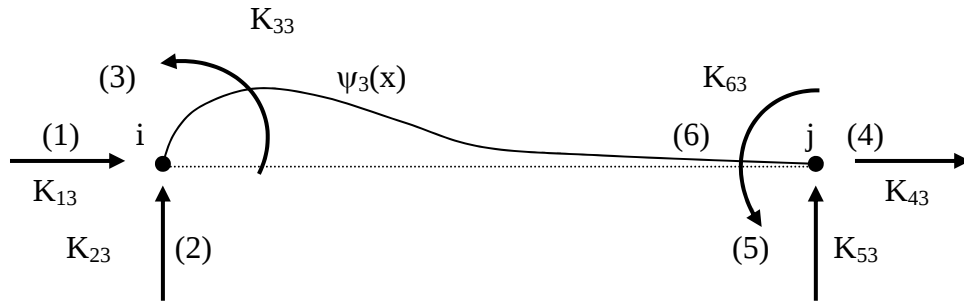


Figura 2.3: Matriz de rigidez linear: grau de liberdade de rotação no nó i e reacções correspondentes.

Associadas a cada deslocamento unitário da coordenada nodal, mantendo impedidos os restantes movimento dos nós, a barra assume determinadas formas elásticas representadas pelas equações $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$, $\psi_4(x)$, $\psi_5(x)$ e $\psi_6(x)$. Adoptando como interpretação aproximada da forma real elástica a função cúbica: $\psi(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$, que é uma expressão que cumpre a equação diferencial de viga: $EI(d^2y/dx^2) = M(x)$. Vamos deduzir para este caso os parâmetros A , B , C e D , introduzindo, para isso, as condições de fronteira e admitindo como linear a lei dos momentos ($M(x)=EI\psi_3''(x)$) por não existirem cargas intermédias.

Não se incluirá o desenvolvimento dos coeficientes $\psi_1(x)$ e $\psi_4(x)$ já que correspondem aos graus liberdade de deslocamentos lineares dos extremos de barra segundo o seu eixo e , como tal, não geram reacções interactivas com os restantes graus de liberdade, assim, temos:

$$\psi_2(x) = 1 - 3(x/L)^2 + 2(x/L)^3$$

$$\psi_3(x) = x - (1-x/L)^2$$

$$\psi_5(x) = 3(x/L)^2 - 2(x/L)^3$$

$$\psi_6(x) = (x^2/L)(x/L-1)$$

Dado que $\psi_3(x)$ é a deformação correspondente ao deslocamento unitário $\delta_3=1$, a deformação da viga para um deslocamento arbitrário δ_3 será: $\delta_3\psi_3(x)$. O mesmo raciocínio é

aplicável aos restantes deslocamentos nodais δ_2 , δ_5 e δ_6 , de modo que se podem sobrepor todos os movimentos, encontrando-se:

$$y(x) = \delta_2 \psi_2(x) + \delta_3 \psi_3(x) + \delta_5 \psi_5(x) + \delta_6 \psi_6(x)$$

Supondo a viga em equilíbrio para qualquer das deformadas possíveis e correspondentes a cada grau de liberdade, debrucemo-nos, então, sobre o caso da deformada $\psi_3(x)$. Provocando um deslocamento virtual análogo ao da figura anterior, o trabalho realizado pelas forças externas terá de ser igual ao cumprido pelas forças internas.

Se atendermos à reacção que surge no grau de liberdade 2 pela rotação unitária em 3 e aplicando-se o princípio dos trabalhos virtuais para $\delta_2=1$, à viga deformada por essa rotação $\delta_3=1$, deduz-se o trabalho das forças externas:

$$W_{\text{ext}} = k_{23} \delta_2 \text{ e } W_{\text{int}} = \int M(x) dv, \text{ com:}$$

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}} \text{ ou } k_{23} \delta_2 = \int M(x) dv$$

em que $M(x)$ é a lei dos momentos flectores e dv a deformação angular originada pelo deslocamento virtual.

Admitindo que $M(x) = EI \psi_3''(x)$ e $dv = \psi_2''(x) dx$, para $\delta_2=1$, surge:

$$k_{23} \delta_2 = k_{23} = \int M(x) dv = \int EI \psi_3''(x) \psi_2''(x) dx$$

do que, em geral, qualquer coeficiente de rigidez associado com uma viga pode ser definido pela equação:

$$k_{ij} = \int EI \psi_j''(x) \psi_i''(x) dx$$

De acordo com esta formulação e para os graus de liberdade e sistema de eixos reduzido da figura que se segue (fig.2.4):

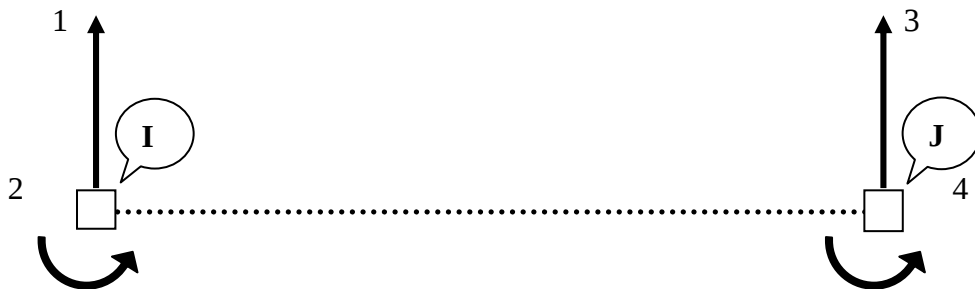
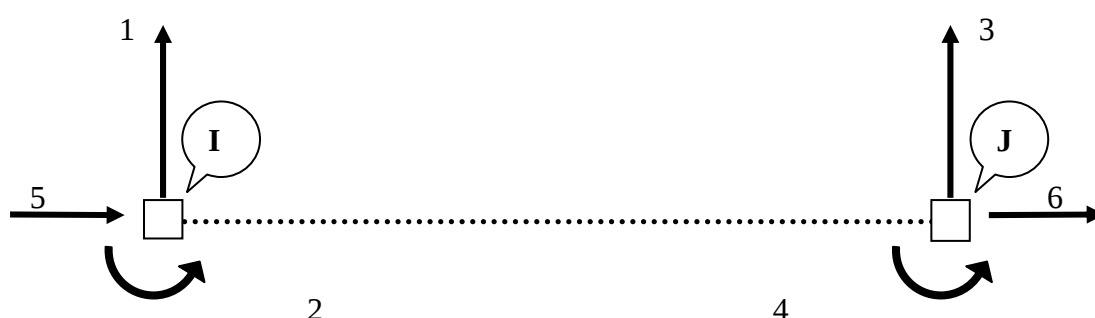


Figura 2.4: Sistema de eixos plano local condensado.

A equação matricial da barra pode ser definida por:

$$\mathbf{K}_L = \begin{array}{c|cc|cc|c} & i & & j & & \\ \hline & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & i \\ \hline & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L & \\ \hline & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 & j \\ \hline & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L & \\ \hline \end{array}$$

Este sistema de eixos local que na sua forma completa poderia também ser:



Transferindo esta situação condensada para o espaço e em função do sistema de eixos escolhido, fixa-se a posição dos graus de liberdade dentro da matriz de rigidez, bem como a relação entre sinais dessas posições.

Neste caso optou-se pelo seguinte sistema de eixos espacial local:

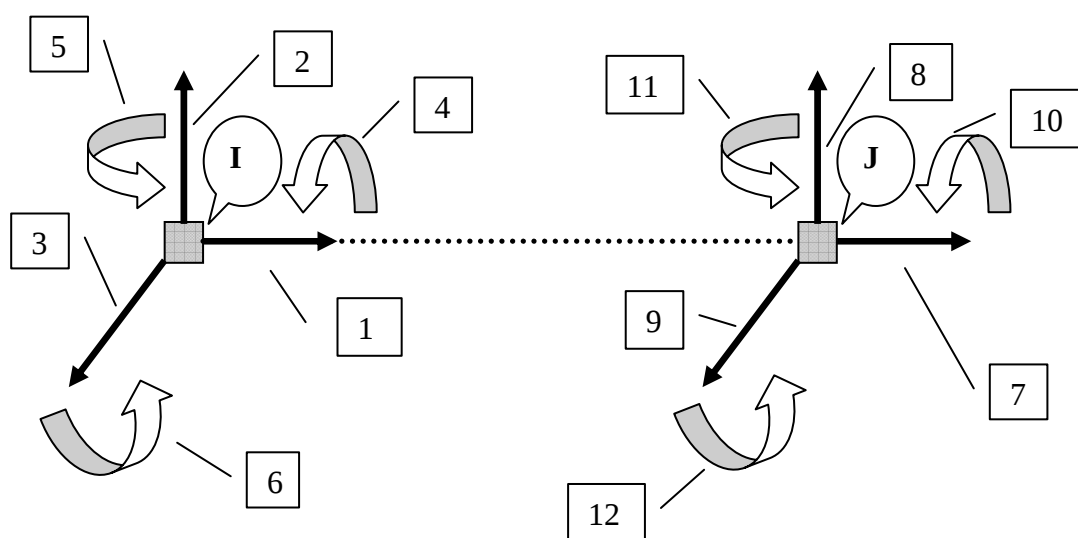


Figura 2.6: Sistema de eixos espacial local.

Todas as matrizes lineares e não lineares adiante apresentadas respeitam o sistema de eixos agora definido, a que correspondem os seguintes vectores de forças e deslocamentos:

$$\{F\}^T = \{F_{Xi}, F_{Yi}, F_{Zi}, M_{Xi}, M_{Yi}, M_{Zi}, F_{Xj}, F_{Yj}, F_{Zj}, M_{Xj}, M_{Yj}, M_{Zj}\}$$

$$\{U\}^T = \{\delta_{Xi}, \delta_{Yi}, \delta_{Zi}, \theta_{Xi}, \theta_{Yi}, \theta_{Zi}, \delta_{Xj}, \delta_{Yj}, \delta_{Zj}, \theta_{Xj}, \theta_{Yj}, \theta_{Zj}\}$$

Podemos dividir a matriz de rigidez linear como um conjunto de submatrizes que a interprete ao nível de cada um dos seus dois extremos i e j , ordenando a sua interdependência:

$$\mathbf{K}_L = \begin{array}{cc|cc} & i & & j & \\ \hline & \mathbf{K}_L^{ii} & & \mathbf{K}_L^{ij} & i \\ \hline & \mathbf{K}_L^{ji} & & \mathbf{K}_L^{jj} & j \\ \hline \end{array}$$

Constituída, então, pelas submatrizes $\mathbf{K}_L^{ii}$, $\mathbf{K}_L^{jj}$, $\mathbf{K}_L^{ij}$ e $\mathbf{K}_L^{ji}$, cuja apresentação se faz no anexo I em diversas variações, para as quais se julga existir significativa utilidade tanto em termos teóricos como em termos práticos.

Em virtude da simetria característica da matriz de rigidez linear, a submatriz $\mathbf{K}_L^{ji}$ é, invariavelmente, a transposta da submatriz $\mathbf{K}_L^{ij}$.

Como acima se disse, encontram-se no anexo I as matrizes de rigidez linear mais comuns e de maior utilidade, incluindo um modelo que pode não dispor de continuidade para momentos flectores e torsores.

Esta matriz de rigidez sem continuidade para momentos pode também ser adoptada para a simulação do comportamento linear de cabos, desde que se implemente um dispositivo de cálculo que impeça o seu funcionamento à compressão, sendo ainda recomendável a divisão do mesmo em número de elementos suficiente para uma maior aproximação (no próximo capítulo apresentaremos uma matriz de rigidez para cabos com comportamento não linear [41]).

O sistema de eixos será o mesmo, obviamente, existindo a possibilidade de rotações livres nos extremos das barras.

Ilustre-se esse sistema de eixos local em que as esferas simbolizam as possíveis rótulas que as ligações podem ter (fig.2.7):

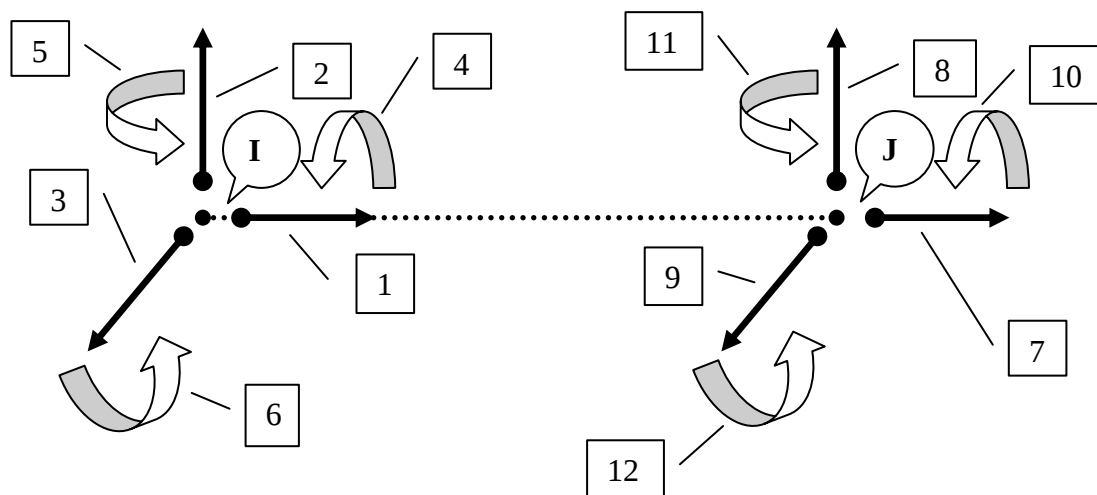


Figura 2.7: Sistema de eixos espacial local, eventualmente, sem continuidade para momentos.

Outro tipo de matriz de rigidez linear é apresentada por Petr Krysl [29], que este autor reputa de melhorada em termos de resposta elástica (dado lhe ter incluído um factor de correcção ao esforço transversal - “shear correction factor” - e uma constante de torção - “torsional constant”), conseguindo-se com esta matriz evitar o “locking”⁷ do elemento devido ao esforço transversal.

2.3. Matriz de Transformação ou Rotação

Resolveu incluir-se um espaço dedicado a este assunto, porque se julga ser um ponto de primordial importância no entendimento e bom funcionamento de qualquer programa de estruturas de tipologia espacial.

De facto e como se vai verificar, numa análise não linear geométrica a matriz de transformação é um aspecto particular e vital na sua formulação.

Ao contrário do que se passa no plano, em que a matriz de rotação é simples e imediata (fig. 2.8), no caso tridimensional muitas formulações existem para proporcionar a passagem de eixos locais para gerais e vice-versa⁸.

⁷ Sobrevalorização da contribuição da deformação por esforço transversal em vigas muito esbeltas.

⁸ A passagem de eixos gerais para locais faz-se através da matriz transposta da matriz de transformação de eixos locais para gerais.

Longe de se poder dizer que cada autor deduz uma matriz de transformação própria para a sua formulação de análise não linear geométrica, muitos há que o fazem.

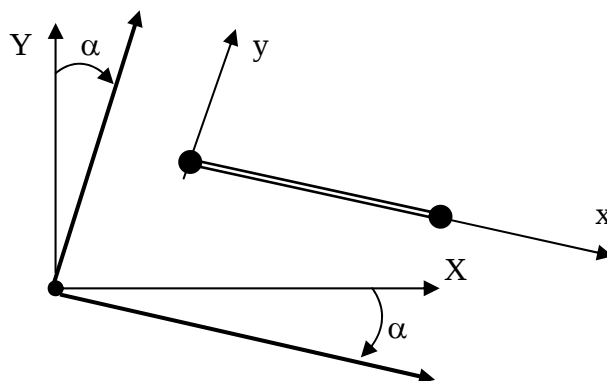


Figura 2.8: Transformação de eixos locais para gerais no plano.

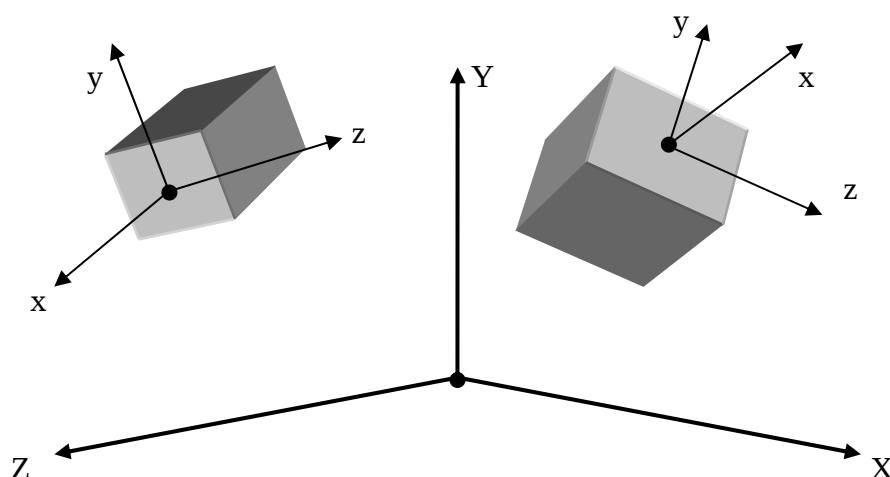


Figura 2.9: Eixos locais (x,y,z) e gerais (X,Y,Z) no espaço.

Entre essas formulações vão-se explicitar três, tecendo-se alguns comentários sobre as mesmas.

Como vamos ver, muito embora todas se adaptem mais ou menos bem (desde que se sigam algumas intervenções recomendáveis) para uma análise linear, já tal não é verdade quando entramos no âmbito de uma análise não linear geométrica com actualização de coordenadas.

De facto, neste último caso, a manutenção da coerência dos eixos locais dos elementos de barra ao longo do processo de actualização da geometria é absolutamente fundamental para a correcção e precisão dos resultados em termos de deslocamentos e esforços.

De qualquer modo, independentemente da formulação adoptada em termos de tratamento da passagem de eixos locais para gerais e vice-versa, esta matriz tem na sua forma mais condensada a dimensão de 3 linhas por 3 colunas (3x3).

São as linhas dessa matriz os co-senos directores de cada eixo local (x, y e z), referidos ao extremo em causa (i ou j), para cada um dos dois grupos de deslocamentos existentes no espaço, sendo estes os deslocamentos lineares dos nós (δx , δy e δz) e os deslocamentos devidos à sua rotação (θx , θy e θz):

$$[T_0] = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix}$$

Daqui se depreende que a matriz de rotação final do elemento seja feita para cada um dos seus extremos ou os incorpore a ambos, já que esta vai proporcionar a passagem de coordenadas da barra como um todo de eixos locais para gerais e vice-versa.

Adoptando uma matriz de transformação que inclua os dois eixos locais de extremo de barra e para os dois tipos de deslocamentos desses nós, temos:

$$[T] = \begin{array}{cc|c} & i & j & \\ \hline [T^{ii}] & & [T^{ij}] & i \\ \hline [T^{ji}] & & [T^{jj}] & j \\ \hline \end{array}$$

Sendo as submatrizes $[T^{ij}]$ e $[T^{ji}]$ nulas, já que não há qualquer interinfluência entre os extremos das barras no que à transformação de coordenadas diz respeito.

Como os dois tipos de deslocamentos, lineares e de rotação, têm a mesma direcção e sentido em eixos locais escolhidos, e se para ambos os extremos da barra mantivermos a sua posição, podemos generalizar:

$$[T^{ii}] = \begin{bmatrix} [T_0] & [0] \\ [0] & [T_0] \end{bmatrix} = [T^{jj}]$$

Assim, para uma forma de visualização total de uma matriz de transformação de eixos locais para gerais com seis graus de liberdade por extremo de barra, temos:

$$[T] = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} & & & & & & & & & \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} & & & & & & & & & \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} & & & & & & & & & \\ & & & C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} & & & & & & \\ & & & C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} & & & & & & \\ & & & C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} & & & & & & \\ & & & & & & C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} & & & \\ & & & & & & C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} & & & \\ & & & & & & C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} & & & \\ & & & & & & & & & C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ & & & & & & & & & C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} \\ & & & & & & & & & C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix}$$

Uma matriz complementar desta é a *matriz de rotação de eixos locais da secção para eixos principais da secção*, bastante semelhante para todos os autores que a ela recorrem já que se trata, no fundo, de uma rotação em termos bidimensionais.

Na verdade, poderia esta ser adoptada de modo quase directo para matriz de transformação num estudo plano (ver fig.2.10).

A sua constituição, para uma rotação α , ao nível da submatriz elementar e para um qualquer grupo de deslocamentos (sejam estes lineares como de rotação), pode ser expressa como (significando a letra C o co-seno do ângulo α e a letra S o co-seno do ângulo α (fig.2.10)):

$$[T_{P0}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C & S \\ 0 & -S & C \end{bmatrix}$$

À semelhança da matriz de rotação de eixos locais para gerais é formada por:

$$[T_P^{ii}] = \begin{bmatrix} [T_{P0}] & [0] \\ [0] & [T_{P0}] \end{bmatrix} = [T_P^{jj}]$$

Sendo as submatrizes $[T_P^{ij}]$ e $[T_P^{ji}]$ também nulas pelas mesmas razões.

Assim, para a totalidade dos graus de liberdade de extremidade da barra corresponde a seguinte matriz de transformação completa:

$$[T_{P0}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & C & S & & & & & & & & & \\ 0 & -S & C & & & & & & & & & \\ & & & 1 & 0 & 0 & & & & & & \\ & & & 0 & C & S & & & & & & \\ & & & 0 & -S & C & & & & & & \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 & & & \\ & & & & & & 0 & C & S & & & \\ & & & & & & 0 & -S & C & & & \\ & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & C & S \\ & & & & & & & & & 0 & -S & C \end{bmatrix}$$

Na maioria dos casos não haverá necessidade de usar esta matriz de rotação, pelo que estes eixos se manterão, perfeitamente, sobrepostos. Contudo, pode ter esta matriz várias

utilidades, destacando-se entre outras:

- Possibilidade de fugir à definição automática do posicionamento dos eixos locais y e z , uma vez que a posição das secções em eixos locais é pré-estabelecida pelo programa, com base na formulação adoptada;
- Correção de geometria em termos de deslocamentos angulares dos eixos locais, ou seja: permite, com alguma facilidade, introduzir a possibilidade da actualização de geometria não se limitar à simples actualização de coordenadas como, também, à da própria posição angular dos eixos locais y e z ;
- Utilização da mesma secção-tipo com orientação dos seus eixos principais de inércia rodados de um certo ângulo. Isto pode ser compreendido, por exemplo, através do aproveitamento de uma secção-tipo que numa barra é de 30x40 para que noutra barra seja de 40x30, bastando rodar, para o efeito, a secção de 90°.

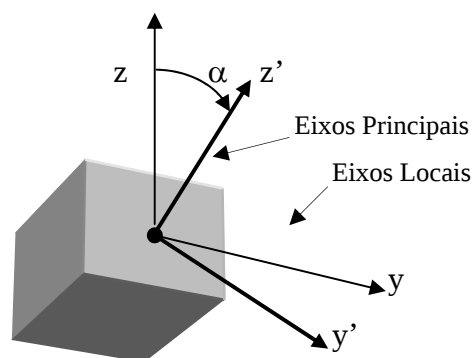


Figura 2.10: Transformação de *eixos locais* da secção (x e y) para *eixos principais* da secção (x' e y').

2.3.1. Matriz de Rotação por Ramon Alvarez

Como foi referido, independentemente da formulação adoptada em termos de tratamento da passagem de eixos locais para gerais e vice-versa, a matriz de transformação (ou rotação) tem na sua forma mais condensada a dimensão de 3 linhas por 3 colunas (3x3), sendo estas linhas os co-senos directores de cada eixo local (x , y e z), referidos a cada grupo⁹ de deslocamentos do extremo em causa (i ou j).

Este autor [1,2] selecciona uma matriz de rotação em que impõe a característica de o eixo local y ser sempre perpendicular ao eixo geral Z , tendo esta a dedução completa que a

⁹ Esta divisão da numeração da matriz de rotação não é obrigatória, mas torna-se vantajosa por ser bastante transparente e estar, forçosamente, ligada à numeração imposta pela eleição dos eixos locais da barra.

seguir se apresenta [1].

Sabemos que os co-senos directores do eixo local x são os mesmos do próprio eixo longitudinal da barra: $x = \{L, M, N\}$.

Fixando, conforme se tinha dito, os co-senos directores do eixo local y como perpendiculares aos eixos x e Z , surge:

$$y = Z \wedge x = 1/D \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ L & M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M/D \\ L/D \\ 0 \end{bmatrix}$$

em que: $D = (L^2 + M^2)^{1/2}$.

Mantendo as necessárias condições de ortogonalidade, resultam os seguintes co-senos directores do eixo local z :

$$z = x \wedge y = 1/D \begin{bmatrix} i & j & k \\ L & M & N \\ -M & L & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -LN/D \\ -MN/D \\ D \end{bmatrix}$$

Ficando a submatriz de transformação de um vector do sistema de eixos local para o geral com o seguinte aspecto final:

$$[T_0] = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & M & N \\ LM/D & -D & MN/D \\ N/D & 0 & -L/D \end{bmatrix}$$

No caso do eixo local x ser paralelo ao eixo geral Z o eixo local y é indeterminado, já que L e M são nulos, pelo que se sugere convencionar este como paralelo ao eixo geral Y , podendo tomar a matriz de transformação uma das duas seguintes expressões (outra qualquer é admissível):

$$[T_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ou}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Julgo não ser muito feliz a escolha do eixo geral Z para servir de referencial de partida à identificação dos eixos locais de barra. Isto porque desta forma ela pode tomar posições que, embora sempre determináveis através da leitura e interpretação da matriz de transformação, não são muito fáceis de visualizar quando a barra não toma uma posição paralela a um dos eixos gerais. Na realidade, nestes casos, excepto o eixo local x que é sempre colinear com o próprio eixo da barra, os restantes eixos locais que são perpendiculares à mesma (y e z) assumem posições muito pouco convenientes para a análise das secções (os eixos locais y e z podem tomar qualquer posição dentro dos 360° do círculo trigonométrico).

Assim, propõe-se uma alteração que consiste em ser o eixo local z sempre perpendicular ao eixo geral Y . Tal modificação torna imediata a identificação dos eixos locais dos elementos (com a excepção única do caso da barra ser perfeitamente vertical, condição na qual se fixa o eixo local z paralelo ao eixo geral X - ressalva semelhante à que tínhamos na situação anterior quando a barra era paralela ao eixo geral Z).

As alterações em relação à dedução apresentada anteriormente, reside no facto de aqui ser o eixo local z sempre perpendicular ao eixo geral Y . Mantendo o eixo local x os seus co-senos directores bem definidos (também $x = \{L, M, N\}$), temos a nova ligação vectorial assim definida:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{Y} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ L & M & N \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N/D \\ 0 \\ L/D \end{bmatrix}$$

em que: $D = (L^2 + N^2)^{1/2}$.

Mantendo, igualmente, as necessárias condições de ortogonalidade, redundam os seguintes co-senos directores do eixo local y :

$$y = z \wedge x = 1/D \begin{bmatrix} i & j & k \\ -N & 0 & L \\ L & M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ML/D \\ D \\ -MN/D \end{bmatrix}$$

Ficando a matriz de transformação de um vector do sistema de eixos local para o geral com o seguinte aspecto final:

$$[T_0] = \begin{bmatrix} L & M & N \\ -ML/D & D & -MN/D \\ -N/D & 0 & L/D \end{bmatrix} \quad (\text{ou}) = \begin{bmatrix} L & M & N \\ ML/D & -D & MN/D \\ N/D & 0 & -L/D \end{bmatrix}$$

A segunda matriz corresponde à primeira rodada de 180°, o que pode não ser preferível já que o eixo local y toma sempre a posição descendente em vez de ascendente (no entanto, qualquer das soluções torna este eixo muito clara e universalmente definido no espaço).

No caso do eixo local x ser paralelo ao eixo geral Y o eixo local z é indeterminado, já que L e N são nulos, pelo que se sugere adoptar uma das duas seguintes matrizes (que tem em consideração a orientação dos nós da barra – ascendente ou descendente):

$$[T_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & M \\ 0 & -M & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ou}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -M \\ 0 & M & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta formulação da matriz de transformação de eixos gerais para locais é eficiente quando não há necessidade de actualização de coordenadas, pois, em caso contrário, as inerentes mudanças de posição (e sobretudo as de quadrante, repare-se na fig. 2.11 em que a mudança do II para o IV quadrante, ou vice-versa, implica a inversão dos eixos locais x e z) podem significar o comprometer da fiabilidade dos resultados.

Assim, apenas se mostraria consistente o uso desta matriz em certo número de casos, ficando comprometida a generalidade pretendida não sendo de adoptar.

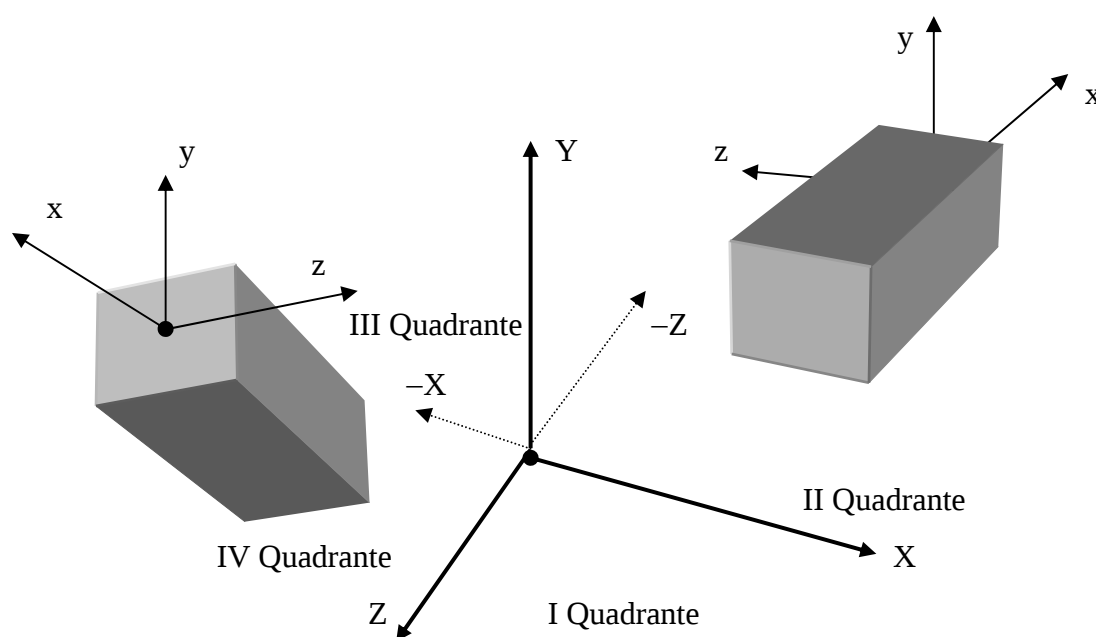


Figura 2.11: Variação da posição dos eixos locais em função da posição da barra (Alvarez – modificada).

2.3.2. Matriz de Rotação por Yang & Kuo

Yang & Kuo no seu livro “Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures”¹⁰ [46] apresenta uma, aparentemente, muito completa dedução do modo de tratar a problemática dos eixos locais e a transferência das suas variáveis para eixos gerais.

Esta abordagem é bastante pertinente, já que tenta simular todas as alterações que se dão ao nível do elemento em todo o processo incremental e iterativo e deformação associada, particularmente, quanto a própria actualização do ângulo dos eixos nos extremos de barra em função dos deslocamentos de rotação dos nós da estrutura que os materializam.

São, pelo autores, definidos três tipo de eixos:

⇒ Eixos do elemento (“element axes”): eixos actualizados¹¹ que se referem ao centro da secção e são função dos eixos nodais da secção (sua média, eventualmente, corrigida).

¹⁰ Esta obra científica é talvez a mais completa em termos de actualidade no que à análise não linear geométrica de estruturas reticuladas se refere, pecando (como grande parte de toda a bibliografia) por não dar a devida atenção a pormenores e passos que são muitas vezes, indevidamente, desprezados na exposição das matérias, deixando os seus leitores em dúvidas evitáveis.

¹¹ Actualizados significa que acompanham a deformação do elemento, com actualização de coordenadas em função dos deslocamentos lineares dos nós (δx , δy e δz) e actualização dos eixos locais em função dos

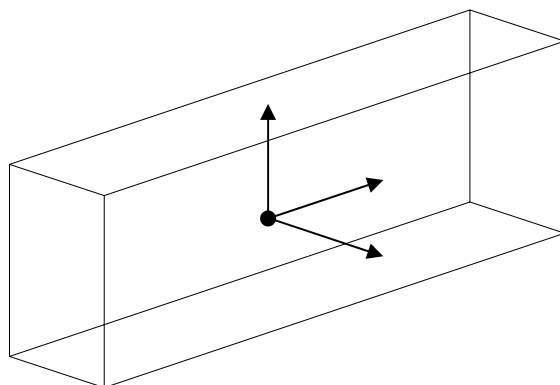


Figura 2.12: Eixos do elemento (element axes).

⇒ Eixos nodais da secção (nodal section axes): eixos actualizados nos extremos do elemento referidos a coordenadas locais.

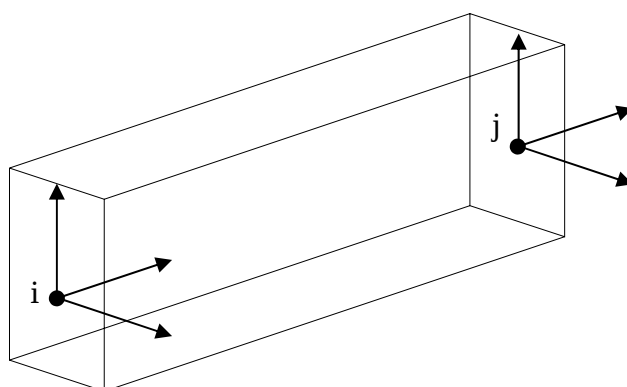


Figura 2.13: Eixos nodais da secção (nodal section axes).

⇒ Eixos de referência dos nós (reference axes of nodes): eixos actualizados dos nós referidos a coordenadas gerais.

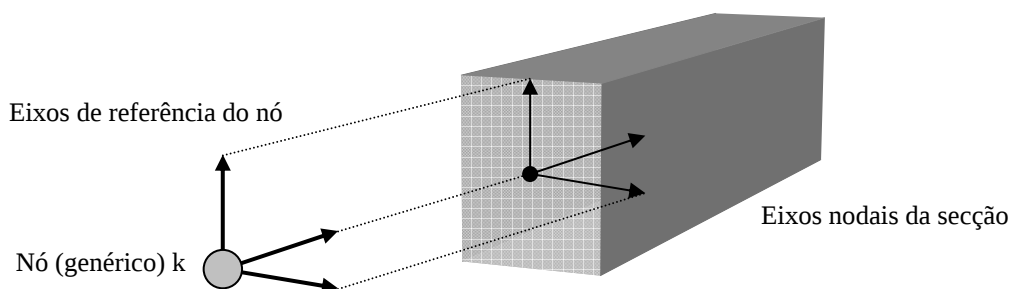


Figura 2.14: Eixos de referência dos nós (reference axes of nodes).

Uma dedução pormenorizada dos eixos do elemento, eixos nodais da secção e eixos de

deslocamentos angulares dos nós (θ_x , θ_y e θ_z).

referência dos nós encontra-se entre as páginas 498 e 506 da referência bibliográfica [46], fazendo-se apenas aqui a síntese das grandes linhas desta formulação:

- Os eixos de referência são a posição actualizada dos nós em termos de coordenadas gerais, com simultânea correcção de eixos arbitrados e inicialmente paralelos aos eixos gerais X , Y e Z , que, nesta posição espacial, vão vendo a sua posição acompanhar as rotações e translações desses nós ao longo do cálculo em função dos deslocamentos.
- Os eixos nodais da secção (ou simplesmente eixos da secção), são os eixos actualizados dos extremos i e j da secção em coordenadas locais (x , y e z). Estes eixos que eram paralelos entre si no início do cálculo (fig.2.13, extremos i e j da barra), perdem tal propriedade ao longo do processo, já que o seu deslocamento é independente. No entanto, e se as condições de fronteira forem de continuidade, a relação entre estes eixos de secção e os eixos de referência permanece inalterável porque à actualização de uns corresponde a actualização dos outros (sendo essa relação a matriz de transformação inicial não deformada).
- Os eixos do elemento são aqueles com que se pretende representar o comportamento global da secção, referindo-se ao seu centro e obtidos à custa da média corrigida¹² dos eixos locais dos nós extremos da secção (eixos nodais da secção ou, simplesmente, eixos da secção).

Em termos práticos, só existe de facto a cada momento uma matriz de rotação do elemento (construída, como se viu, através dos eixos dos nós extremos em coordenadas locais desse mesmo elemento), reduzindo-se o impacto e a profundidade em termos da actualização total de geometria que almejava obter-se, já que estamos em presença de uma “geometria deformada média”.

Contudo, tal procedimento é compreensível, dado que são previsíveis graves dificuldades numéricas no tratamento de um sistema estrutural com barras que dispõe de matrizes de transformação com eixos extremos desfasados entre si (nomeadamente, ao nível de obtenção dos esforços de extremos de barra que estão relacionados, directamente, com deslocamentos em eixos locais de ambos os extremos da barra pela sua matriz de rigidez ou

¹² Corrigida porque o estabelecimento simples da média entre eixos do mesmo tipo pode retirar a ortogonalidade entre eixos locais, o que é preciso garantir rectificando se necessário.

tangente).

Este trabalho não prossegue por essa via, sendo, contudo, uma porta aberta para eventuais futuros desenvolvimentos.

2.3.3. Matriz de Rotação por Argyris & Petyt

Outra formulação muito interessante e extremamente funcional (com umas pequenas modificações) é apresentada por Ross [43], embora a sua autoria seja atribuída a Argyris e Petyt.

Consiste esta na criação de um sistema de eixos baseado num plano triangular formado pelos nós extremos do elemento e um outro nó definido para o efeito. Desta forma, poder-se-ia estabelecer a posição de um dos dois eixos locais normais à secção e a partir deste e do eixo colinear com o próprio eixo da secção seria imediata a obtenção do restante¹³.

A dificuldade do que nos é proposto reside na necessidade da existência desse terceiro nó (que, embora este não contribua para a cativação de memória na montagem da matriz de rigidez, terá de existir com as suas coordenadas em memória aleatória ou suporte magnético, consumindo sempre espaço e tempo de cálculo).

Ilustra-se uma imagem desta formulação, encontrando-se o assunto tratado com detalhe na referência bibliográfica citada.

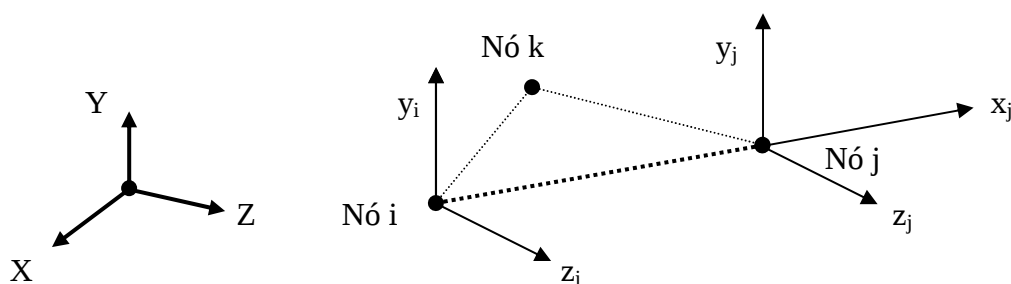


Figura 2.15: Eixos locais de barra por Argyris e Petyt.

Para ultrapassar esta pesada desvantagem que obriga a nomear mais um nó por barra¹⁴,

¹³ Tanto nesta como em todas as formulações, trata-se de um produto vectorial entre eixos ortogonais, respeitando a regra do “dedo polegar”.

¹⁴ Como é indicado por Ross, não é absolutamente indispensável fornecer um novo nó para tal desígnio e muito menos um por cada barra, servindo um nó já existente num extremo de outra barra. A questão é que tal solução, além de implicar sempre o trabalho de designar este terceiro nó para uma análise linear, seria impraticável na

de forma directa ou automática, é aqui proposto o seguinte artifício:

a) Para barras que representem vigas ou cabos é simulado um nó virtual com base nos dois existentes nos seus extremos, tendo este como coordenadas em X , Z e Y as médias das coordenadas correspondentes destes últimos, havendo que em Y a esta média somar uma unidade. Desta forma, fica o eixo local y sempre com sentido ascendente e inserido num plano vertical normal ao realizado pelos eixos gerais X e Z .

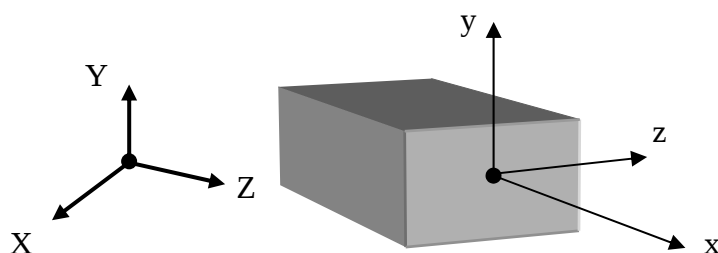


Figura 2.16: Eixos locais de barra por Argyris e Petyt (adaptados para viga).

Para barras que representem pilares também é simulado um nó virtual com base nos dois existentes nos seus extremos, tendo este como coordenadas em X , Z e Y as médias das coordenadas correspondentes destes últimos, havendo que em Z a esta média subtrair uma unidade. Desta forma fica o eixo local z sempre com sentido contrário ao eixo geral Z e inserido num plano normal ao plano realizado pelo eixos gerais X e Y .

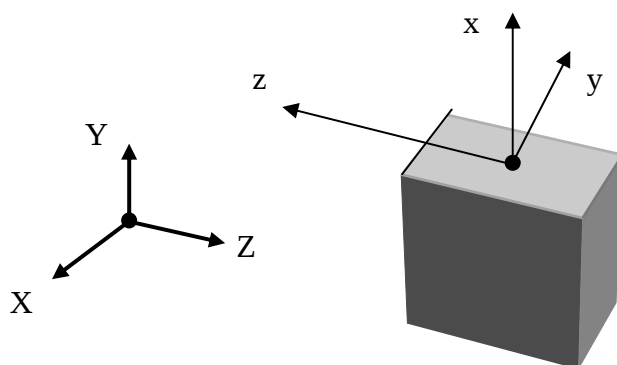


Figura 2.17: Eixos locais de barra por Argyris e Petyt (adaptados para pilar).

não linearidade geométrica, já que com a actualização de coordenadas tal escolha perderia qualquer sentido.

Assim, consegue-se uma definição clara e simples dos eixos locais, sem qualquer necessidade de existência formal de um terceiro nó, já que o cálculo das coordenadas do mesmo é feito através dos dois que materializam os extremos da barra.

2.3.4. Comparação entre Matrizes de Rotação

Apresenta-se, seguidamente, aquilo que se pretende como uma súmula das formulações seleccionadas em quadro comparativo.

Pelo que se vai expor e atendendo à sua generalidade e facilidade de uso, julgamos ser de adoptar a matriz de transformação preconizada por Argyris e Petyt, recorrendo, simultaneamente, à habilidade que se apresentou.

QUADRO 2.1

	Sem actualização De Coordenadas	Com Actualização de Coordenadas	Facilidade de aplicação
Alvarez [1]	Não recomendável	Não recomendável	Muito fácil
Alvarez (modificada)	Recomendável	Não recomendável	Muito fácil
Yang & Kuo [46]	Recomendável	Recomendável	Difícil
Argyris & Petyt [49]	Recomendável	Recomendável	Muito difícil
Argyris (modificada)	Recomendável	Recomendável	Fácil

Outras deduções existem para matrizes de transformação, no entanto, pensa-se que as aqui discutidas são representativas desse universo¹⁵.

2.4. Matriz Tangente

A diferença entre matriz de rigidez linear e matriz de rigidez tangente (ou matriz tangente¹⁶) reside, basicamente, no facto desta última incluir o estado de tensão do elemento

¹⁵ Outras formulações: [14,28,36].

¹⁶ Matriz tangente em substituição de matriz de rigidez tangente é apenas uma simplificação de linguagem, uma

relativo ao momento em que foi calculada, com a correspondente diminuição ou aumento de rigidez do mesmo (habitualmente, conforme este esteja sob compressão ou sob tracção). O nome de tangente advém do facto desta formulação, para uma representação unidimensional, poder ser em cada momento descrita, em termos de relação instantânea carga-deslocamento, pela tangente aos pontos desta curva no processo de análise não linear em curso.

Existem duas formas principais de representar esta matriz: uma baseada em funções matemáticas que multiplicam os elementos da matriz de rigidez linear, outra através da soma de novas matrizes à de rigidez linear.

Dá-se o nome de *funções de estabilidade* a esses termos que afectam os elementos da matriz de rigidez linear e de *matriz geométrica* quando se trata de uma soma de outras matrizes a essa¹⁷.

As matrizes tangentes que vão ser apresentadas surgem associadas com uma data e um responsável em termos bibliográficos, o que não implica que quem o divulga seja o seu autor. Por outro lado, a sua dedução pode ter sido efectuada para o plano, constituindo a sua generalização para o espaço uma liberdade aqui tomada e de discutível legitimidade. Todavia, e sem prejuízo da ressalva traduzida no período anterior, julga-se que as reservas quanto ao abuso desta extensão, só serão mais significativas no que ao grau de liberdade relativo à torção se refere. Ora, para além de tal grau de liberdade ser, vulgarmente, nulo para a maioria das formulações espaciais, da sua omissão nunca resulta perigo para o equilíbrio da solução, ou seja: na situação mais desfavorável estamos na presença de uma formulação menos completa, mas nunca errada. Pelas mesmas razões, julga-se ser tal raciocínio correcto para outros termos, normalmente, nulos na correspondente posição da matriz de rigidez linear.

A maior parte das formulações que vão ser estudadas terão as suas matrizes tangentes apresentadas no anexo I, quer estas sejam formadas através de funções de estabilidade ou por combinação da matriz de rigidez linear com matrizes geométricas e outras matrizes suas complementares.

forma abreviada de designação.

¹⁷ Como veremos, formulações existem que somam ainda outro tipo de matrizes ao conjunto da matriz de rigidez linear e matriz geométrica.

2.4.1. Matriz Tangente com base em Funções de Estabilidade

Será esta a forma mais «económica» de estabelecer a matriz tangente de uma barra, dado necessitarmos apenas de uma só matriz para o efeito. Refira-se, contudo, que essa vantagem pode ser aparente, pois, formulações deste tipo há cujas funções multiplicadoras dos termos lineares são complicadas, suficientemente, para se tornarem pouco ou nada competitivas em termos de tempo de processamento computacional face à solução homóloga da matriz geométrica.

No sentido de se tentar traduzir a ideia original dos autores em relação aos seus próprios trabalhos, mas fugindo de uma reposição fiel e prolongada, a sua forma de apresentação tentará orientar-se pela seguinte postura:

- 1. Ser sumária e descritiva, mas conservando as designações à data adoptadas, os seus fundamentos teóricos, o alegado desempenho dessa formulação e sua valorização;*
- 2. Observações pontuais serão permitidas, mas sendo sempre perceptível pertencerem a terceiros;*
- 3. A análise e comparação destas formulações será efectuada na parte final deste capítulo.*

Estas observações aplicam-se ao subcapítulo 2.4.2.(matriz tangente com base em matriz geométrica).

2.4.1.1. Chu & Rampetsreiter, 1972

Este trabalho [14] visa um estudo das estruturas que sob um crescimento de carga sofrem mudança significativa de geometria e em que a estrutura, embora mantenha um comportamento material elástico, exhibe uma relação não linear entre carga e deslocamento.

Os seus autores afirmavam que, em geral, há dois tipos básicos de aproximações, sendo a mais comum aquela que se baseia num método incremental de aplicação da carga no qual o carregamento é aplicado por pequenas parcelas e a correspondente posição deformada é obtida através da matriz tangente ou do método de Newton-Rapshon. Na segunda aproximação, a que dão a designação traduzida de método da “carga constante”, pretende-se

manter o nível do carregamento estável e, em estado deformado da estrutura, balancear as forças internas com as externas, sendo então novo carregamento adicionado e repetindo-se o processo descrito. Exposto desta maneira, parece que o primeiro método consiste num processo exclusivamente incremental ou iterativo e o segundo numa sequência incremental e iterativa simultânea.

Em relação a uma formulação trivial de análise não linear geométrica, em que apenas os esforços axiais contribuem para os efeitos de 2ª ordem, estes autores acrescentam a acção da flexão por torção (flexural torsional coupling¹⁸), sendo o efeito do encurtamento das barras por momento flector negligenciado¹⁹.

A encurvadura global de estruturas simétricas carregadas simetricamente também é afluída, sendo expresso que uma estrutura nestas condições pode ter uma configuração de colapso assimétrica²⁰. É exposto um critério de previsão no sentido de prognosticar qual destas formas de colapso terá lugar.

Assume-se que os nós das barras são suficientemente rígidos para que fenómenos como os de empenamento não possam ter lugar.

Na matriz de rigidez tangente utilizada neste trabalho, e que se trouxe a esta discussão, a maioria dos coeficientes das funções de forma devem-se, segundo estes autores, a J.D.Renton em “Stability of Space Frames by Computer Analysis, Journal of the Structural Division, ASCE, Agosto 1962, páginas 81 a 103”.

A sua apresentação faz-se em anexo, observando-se que para pequenos²¹ valores de

¹⁸ Julga-se que significará o momento flector que poderá ser induzido, por exemplo, numa barra de secção aberta sujeita a torção.

¹⁹ É atribuída prova desta ilação a Connor & Chan em “Non-linear Analysis of Elastic Framed Structures, Journal of the Structural Division, ASCE, Junho 1968, págs 1525-1547”

²⁰ Este facto particular, que vai ser abordado de forma superficial em capítulo próprio, não invalida que uma estrutura nestas condições tenha tantos modos de encurvadura idênticos (e cargas críticas correspondentes também semelhantes), em direcções diferentes, quanto os planos de simetria. Sendo isto intuitivo, já que não faria sentido que uma estrutura simétrica carregada simetricamente tivesse uma direcção privilegiada de movimento face às restantes suas equivalentes, quando a energia necessária para realizar esse trabalho só pode ser a mesma para todas as direcções de simetria.

Convém esclarecer que ao falar de colapso não se quer aqui invalidar a hipótese de a estrutura conseguir ainda vir a encontrar uma posição eventual de equilíbrio. Simplesmente, à ocorrência de uma brusca variação de geometria corresponde, presumivelmente, a impossibilidade da sua manutenção em serviço.

²¹ No original encontra-se esta designação de “small values”, sem qualquer quantificação ou sequer qualificação do seu intervalo. Após a aplicação em pequenos exemplos, estabeleceu-se um valor de 0,9 para essa fronteira, sendo apenas um número de carácter empírico e restrito aos casos examinados, sem qualquer fundamento científico. De qualquer forma, o uso dessas funções de Livesley parece ser de carácter geral, pelo que a sua aplicação permanente para qualquer valor poderá ser uma opção final para ultrapassar esta imprecisão.

$U_y \cdot L$ ou de $U_q \cdot L$, há necessidade de substituir as expressões originais por aproximações em desenvolvimentos de séries matemáticas (de Livesley).

Por outro lado, a aplicação do factor redutor $1 + P \cdot x_0 \cdot x_0 / (G \cdot I_t - P \cdot r_0 \cdot r_0)^{22}$ apenas se aplica ao eixo local z , o que faz supor que esta formulação só é válida para secções com pelo menos um eixo de simetria. Ou seja: o bambeamento, enquanto fenómeno provocado por cargas directas nas barras, é negligenciado, mas procura-se contabilizar a flexão induzida por torção de secções assimétricas.

2.4.1.2. José Espada, 1975

José Espada classifica os casos mais usuais que podem exigir uma análise em regime não linear do seguinte modo:

- O comportamento não linear provém da alteração da geometria da estrutura por uma das seguintes causas:
 - $\Rightarrow$ a estrutura é pouco deformável, mas as forças axiais são muito elevadas;
 - $\Rightarrow$ a estrutura é muito deformável;
- O comportamento não linear da estrutura é devido à natureza do material.

O estudo que foi apresentado aplica-se apenas no caso das estruturas pouco deformáveis, mas com importantes forças axiais. A dedução das funções de estabilidade que se seguem encontra-se comentada em [21], incluindo-se apenas os aspectos essenciais no anexo I.

Pelos breves comentários que o autor dedica (Capítulo 12 do seu livro) ao estudo de estruturas que sofram grandes deformações, fica a ideia que este o considera como passível de ser efectuado com esta formulação, desde que se limitem os incrementos de deslocamentos e se realize uma actualização de geometria²³.

2.4.1.3. El-Metwally & Chen, 1987

Este trabalho [20] que foi desenvolvido para estruturas de betão armado pretende ser

²² O significado das variáveis que compõe esta expressão, e no caso de outras em que também pareçam existir omissões, encontra-se explícito nos anexos citados.

²³ Como se verá, a actualização de geometria é o principal requisito e atributo para se poder classificar uma

uma proposta bastante completa para pórticos planos, já que considera três tipos de análise distintas: não linear geométrica, não linear material e extremos de barra flexíveis (adequado à simulação de ligações semi-rígidas e flexíveis).

Dado o âmbito desta tese vamo-nos limitar ao primeiro caso.

El-Metwally & Chen dividem a abordagem da temática da análise não linear geométrica, entrando no domínio dos grandes deslocamentos, em três campos:

1. Efeito P- δ ao nível dos elementos;
2. Efeito P- Δ ao nível da estabilidade global da estrutura;
3. A deformação axial dos membros devido às deformações geométricas induzidas.

Passamos a uma breve descrição destes ítems, no que mais importa para a caracterização deste trabalho.

O efeito P- δ ao nível dos elementos

Este efeito é contabilizado com o recurso a funções de estabilidade²⁴.

A formulação apresentada é derivada para o plano, o que numa transposição para o caso espacial gera a matriz que em apenso se atribui a estes autores.

Como se poderá aí observar as funções de estabilidade variam com o sinal do esforço axial, o que é familiar a qualquer formulação baseada nas mesmas.

O efeito P- Δ ao nível da estabilidade global da estrutura

Este efeito é considerado com a actualização de coordenadas dos nós em cada iteração, reflectindo a interacção entre as cargas e os deslocamentos da estrutura. Uma vez que o equilíbrio dos elementos, e por isso a matriz tangente, é função dos deslocamentos correntes dos nós, esta deve ser desenvolvida com respeito à sua posição deslocada.

A deformação axial dos membros devido às deformações geométricas induzidas

Qualquer mudança na geometria lateral de uma barra causa uma mudança nas suas dimensões, ou seja, provoca deformações geométricas. Estas são significativas quando existem forças laterais ou elevados esforços axiais. Estes autores contabilizam o encurtamento de uma barra devido aos deslocamentos laterais da mesma através da expressão:

$$\lambda = 1/2 \int_0^L [W' (x)]^2 dx$$

formulação como apta a lidar com grandes deslocamentos.

²⁴ Funções de rigidez numa tradução literal do original (“stiffness functions”).

Em que $W(x)$ e $W'(x)$ são a flecha e a rotação de uma secção à distância x do extremo da barra. No caso de não existir qualquer mudança de geometria, excepto na direcção do eixo da barra, surge $\lambda=0$, vindo a deformação da barra na sua forma habitual:

$$dx = PL/(EA).$$

Se $\lambda \neq 0$, a deformação axial total é $dx-\lambda$, podendo este efeito ser equivalentemente simulado pela subtracção da expressão $P = [\lambda EA/L]$ às forças de extremidade de barra quando se pretende calcular as tensões em qualquer secção.

Este efeito não foi incorporado no presente estudo.

2.4.1.4. Ekhande & Selvappalam, 1989

O objecto deste artigo [19] é o estudo da interacção entre o esforço axial e os momentos flectores em vigas-coluna, desenvolvendo, explicitamente, uma formulação espacial de funções de estabilidade.

Tem a particularidade de considerar o efeito da flexão na rigidez axial da barra, o efeito da força axial na rigidez de flexão e na rigidez de oposição à translação. O efeito da força axial na rigidez de torção é desprezado, bem como o efeito da torção na rigidez axial.

Desta maneira, é apresentada uma matriz tangente de uma viga-coluna numa perspectiva tridimensional, usando funções de estabilidade que incluem os efeitos da não linearidade devida a alterações na geometria da estrutura por modificação da matriz elástica linear a qual inclui os efeitos de deformação por esforço transversal.

Na discussão gerada, e no mesmo periódico em que tinha sido publicado, “Journal of the Structural Division, ASCE”, nada surgiu que a censurasse de forma comprometedora, excluindo algumas simplificações que poderiam ter sido efectuadas na apresentação das funções de estabilidade e um reparo quanto à eventual ausência de termos de ordem superior no efeito de encurtamento da barra por flexão²⁵.

2.4.1.5. Kassimali & Abbasnia, 1991

É apresentado um método que pretende tratar a análise de estabilidade de estruturas

²⁵ Que Ekhande & Selvappalam rebateram, respectivamente, com defesa na clareza das deduções e com a

reticuladas elásticas sujeitas a grandes deformações [28].

O método é baseado numa formulação Euleriana²⁶ que toma em consideração o efeito das amplas translações e rotações ao nível dos nós.

As alterações no comprimento da barra provocadas pela tensão axial e “flexural bowing” são tidas em conta. O efeito dessa tensão axial na rigidez de torção é ainda considerado.

O método emprega uma matriz de rotação ortogonal dos nós que determina a sua orientação matricial na configuração deformada (Kassimali, 1976).

Estes autores estabelecem a maior diferença entre uma análise plana e uma espacial, no facto das grandes rotações não poderem ser tratadas sob um ponto de vista de quantidades vectoriais²⁷.

Refere-se que o método agora apresentado se baseia na introdução de melhoramentos em relação a um anterior trabalho de Cenap Oran [36,37] e outro do próprio Kassimali [28], cobrindo o caso estruturas elásticas tridimensionais com secções de dupla simetria submetidas a carregamentos independentes aplicados nos nós. De qualquer forma, e embora se admita qualquer dimensão para o valor das translações e rotações ao nível dos nós, mantém-se a restrição [36,37] da deformação ao nível das barras se conservar suficientemente pequena, para que a teoria da viga-coluna se mantenha válida (o que é pouco coerente com o anunciado acima, mas que é o constante no sumário desse artigo: “A method for large deformation and stability analysis of elastic space frames is presented”).

Como se pode apreciar no anexo I, o número de graus de liberdade destas matrizes não é directamente utilizável para a forma espacial (12x12), existindo uma matriz de transformação apropriada para efectuar o espalhamento para esse nível.

Inclua-se, por último, a equação final de equilíbrio para esta formulação:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} \mathbf{B} \mathbf{t} \mathbf{B}^T \mathbf{R}^T + \sum \mathbf{S}_k \mathbf{R} \mathbf{g}^{(k)} \mathbf{R}^T$$

em que $\mathbf{R}$ é a matriz de transformação de eixos locais para gerais, $\mathbf{B}$ a matriz de transformação que faz o espalhamento da forma condensada para 12 linhas por 12 colunas (configuração espacial), $\mathbf{t}$ é a matriz tangente, $\mathbf{g}^{(k)}$ as matrizes geométricas e $\mathbf{S}_k$ são variáveis relacionadas com os esforços instalados na estrutura.

insignificância do contributo desses termos superiores.

²⁶ Na introdução deste capítulo é efectuada uma pequena elucidação sobre esta temática.

2.4.1.6. Matriz Tangente para Cabos

Este caso é introduzido como exemplo demonstrativo de uma formulação particularmente diferente, não se desprezando, de qualquer maneira, a sua validade e o seu uso no âmbito do programa de cálculo desenvolvido. Todo o texto que se segue, excepto a demonstração de igualdade entre E_{Eq} e E_{Tg} , foi retirado de [41].

Os cabos são elementos flexíveis que resistem apenas a esforços de tracção e aos quais não é possível aplicar as técnicas de análise estrutural usuais para elementos de barra. O problema fundamental nas estruturas atirantadas reside no comportamento não linear do sistema de cabos como resultado das deformadas e correspondentes esforços axiais.

Dos diversos modelos matemáticos dos elementos de cabo distinguem-se:

- Decomposição em série de barras biarticuladas;
- Elementos rectos com módulo de elasticidade equivalente;
- Elementos finitos curvos.

Dada a sua simplicidade, aliada ao facto de se combinarem os efeitos das deformações material e geométrica, foi nesse trabalho escolhido o elemento recto com módulo de elasticidade equivalente.

Esta formulação pressupõe que a força de tracção que se desenvolve na extensão do elemento deformado pode ser substituída pela correspondente força de tracção ao longo da respectiva corda, o que permite modelar o tirante como elemento recto entre pontos de amarração.

O módulo de elasticidade equivalente, E_{Eq} , é definido para determinado nível de tensão σ através da expressão:

$$E_{Eq} = \sigma / (\varepsilon_c + \varepsilon_e) \quad (2.1)$$

em que ε_c e ε_e são as extensões devidas, respectivamente, à alteração de curvatura do cabo e ao comportamento elástico do material e que se relacionam com a tensão instalada através dos módulos de elasticidade E_{Eq} e E .

A expressão anterior pode apresentar-se em função de E_{Eq} e E :

$$E_{Eq} = E_c E / (E_c + E) \quad (2.2)$$

em que:

²⁷ Uma discussão envolvendo esta temática é lançada em 2.4.2.6. e 3.6..

$$E_c = 12 \sigma^3 / (\gamma L_{ph})^2 \quad (2.3)$$

pelo que:

$$E_{Eq} = E / (1 + [(\gamma L_{ph})^2 / (12 \sigma^3)] E) \quad (2.4)$$

pois, substituindo E_c em E_{Eq} , vem:

$$\begin{aligned} E_{Eq} &= E 12 \sigma^3 / (\gamma L_{ph})^2 / (12 \sigma^3 / (\gamma L_{ph})^2 + E) \\ E_{Eq} &= E 12 \sigma^3 / (12 \sigma^3 (\gamma L_{ph})^2 / (\gamma L_{ph})^2 + E (\gamma L_{ph})^2) \\ E_{Eq} &= E 12 \sigma^3 / (12 \sigma^3 + E (\gamma L_{ph})^2) \end{aligned}$$

se dividirmos numerador e denominador por $12 \sigma^3$:

$$E_{Eq} = E / (1 + E (\gamma L_{ph})^2 / 12 \sigma^3)$$

resulta a expressão (2.4).

Sendo o módulo de elasticidade secante entre dois níveis de tensão σ_i e σ_f dado por:

$$E_{Sec} = E / (1 + [(\gamma L_{ph})^2 (\sigma_i \sigma_f) / (24 \sigma_i^2 \sigma_f^2)] E) \quad (2.5)$$

com γ como peso específico do cabo e L_{ph} o comprimento deste em projecção horizontal.

Como curiosidade, refira-se que para se verificar $E_{Sec} = E_{Eq}$ tem que se observar:

$$1/12\sigma^3 = (\sigma_i + \sigma_f) / (24 \sigma_i^2 \sigma_f^2) \text{ ou } \sigma^3 = 2 \sigma_i^2 \sigma_f^2 / (\sigma_i + \sigma_f)$$

que é uma expressão coerente porque se σ_i e σ_f fossem ambas iguais a σ :

$$\sigma^3 = 2 \sigma^2 \sigma^2 / (\sigma + \sigma) = 2 \sigma^4 / (2\sigma) = \sigma^3$$

O efeito não linear associado à curvatura dos cabos atirantados acentua-se com o aumento da projecção horizontal do seu comprimento e com a redução da tensão instalada. No entanto, para o caso de cabos em aço e para valores de tensão situados acima de 40% do valor característico da tensão de rotura dos tirantes, a que correspondem a valores correntemente utilizados no contexto do binómio segurança e economia no dimensionamento destes elementos, o efeito da alteração da curvatura dos cabos atenua-se bastante.

Os tirantes podem ser, assim, modelados como elementos rectos com a rigidez axial definida a partir do módulo de elasticidade equivalente, tangente ou secante.

Adoptando, então, um elemento recto com módulo de elasticidade tangente chegamos à seguinte matriz de rigidez não linear para cabos:

$$[K_T] = A E_{Tg} / L_C \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

Em que L_C é a distância entre pontos de amarração.

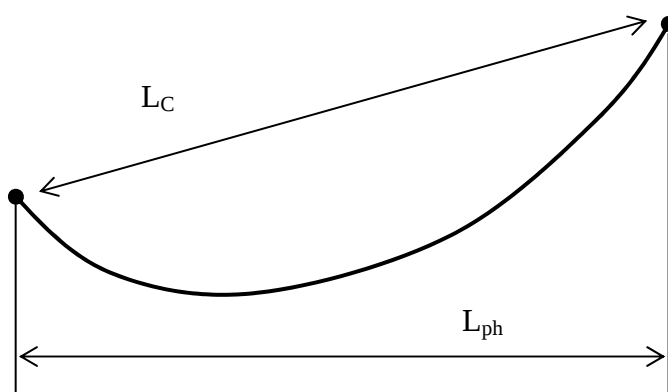


Figura 2.18: Elemento de cabo/tirante.

2.4.2. Matriz Tangente com base em Matriz Geométrica

Outra forma de constituir uma análise não linear geométrica é por adição à matriz de rigidez linear de uma outra matriz designada, habitualmente, de matriz de rigidez geométrica ou, simplesmente, matriz geométrica. Sendo, como se sabe, este conjunto nomeado por matriz tangente e tendo a sua equação formal elementar a seguinte aparência:

$$[K_T] \{U\} = ([K_L] + [K_G]) \{U\} = \{P\} \quad (2.6)$$

encontrando-se o significado destas variáveis, e de outras que irão surgir, na simbologia colocada no início deste texto.

Esta matriz geométrica pode ser complementada por outras matrizes do mesmo género ou terceiras acessórias, deduzidas para cada formulação.

O uso da matriz geométrica tem duas capitais e distintas vantagens sobre as funções de estabilidade:

1. Um significado físico mais perceptível, porquanto se demarca da matriz de rigidez linear a função de produzir os efeitos de 2ª ordem;
2. A exclusividade no cálculo de cargas críticas e modos de instabilidade associados.

Não será imprudência afirmar que tem sido esta a forma privilegiada a que os investigadores têm recorrido para construir os seus modelos nos tempos mais recentes, muito

embora as funções de estabilidade não tenham sido completamente abandonadas.

2.4.2.1. Portel & Powell, 1971

Estes autores apresentaram, conforme é transcrito de [46], uma matriz geométrica idêntica à mais usual e que será adiante discutida, acrescentando, simplesmente, um termo no grau de liberdade de translação segundo o eixo local x . Curiosamente, dois anos antes tinha Powel publicado a solo um artigo [39] em que esse termo ainda não estava presente, sendo essa matriz geométrica também apelidada de matriz da tensão inicial e assumindo a forma trivial desde que não se considerasse a combinação da acção da flexão, o que faz sentido de acordo com as restantes teorias de outros autores.

A matriz de rigidez tangente completa, considerando, pois, o contributo da flexão nos efeitos de 2ª ordem, teria numa forma condensada e em coordenadas locais a seguinte aparência (esta condensação faz desaparecer os dois graus de liberdade lineares normais à barra e um outro também linear mas segundo o seu próprio eixo):

$$K_T = 2EI/L \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & A/(2I) \end{bmatrix} + EA \begin{bmatrix} \frac{L(12v_1^2 - 3v_1v_2 + v_2^2)}{140 + 2v_3/15} & \frac{-L(3v_1^2 - 4v_1v_2 + 3v_2^2)}{280 - v_3/30} & \frac{(4v_1 - v_2)}{30} \\ \frac{-L(3v_1^2 - 4v_1v_2 + 3v_2^2)}{280 - v_3/30} & \frac{L(12v_2^2 - 3v_1v_2 + v_1^2)}{140 + 2v_3/15} & \frac{(4v_2 - v_1)}{30} \\ \frac{(4v_1 - v_2)}{30} & \frac{(4v_2 - v_1)}{30} & 0 \end{bmatrix}$$

Isto para o caso plano e considerando os dois graus de liberdade de rotação e um de translação axial da barra, dispondo do seguinte sistema de eixos plano local condensado:

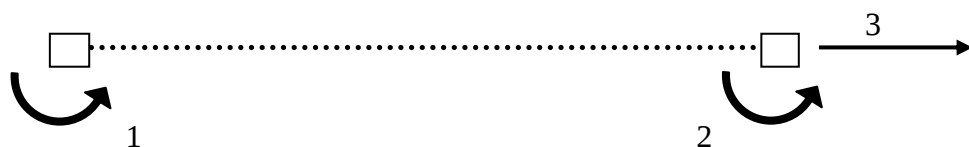


Figura 2.19: Sistema de eixos plano local condensado ou reduzido.

Sendo v_1 e v_2 as deformações de flexão (rotações) e v_3 a deformação axial (extensão), no caso de se pretender apenas o contributo do esforço axial v_1 e v_2 são nulos, ficando a

matriz geométrica com seu o aspecto mais comum:

$$K_T = 2EI/L \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & A/(2I) \end{bmatrix} + EA \begin{bmatrix} 2v_3/15 & -v_3/30 & 0 \\ -v_3/30 & 2v_3/15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Powell afirmava ainda que, em virtude da matriz acima exibida, uma simples soma entre a matriz de rigidez linear e a matriz das tensões iniciais não equivaleria à verdadeira matriz tangente.

Contudo, como a convergência podia ser obtida com um método do tipo Newton-Raphson, sem o uso da matriz tangente exacta, esta aproximação à matriz verdadeira podia ser satisfatória. Seria mesmo correcta, quando do exame da estabilidade de estruturas solicitadas axialmente nas suas colunas geometricamente perfeitas²⁸.

Formulações com o mesmo sustentáculo ou variações contíguas, foram mais tarde apresentadas [6] com maior ou menor êxito.

2.4.2.2. Tebedge & Tall, 1973

É por estes investigadores apresentada uma formulação que visa o estudo da estabilidade de elementos do tipo viga-coluna, sujeitas a condições de carga e suporte genéricos, através de um modelo de elementos finitos [44]. O alcance deste trabalho pretendia abranger colunas sujeitas a carga distribuída, colunas de secção aberta, colunas pré-esforçadas, estruturas espaciais e elementos com problemas de estabilidade lateral, dando-se, inclusivamente, exemplos de aplicação.

Em virtude do leque de tipos de elementos enunciados e consequentes peculiaridades que lhes estão vinculados, percebe-se que esta formulação pretende ter em conta uma boa parte dos efeitos não lineares geométricos próprios da viga-coluna. Falamos, mais precisamente, de diversos tipos de fenómenos de instabilidade que podem ser causados pelo

²⁸ Julga-se que é esta afirmação que está por trás ou, pelo menos, em consonância com o comentário à página 173 de [46], Yang & Kuo, no qual se afirma que embora este tipo de matrizes simplificadas não passem no “rigid body test”, sendo impróprias para um processo incremental e iterativo, conseguem obter bons resultados no cálculo de valores e vectores próprios na análise da instabilidade global da estrutura.

esforço axial que, embora não seja o único responsável por sintomas estruturais secundários, é o principal no caso destes elementos. Como se vai poder constatar, várias matrizes foram elaboradas para cada um destes efeitos.

Os resultados atingidos foram classificados pelos seus autores de satisfatórios em precisão e bons na convergência.

Os deslocamentos que introduzem não linearidade geométrica em vigas-colunas, quando se tornam “grandes”, são classificados da seguinte maneira:

- Deslocamentos axiais;
- Deslocamentos transversais;
- Deslocamentos angulares de torção.

São incorporadas em anexo, para o plano em versão condensada, as matrizes geométricas constitutivas correspondentes a estes tipos de deslocamentos.

Desta formulação resulta uma matriz geométrica que terá tantas matrizes componentes quantos os efeitos que se queiram agregar, assim:

$$[K_T] = [K_L] + [K_G]_i, \text{ com } i = 1, 2, \dots, m \quad (2.7)$$

A passagem destas matrizes para a configuração geral no plano ou no espaço poderá ser feita através de apropriada matriz de transformação que constitua a equivalência e faça o correspondente espalhamento.

2.4.2.3. Nedergaard & Pederson, 1985.

Esta interessante formulação [34] tem por objectivo um eficiente processo de análise de estruturas espaciais, com um eventual carácter de elevada não linearidade, conseguindo tal desígnio com um só elemento que deverá poder simular qualquer barra prismática.

A deformação por esforço transversal é incluída, mas o bambeamento é desprezado.

O procedimento numérico é baseado na técnica Bergan's “Current Stiffness Parameter”²⁹ (CSP), conseguindo-se com a sua utilização a passagem de pontos críticos ou limites como os do tipo “snap-through”³⁰, sendo a actualização de coordenadas efectuada

²⁹ Ou parâmetro de rigidez corrente, uma variável que visa quantificar o estado da rigidez global da estrutura, comparando com a situação inicial não carregada e não deformada. Este tipo de parâmetro é usado por vários autores, muitas vezes cada um com a sua versão pessoal.

³⁰ Sendo estes pontos aqueles que correspondem a máximos ou mínimos de carregamento no caso de fenómenos

após cada incremento.

Uma vantagem desta formulação é que a matriz geométrica pode ser qualquer uma deduzida por outro autor, pois, a novidade desta formulação é o aparecimento de mais uma matriz e um vector suplementar, resultando a equação final de equilíbrio não linear a seguinte:

$$[K_T] \{\Delta d\} = ([K_L] + [K_{G1}] + [K_{G2}]) \{\Delta d\} = \{f\} - \{f_c\}$$

Em que :

- $[K_L]$ é a matriz de rigidez linear.
- $[K_{G1}]$ é uma matriz geométrica vulgar.
- $[K_{G2}]$ é a nova matriz complementar que é função da deformação do elemento e que relaciona a deformação axial e a lateral.
- $\{\Delta d\}$ vector acréscimo dos deslocamentos nodais.
- $\{f\}$ vector das cargas exteriores iniciais.
- $\{f_c\}$ correcção ao vector das cargas exteriores iniciais devido aos deslocamentos do elemento.

2.4.2.4. Chajes & Churchill, 1987

Num estudo dedicado, exclusivamente, a análise não linear geométrica elástica de estruturas planas, são apresentados [6] três diferentes procedimentos que designam por:

1. Método linear incremental;
2. Método não linear incremental;
3. Método directo.

Este artigo tem como finalidade elucidar os aspectos básicos que envolvem a construção das curvas carga-deslocamento não lineares por elementos finitos.

Os procedimentos em si (método linear incremental, método não linear incremental e método directo) vão ser abordados no capítulo seguinte, ainda que não necessariamente com estas designações, pelo que não se comentam aqui. Vamos, isso sim, debruçar-nos sobre as matrizes que estes autores envolvem na sua formulação.

Matriz de Rigidez Incremental

Esta matriz consiste na soma de quatro parcelas distintas:

de “snap-through”, ou também a máximos ou mínimos de deslocamentos no caso de “snap-back”.

$$[K_{\text{Inc}}] = [K_L] + [K_G] + AE/2 [K_1] + AE/3 [K_2] \quad (2.8)$$

Dos termos desta equação só $[K_1]$ e $[K_2]$ são relativa novidade, já que $[K_L]$ é matriz de rigidez linear e $[K_G]$ a usual matriz geométrica. De qualquer modo e mantendo-nos fiéis ao texto original:

$[K_{\text{Inc}}]$ – matriz de rigidez incremental.

$[K_L]$ – matriz de rigidez linear convencional com flexão e comportamento axial desligado.

$[K_G]$ – matriz de funções lineares da força axial N , presentes no início do passo incremental. Esta matriz é, normalmente, chamada matriz de tensão inicial e dá uma aproximação de 1ª ordem à inter-relação entre esforço axial e deslocamento transversal.

$[K_1]$ e $[K_2]$ – consistem, respectivamente, nos termos lineares e funções quadráticas dos deslocamentos incrementais. Estas matrizes contabilizam as mudanças que ocorrem nos esforços axiais e nos deslocamentos transversais durante o passo incremental de carregamento.

Ilustra-se o procedimento incremental e iterativo do método não linear incremental constante nesse texto que, mesmo em sentido lato, não tem a mesma aparência da teoria geral para este processo.

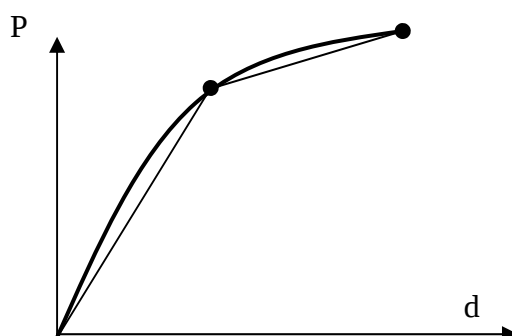


Figura 2.20: Método não linear incremental (Chajes & Churchill).

A diferença consiste no facto da trajectória recta dos incrementos ser secante e não tangente à curva não linear, o que faz, pelo menos, supor que existe uma exactidão absoluta nos pontos de intersecção entre a curva de cálculo e a curva real. Não se prevendo que tal se torne possível sem um ciclo iterativo complementar que não se vislumbra na figura, talvez estas linhas não pretendam ser essa trajectória de cálculo, propriamente dita, mas apenas a ligação final entre pontos convergidos no intervalo de incrementos. Também, dada outra

situação que de seguida se vai abordar (matriz de rigidez tangente), e em que $[K_1]$ e $[K_2]$ se desvanecem por se assemelharem desnecessárias, parecem estas matrizes corresponderem, de facto, a uma actualização dos esforços no incremento.

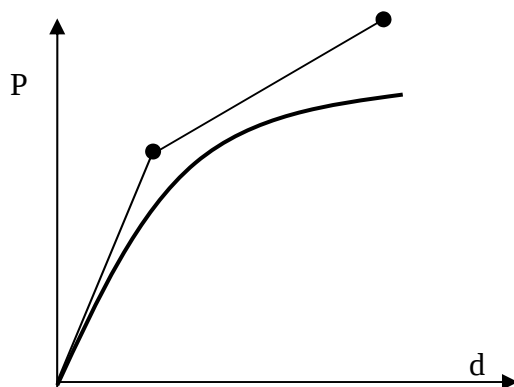


Figura 2.21: Método linear incremental (Chajes & Churchill).

Matriz de Rigidez Tangente

Em alguns casos, os efeitos não lineares devidos às mudanças nos esforços e nas deformações ocorridas durante os passos incrementais são muito pequenos, se comparados com os efeitos não lineares de forças e deformações que já existiam no início desse passo. Quando é esse o caso $[K_1]$ e $[K_2]$ podem ser negligenciadas, tomando a matriz de rigidez a seguinte forma:

$$[K_T] = [K_L] + [K_G] \quad (2.9)$$

Esta matriz depende, somente, das forças internas e da deformação existente no início do passo de carregamento, chamando-se, como habitualmente, matriz de rigidez tangente.

Matriz de Rigidez Secante (método directo)

Esta matriz relaciona deslocamentos totais com cargas totais, podendo ser tomados os mesmos procedimentos que foram adoptados para a determinação da matriz de rigidez incremental, embora agora a deformação e tensão iniciais sejam nulas.

Nesta conformidade, a matriz de rigidez secante que relaciona os deslocamentos totais com as forças totais tem as seguintes três parcelas:

$$[K_{Sec}] = [K_L] + AE/2 [K_1] + AE/3 [K_2] \quad (2.10)$$

A única diferença no tratamento do processo de cálculo está no facto de para esta matriz os deslocamentos referidos a $[K_1]$ e $[K_2]$ serem os totais, enquanto na situação anterior eram os incrementais.

Pertinente será referir que apelidar este método da matriz secante ou método directo é irrelevante, já que um método directo é sempre um método de matriz secante, por si só.

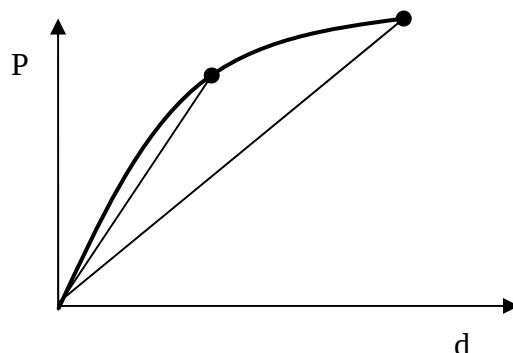


Figura 2.22: Método directo (Chajes & Churchill).

Outro comentário é que a parcela $AE/2 [K_1] + AE/3 [K_2]$ acaba por substituir a matriz de tensões iniciais (a matriz geométrica, no fundo) na forma clássica de uso do método directo.

2.4.2.5. Cook et al, 1989

Esta matriz geométrica é, inequivocamente, a mais divulgada e utilizada de todas as discutidas ou omitidas [1,2,5,18,38,41,46]. A razão desta generalizada divulgação e adopção prende-se, com certeza, com a simplicidade e eficácia desta formulação.

Aparece neste trabalho atribuída a Cook (1989) [46], mas será a sua origem bem mais remota. Esta opção deveu-se ao facto de não ter sido possível encontrar, de forma explícita e indubitável, o seu atribuível autor.

Em termos formais, limita-se à equação mais simples de um modelo não linear geométrico com base na matriz tangente:

$$([K_L] + [K_G]) \{U\} = \{P\} \quad (2.11)$$

sendo $[K_G]$ derivada da suposição de serem os esforços axiais os únicos com interferência no aparecimento de efeitos de segunda ordem.

Dada, pois, a universalidade e importância desta formulação, vai proceder-se à sua dedução sumária para o plano e na forma condensada, sendo a sua transposição para o espaço imediata, já que não é admitida qualquer hipótese de interinfluência entre os eixos locais y e z .

Ao termos em conta os esforços axiais $N(x)$ existentes nas barras, aplicando-se o

princípio dos trabalhos virtuais, estes alteram os resultados obtidos, previamente, em 2.2 para os elementos k_{ij} da matriz de rigidez linear.

Definam-se, então, os coeficientes k_{Gij} como aqueles que terão de somar-se aos anteriormente deduzidos k_{ij} para que esse efeito dos esforços axiais seja contabilizado. Estes novos coeficientes k_{Gij} representam, deste modo, a força na coordenada nodal i produzida pelas forças axiais $N(x)$ ao existir um deslocamento unitário na coordenada nodal j , mantendo-se nulos todos os restantes deslocamentos [1].

Aplicando-se o princípio dos trabalhos virtuais para $\delta_2=1$, à viga deformada por uma rotação $\delta_3=1$, deduz-se o trabalho das forças externas:

$$W_{\text{ext}} = \delta_2 k_{G23} = k_{G23} \quad (2.12)$$

sendo o trabalho interno a considerar apenas o produzido pelas forças axiais:

$$W_{\text{int}} = \int N(x) \delta_e \quad (2.13)$$

representando δ_e a projecção horizontal do encurtamento axial experimentado pelo troço dx , conforme figura (2.23).

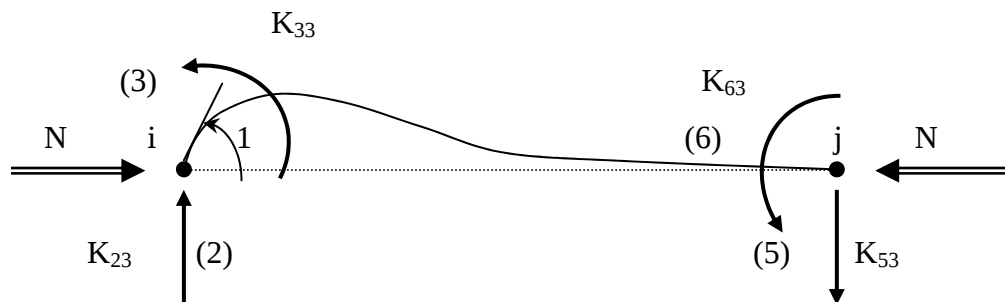


Figura 2.23: Matriz de rigidez geométrica: grau de liberdade de rotação e reacções correspondentes.

Das considerações geométricas que se podem estabelecer surge a equação:

$$\delta_e / d\psi_2(x) = d\psi_3(x) / dx, \text{ pelo que:} \quad (2.14)$$

$$\delta_e = (d\psi_3(x) / dx) (d\psi_2(x) / dx) dx = \psi_2'(x) \psi_3'(x) dx \quad (2.15)$$

$$k_{G23} = \int N(x) \psi_2'(x) \psi_3'(x) dx$$

Substituindo δ_e de (2.15) na equação (2.13) e procedendo à sua integração, retira-se que:

generalizando aos restantes elementos, obtemos:

Por último, considerando $N(x)$ constante ao longo da barra construímos a equação

matricial de rigidez geométrica:

$$k_{Gij} = \int N(x) \psi_i'(x) \psi_j'(x) dx$$

$$K_G = N \begin{array}{c|c} I & J \\ \hline \begin{array}{cc} 1.2/L & 0.1 \\ 0.1 & 0.4/3L \\ -1.2/L & -0.1 \\ 0.1 & -0.1/3L \end{array} & \begin{array}{cc} -1.2/L & 0.1 \\ -0.1 & -0.1/3L \\ 1.2/L & -0.1 \\ -0.1 & 0.4/3L \end{array} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} i \\ \\ j \end{array}$$

O que, de acordo com os conceitos já descritos, nos conduz à matriz tangente reduzida para o caso em exemplo:

$$K_T = \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L \end{array} & \begin{array}{cc} -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L \\ 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 4EI/L \end{array} \\ \hline \end{array} + N \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 1.2/L & 0.1 \\ 0.1 & 0.4/3L \\ -1.2/L & -0.1 \\ 0.1 & -0.1/3L \end{array} & \begin{array}{cc} -1.2/L & 0.1 \\ -0.1 & -0.1/3L \\ 1.2/L & -0.1 \\ -0.1 & 0.4/3L \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Transferindo esta situação condensada para o espaço e em função do sistema de eixos escolhido, fixa-se a posição dos graus de liberdade dentro da matriz de rigidez, bem como a relação entre os sinais dessas posições.

Uma matriz tangente muito útil será a específica para barras sem condições de continuidade para momentos, já que representa uma configuração comum em muitas estruturas, nomeadamente, nas peças que realizam funções de contraventamento. Neste panorama insere-se, também em anexo numa extensão para o espaço, a matriz geométrica correlativa [2].

Interessante comparação seria a que poderia estabelecer-se entre o uso da matriz geométrica de continuidade e a presente, ensaiando, por exemplo, para o caso de uma treliça, já que sendo uma estrutura para a qual não se desenvolvem apreciáveis momentos nas suas secções, estas formulações deveriam oferecer resultados semelhantes, mesmo no que ao estudo de cargas críticas concerne.

Como curiosidade, cite-se ainda a anotação que em [41] se faz ao desenvolvimento em

série de Taylor da matriz de rigidez total exacta. Esta expansão permite obter uma formulação idêntica à mais usual matriz tangente, mas provida de termos complementares:

$$[K_{\text{Exacta}}] = [K_{\text{T usual}}] + [K_{\text{G complementares}}] = [K_L] + [K_G] + [K_{G2}] + [K_{G3}] + \dots$$

de onde pode concluir-se que a matriz de rigidez geométrica constitui uma aproximação linear, em ordem ao esforço axial, da matriz de rigidez total exacta³¹.

A autoria deste modelo é atribuída a P.C.Dumir, D.C.Saha e S.Sengupta em “Beam Column Method for Frames under Distributed Loads, Computers & Structures, 46, 1993”.

Constata-se que estas matrizes complementares perdem, sucessivamente, a importância conforme o seu grau aumenta. Verificando-se que já para a matriz K_{G2} o seu poder de intervenção é, substancialmente, pequeno, mesmo para valores muito elevados do esforço axial.

Aplique-se, por exemplo, a um pilar fortemente carregado e de considerável altura:

$$N = 1,000,000 \text{ N} = 100 \text{ toneladas}$$

$$L = 10 \text{ metros}$$

$$E = 25E9 (\approx B20/25)$$

$$I = 5.21E-3 \text{ m}^4 (\text{secção } 50\text{cm} \times 50 \text{ cm})$$

Em $[K_{G2}]$: $NL^2/(EI) = 0.77$, valor que nada significa na ordem de grandeza dos elementos de uma matriz tangente nem tão pouco em comparação directa com a matriz geométrica ordinária, pois, em $[K_G]$ trivial o termo equivalente resulta em: $N/L/100 = 1000$, ou seja, a intervenção efectiva de $[K_{G2}]$ face à de $[K_G]$ é, neste caso, cerca de 1000 vezes inferior³².

2.4.2.6. Petr Krysl, 1993

Petr Krysl [29] lança uma curiosa formulação tendo em vista a análise não linear de estruturas reticuladas espaciais, desenvolvendo para o efeito um conjunto completo de matrizes que possibilita uma análise elástica tridimensional de elementos de viga prismáticos e com duplo eixo de simetria nas suas secções.

³¹ Como se pôde ver a matriz de rigidez geométrica é um complemento da matriz de rigidez linear, considerando o efeito da existência de um esforço axial na configuração deformada da sua dedução.

³² E isto admitindo ainda que, na forma já explicitada, os termos na matriz $[K_G]$ são 100 vezes inferiores aos de $[K_{G2}]$.

Como resultado argumenta este autor terem-se conseguido expressões, relativamente, mais fáceis de entender do que outras congéneres que invocam rotações e momentos semitangenciais³³.

Classifica estas matrizes da seguinte maneira:

- Completas no sentido de a tensão resultante estar incluída na tensão inicial e a natureza do movimento espacial dos nós ser tida em conta;
- Transparentes dado que todas as matrizes se obtêm em expressões claras, onde o significado dos vários termos pode ser acompanhado e entendido.

É utilizado um elemento finito isoparamétrico de viga com dois nós, habilitado no domínio dos grandes deslocamentos (lineares e de rotação) e pequenas deformações. O material é elástico e só são consideradas cargas concentradas conservativas. A matriz de rigidez tangente final não é simétrica, tendo a seguinte aparência:

$$[K_T] = [K_L] + [K_G] + [K_C] \quad (2.16)$$

em que $[K_L]$ e $[K_G]$ são matrizes já conhecidas e $[K_C]$ é a chamada matriz de rigidez de carga, que representa o contributo dos momentos semitangenciais para os efeitos de não linearidade geométrica.

Como já foi referido em 2.2, esta formulação pretende fornecer um aperfeiçoamento em termos de resposta elástica (dado lhe ter incluído um factor de correcção ao esforço transversal - “shear correction factor” - e uma constante de torção - “torsional constant”), conseguindo-se deste modo evitar o “locking”³⁴ do elemento devido ao esforço transversal.

A maior novidade é o aparecimento de uma matriz apelidada de matriz de rigidez de carga, cujo objectivo será ter em atenção os momentos induzidos que vamos introduzir neste trabalho no próximo item (2.4.2.7).

Dado serem esta e a seguinte as duas formulações mais recentes e originais conhecidas, optou-se por incluir integralmente neste corpo principal as suas matrizes completas que incluem os chamados *momentos induzidos*.

Matriz geométrica com factor de correcção ao esforço transversal e constante de torção para barra, por Petr Krysl [29]:

³³ Conceitos a tratar nos próximos itens (2.4.2.7 e 2.4.2.8), pelo que não são aqui explanados.

³⁴ Sobrevalorização da parcela de rigidez de corte em vigas muito esbeltas.

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{K}_G & {}^2\mathbf{K}_G & -{}^1\mathbf{K}_G & {}^3\mathbf{K}_G \\ {}^2\mathbf{K}_G & {}^4\mathbf{K}_G + {}^6\mathbf{K}_G & {}^2\mathbf{K}_G^T & -{}^4\mathbf{K}_G + {}^5\mathbf{K}_G \\ -{}^1\mathbf{K}_G & {}^2\mathbf{K}_G^T & {}^1\mathbf{K}_G & -{}^3\mathbf{K}_G \\ {}^3\mathbf{K}_G & -{}^4\mathbf{K}_G + {}^5\mathbf{K}_G & -{}^3\mathbf{K}_G & {}^4\mathbf{K}_G - {}^6\mathbf{K}_G \end{bmatrix}$$

Sendo:

$${}^1\mathbf{K}_G = N/EL \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} & -m_y-k_z & m_z-k_y \\ m_y+k_z & & \\ -m_z-k_y & & \end{bmatrix}$$

$${}^3\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} & m_y-k_z & -m_z-k_y \\ -m_y+k_z & & \\ m_z+k_y & & \end{bmatrix}$$

$${}^4\mathbf{K}_G = N/LA \begin{bmatrix} I_y+I_z & & \\ & I_y & \\ & & I_z \end{bmatrix}$$

$${}^5\mathbf{K}_G = M_x/4 \begin{bmatrix} & & \\ & & 1 \\ & -1 & \end{bmatrix}$$

$${}^5\mathbf{K}_G = -M_x/4 \begin{bmatrix} & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix}$$

Com: $k_y = F_y/L$, $k_z = F_z/L$, $m_y = M_y/L$, $m_z = M_z/L$.

Matriz de rigidez de carga com factor de correcção ao esforço transversal e constante de torção para barra, por Petr Krysl [29]:

$$\mathbf{K}_C = \begin{bmatrix} & & & \\ & {}^i\mathbf{K}_C & & \\ & & & \\ & & & {}^j\mathbf{K}_C \end{bmatrix}$$

Sendo:

$${}^i\mathbf{K}_C = \begin{bmatrix} & -{}^iM_z & {}^iM_y \\ & & -\frac{1}{2} {}^iM_x \\ & \frac{1}{2} {}^iM_x & \end{bmatrix}$$

$${}^j\mathbf{K}_C = \begin{bmatrix} & -{}^jM_z & {}^jM_y \\ & & -\frac{1}{2} {}^jM_x \\ & \frac{1}{2} {}^jM_x & \end{bmatrix}$$

2.4.2.7. Yang & Kuo, 1994

Estamos perante a segunda formulação para a análise não linear geométrica de estruturas reticuladas dos tempos modernos (anos 90) que se inclui neste trabalho, sendo a primeira a anterior (2.4.2.6.).

Julgo poder considerar-se Yang um dos autores que constituem, actualmente, a vanguarda da investigação neste campo. Alguns dos seus trabalhos anteriores [47,48] traduziam já uma certa notoriedade no estudo do problema da análise não linear geométrica.

A teoria desenvolvida neste trabalho tem a mais actual e completa generalidade para a análise de estruturas reticuladas, tendo em conta as seguintes limitações:

- Todas as ligações de barra são de continuidade (embora os autores adiantem que a possibilidade de conexões semi-rígidas pudesse ser acrescentada, facilmente);
- As cargas são unicamente aplicadas nos nós (também aqui é avançada a rápida

adaptação à possibilidade de considerar cargas nas barras);

- bambeamento e outros efeitos que induzam torções ou flexão secundárias são negligenciados.

Olhando, então, para aquela que se supõe ser a sua mais recente obra publicada no formato de livro [46], logo se compreende que seria tarefa despropositada tentar transportar para este texto todos os conceitos aí traduzidos, ou insistir em tornar claro assuntos nem sempre fáceis de descrever. Por outro lado, a análise de algumas matérias, já discutidas ou a discutir, não interessaria aqui repetir, limitando-se as referências às mesmas ao absolutamente necessário para as entrosar com o que se pretende expor. Referimo-nos, nomeadamente, aos seguintes pontos: equilíbrio de barra, obtenção de esforços, matrizes de transformação, actualização de geometria, técnicas incrementais e iterativas. Daí que apenas se vão exhibir, superficialmente, os aspectos particulares e cruciais do seu conteúdo, ficando uma amostra da profundidade e abrangência a que se tenta chegar nesta publicação.

O desenvolvimento do modelo pretende os seguintes objectivos:

- 1) Especificação das leis constitutivas incrementais;
- 2) Qualidade dos elementos;
- 3) Condições de equilíbrio nos nós;
- 4) Propriedades rotacionais dos momentos;
- 5) Cálculo de esforços;
- 6) Efeitos das grandes rotações.

Outra característica que o modelo pretende assegurar é a da compatibilidade de deslocamentos, entendendo-se esta como a propriedade de todos os elementos que têm nós comuns sofrerem idênticos deslocamentos nos seus extremos.

Esta formulação assume duas posturas diferentes no que à matriz tangente diz respeito, conforme se trate da sua montagem para a resolução dos deslocamentos gerais da estrutura ou para o cálculo dos esforços para cada elemento. No primeiro caso esta matriz tem a seguinte composição:

$$[K_T] = [K_L] + [K_G] + [K_I] + [K_M] \quad (2.17)$$

e no segundo:

$$[K_T] = [K_L] + [K_G] + [K_I] \text{ ou } [K_T] = [K_L] + [K_G] + [K_J] \quad (2.18)$$

Uma das suas essenciais características acima mencionadas e da qual resultam as

matrizes $[K_L]$, $[K_M]$ e $[K_J]$ é o facto desta formulação ter em conta as propriedades rotacionais dos momentos. Segundo estes investigadores, a sua não contemplação é considerada grave negligência, dado no espaço existirem rotações tridimensionais a cuja influência específica é preciso atender, sob pena de não ficar garantido o equilíbrio global da estrutura ao nível dos nós onde concorrem os seus elementos. Ficando, por conseguinte, uma utilização simples da equação clássica não linear geométrica, $([K_L] + [K_G]) \{U\} = \{P\}$, aquém do satisfatório no caso da análise espacial.

Propriedades Rotacionais dos Momentos

É, pois, uma das partes distintiva desta formulação a que se refere à inclusão das propriedades rotacionais dos momentos³⁵.

Conceptualmente, uma força conservativa directa é definida como inalterável em direcção e magnitude quando a estrutura à qual está aplicada se move. Se tal se verifica com fidelidade para as forças, desde que mantenhamos o mesmo sistema de coordenadas, já o mesmo não se passa para os momentos. Para estas modificações tem lugar, em geral, quando sujeitos a rotações tridimensionais.

Designaremos os momentos gerados por rotações tridimensionais por *momentos induzidos* que de forma qualitativa e muito sintética se podem distinguir:

- I. *Momento axial*: quando a sua direcção e magnitude se mantêm na presença de rotações finitas;
- II. *Momento tangencial*: se segue, completamente, a rotação tridimensional efectuada;
- III. *Momento semitangencial*: quando os momentos induzidos gerados por uma rotação particular são iguais a metade dos criados por um momento tangencial da mesma dimensão;
- IV. *Momento quasitangencial de primeira e segunda ordem*: se apenas um simples momento é induzido para um eixo perpendicular ao do momento inicial (sendo a designação de primeiro e segundo apenas, meramente, distintiva do eixo em causa - y ou z).

³⁵ Isto não deverá levar a supor serem estes os primeiros autores a introduzirem tais conceitos que são bastante mais antigos, sendo usados no estudo de peças em Engenharia Mecânica.

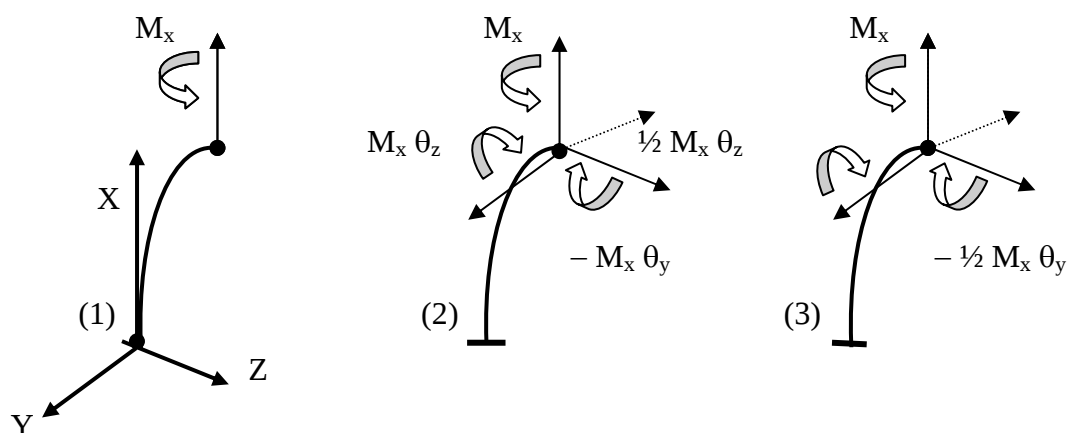


Figura 2.24: Momento: (1) Axial, (2) Tangencial, (3) Semitangencial.



Figura 2.25: Momento: (4) Quasitangencial de 1ª ordem, (5) Quasitangencial de 2ª ordem.

Estamos, deste modo, em presença daquilo que se poderá designar, em termos simples, da quantificação da mútua influência entre momentos no espaço. Apresenta-se uma tabela que pretende explicitar essas afinidades.

Como se poderá reparar nas matrizes complementares à matriz geométrica que se seguem, estas relações estão nelas traduzidas em função dos graus de liberdade respectivos do sistema.

QUADRO 2.2

Momentos induzidos por rotações de vários mecanismos				
Origem		Rotações		
		θ_X	$\theta_Y (= -w')$	$\theta_Z (= -v')$
M_X	ST		$\Delta M_Z = -\frac{1}{2} M_X \theta_Y$	$\Delta M_Y = \frac{1}{2} M_X \theta_Z$
	QT-1		$\Delta M_Z = 0$	$\Delta M_Y = M_X \theta_Z$
	QT-2		$\Delta M_Z = M_X \theta_Y$	$\Delta M_Y = 0$
M_Y	ST	$\Delta M_Z = M_Y \theta_X$		$\Delta M_X = 0$
	QT-1	$\Delta M_Z = 0$		$\Delta M_X = -M_Y \theta_Z$
	QT-2	$\Delta M_Z = \frac{1}{2} M_Y \theta_X$		$\Delta M_X = -\frac{1}{2} M_Y \theta_Z$
M_Z	ST	$\Delta M_Y = -M_Z \theta_X$	$\Delta M_X = 0$	
	QT-1	$\Delta M_Y = 0$	$\Delta M_X = M_Z \theta_Y$	
	QT-2	$\Delta M_Y = -\frac{1}{2} M_Z \theta_X$	$\Delta M_X = \frac{1}{2} M_Z \theta_Y$	

Matriz Geométrica

A matriz geométrica que é deduzida nesta teorização com base no princípio dos trabalhos virtuais, inclui termos diferenciais de ordem superior que, normalmente, são desprezados na sua elaboração. Como vamos ver, uma matriz geométrica assim derivada é bastante mais cheia do que as suas homólogas anteriores.

Duas matrizes são patenteadas, uma afecta a uma teoria dita completa e outra referida como simplificada.

Como se poderá confrontar, todos os termos da matriz geométrica mais simples (ver 2.4.2.5) estão presentes, sendo aqui introduzidos vários termos de ordem superior.

Por outro lado, registre-se a presença e contributo dos momentos flectores e torsões e não apenas do esforço axial.

Teoria completa:

$$\mathbf{K}_G =$$

a				-d	-e	-a				-n	-o
	b		d	g	k		-b		n	-g	k
		c	e	-h	g			-c	o	-h	-g
	d	e	f	i	l		-d	-e	-f	-i	-l
-d	g	-h	i	j		d	-g	h	-i	p	-q
-e	k	g	l		m	e	-k	-g	-l	q	r
-a				d	e	a				n	o
	-b		-d	-g	-k		b		-n	g	-k
		-c	-e	h	-g			c	-o	h	g
	k	o	-f	-i	-e		-n	-o	f	i	l
-n	-g	-h	-i	p	q	n	g	h	i	j	
-o	k	-g	-l	-q	r	o	-k	g	l		m

Com: $a = F_{Xj}/L$

$$b = 6.0 \cdot F_{Xj} / (5.0 \cdot L) + 12.0 \cdot F_{Xj} \cdot I_z / (A \cdot L \cdot L \cdot L)$$

$$c = 6.0 \cdot F_{Xj} / (5.0 \cdot L) + 12.0 \cdot F_{Xj} \cdot I_y / (A \cdot L \cdot L \cdot L)$$

$$d = M_{Yi} / L$$

$$e = M_{Zi} / L$$

$$f = F_{Xj} \cdot I_T / (A \cdot L)$$

$$g = M_{Xj} / L$$

$$h = F_{Xj} / 10.0 + 6.0 \cdot F_{Xj} \cdot I_y / (A \cdot L \cdot L)$$

$$i = (M_{Zi} + M_{Zj}) / 6.0$$

$$j = 2.0 \cdot F_{Xj} \cdot L / 15.0 + 4.0 \cdot F_{Xj} \cdot I_y / (A \cdot L)$$

$$k = F_{xB} / 10.0 + 6.0 \cdot F_{xB} \cdot I_z / (A \cdot L \cdot L)$$

$$l = -(M_{Yi} + M_{Yj}) / 6.0$$

$$m = 2.0 \cdot F_{Xj} \cdot L / 15.0 + 4.0 \cdot F_{Xj} \cdot I_z / (A \cdot L)$$

$$n = M_{Yj} / L$$

$$o = M_{Zj} / L$$

$$p = -F_{Xj} \cdot L / 30.0 + 2.0 \cdot F_{Xj} \cdot I_y / (A \cdot L)$$

$$q = -M_{Xj} / 2.0$$

$$r = -F_{Xj} \cdot L / 30.0 + 2.0 \cdot F_{Xj} \cdot I_z / (A \cdot L)$$

Teoria simplificada:

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} & a & c & & & & & -a & -c & & & \\ a & b & & d & g & -h & -a & -b & & l & -g & -h \\ c & & b & e & h & g & -c & & -b & m & h & -g \\ & d & e & f & i & k & & -d & -e & -f & -i & -k \\ & g & h & i & j & & & -g & -h & -i & n & -o \\ & -h & g & k & & j & & h & -g & -k & o & n \\ & -a & -c & & & & & a & c & & & \\ -a & -c & & -d & -g & h & a & b & & -l & g & h \\ -c & & -b & -e & -h & -g & c & & b & -m & -h & g \\ & l & m & -f & -i & -k & & -l & -m & f & a & c \\ & -g & h & -i & n & o & & g & -h & a & j & \\ & -h & -g & -k & -o & n & & h & g & c & & j \end{bmatrix}$$

Com:

$$a = (M_{Zi} + M_{Zj}) / (L * L)$$

$$b = 6.0 * F_{Xj} / (5.0 * L)$$

$$c = -(M_{Yi} + M_{Yj}) / (L * L)$$

$$d = M_{Yi} / L$$

$$e = M_{Zi} / L$$

$$f = F_{Xj} * I_X / (A * L)$$

$$g = M_{Xi} / L$$

$$h = -F_{Xj} / 10.0$$

$$i = (M_{Zi} + M_{Zj}) / 6.0$$

$$j = 2.0 * F_{Xj} * L / 15.0$$

$$k = -(M_{Yi} + M_{Yj}) / 6.0$$

$$l = M_{Yj} / L$$

$$m = M_{Zj} / L$$

$$n = -F_{Xj} * L / 30.0$$

$$o = -M_{Xj} / 2.0$$

Matriz dos Momentos Induzidos

À matriz que tem em conta os efeitos provocados pelos *momentos induzidos* apresentados, dá-se o nome de *matriz dos momentos induzidos* (“induced moment matrix”), $[K_I]$. Sendo a sua inclusão essencial para a formulação passar no *teste de corpo rígido*, como

se explicará mais à frente.

$$[K_I] = \begin{bmatrix} [0] & & & \\ & [K_I]^i & & \\ & & [0] & \\ & & & [K_I]^j \end{bmatrix}$$

Sendo:

$$[K_I]^i = \begin{bmatrix} & & \\ -M_{Zi} & & +\frac{1}{2} M_{Xi} \\ +M_{Yi} & -\frac{1}{2} M_{Xi} & \end{bmatrix}$$

$$[K_I]^j = \begin{bmatrix} & & \\ -M_{Zj} & & +\frac{1}{2} M_{Xj} \\ +M_{Yj} & -\frac{1}{2} M_{Xj} & \end{bmatrix}$$

Como se nota, esta matriz vai retirar a simetria à matriz tangente local das barras, no entanto, quando da montagem da matriz tangente global esta simetria é restaurada. Assim, na construção da matriz tangente global podemos utilizar como matriz alternativa apenas a parte simétrica da matriz dos momentos induzidos, ficando a sua forma completa apenas reservada ao cálculo de esforços ao nível do elemento.

Conforme se pode apreciar no anexo II, foi neste trabalho elaborada uma rotina de resolução de sistemas de equações simétricos e em banda, para o caso de assimetria da matriz tangente na sua faixa oblíqua correspondente ao contributo das submatrizes $[K_{ii}]$ e $[K_{jj}]$, tornando-se desnecessário usar esta matriz opcional.

Matriz dos Momentos nos Nós

À matriz que materializa a parte simétrica da matriz dos momentos induzidos, chama-se *matriz dos momentos nos nós* (“joint moment matrix”) $[K_J]$. Como se disse, esta poderá ser usada em substituição da matriz dos momentos induzidos $[K_I]$, aquando da montagem da matriz tangente.

Dissolve-se, assim, o inconveniente da matriz $[K_I]$ retirar a simetria à matriz tangente das barras, podendo continuar a ter-se em conta os efeitos provocados pelos *momentos induzidos*, mesmo quando apenas se dispõe de um algoritmo clássico de resolução de sistemas de equações.

$$[K_J] = \begin{bmatrix} [0] & & & \\ & [K_J]^i & & \\ & & [0] & \\ & & & [K_J]^j \end{bmatrix}$$

Sendo:

$$[K_J]^i = \begin{bmatrix} & -M_{Zi}/2 & +M_{Yi}/2 \\ -M_{Zi}/2 & & \\ +M_{Yi}/2 & & \end{bmatrix}$$

$$[K_J]^j = \begin{bmatrix} & -M_{Zj}/2 & +M_{Yj}/2 \\ -M_{Zj}/2 & & \\ +M_{Yj}/2 & & \end{bmatrix}$$

Matriz dos Momentos Aplicados

Uma última matriz pode e deve ser incluída no conjunto das que formam a matriz tangente, chama-se *matriz dos momentos aplicados* e tem por missão a consideração dos efeitos dos momentos exteriores aplicados directamente nos nós.

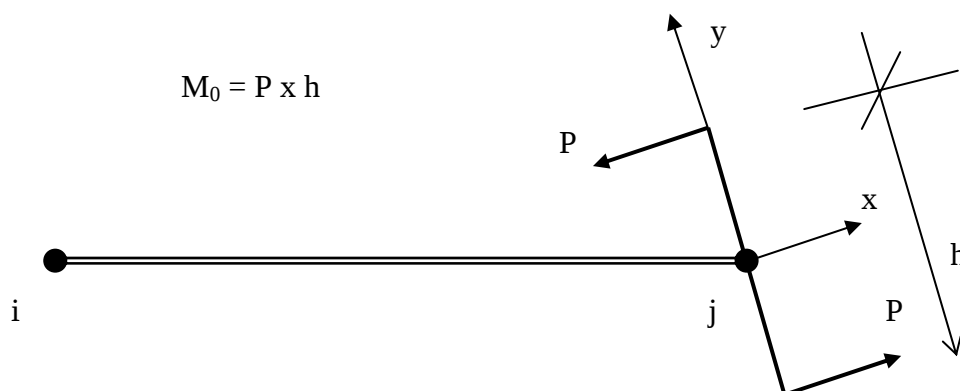


Figura 2.26: Momento externo M_0 aplicado directamente no nó (neste caso no nó j).

$$[K_M] = \begin{bmatrix} [0] & & & \\ & [K_M]^i & & \\ & & [0] & \\ & & & [K_M]^j \end{bmatrix}$$

Sendo:

$$[K_M]^i = \begin{bmatrix} & M_{i0}/2 & \\ M_{i0}/2 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$[K_M]^j = \begin{bmatrix} & M_{j0}/2 & \\ M_{j0}/2 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Sendo o M_{i0} momento exterior aplicado directamente no nó i ou j , estabelecendo-se igual relação de simetria e anti-simetria de matrizes que possibilita a inclusão única da parte simétrica.

Como remate desta formulação, diga-se que o seu emprego na análise da instabilidade de uma estrutura, nomeadamente, da sua carga crítica e modos de encurvadura, terá que ser usado o conjunto completo de matrizes de procedimento não linear geométrico, $[K_G] + [K_J] + [K_M]$, na montagem da equação de problemas de valores e vectores próprios:

$$[[K_L] + \lambda_c ([K_G] + [K_J] + [K_M])] \{u\} = 0$$

cujo estudo da forma resolvente se fará adiante.

2.5. Comparação entre Matrizes Tangentes

Não se pretendendo realizar um estudo exaustivo e, muito menos, querer assumir conclusões peremptórias sobre as mesmas, efectua-se uma breve comparação entre as formulações apresentadas tendo por base os exemplos adiante apresentados e outros aqui não incluídos. Foram, pois, todas estas formulações incluídas no programa de cálculo automático elaborado.

O primeiro acto comparativo passará pelo apuramento da primazia entre as formulações

assentes em funções de estabilidade ou pelas que se apoiam na matriz geométrica.

Funções de estabilidade ou matriz geométrica ?

Conforme já foi salientado, o uso da matriz geométrica parece ter duas vitais vantagens sobre as funções de estabilidade:

1. Um significado físico mais perceptível, porquanto se demarca da matriz de rigidez linear a função de produzir os efeitos de 2ª ordem;
2. A exclusividade no cálculo de cargas críticas e modos de instabilidade associados.

Sendo, talvez por isso, a forma preferencial a que os investigadores têm recorrido, ultimamente, para construir os seus protótipos.

Na realidade, autores existem que defendem o uso privilegiado da matriz geométrica [41]³⁶, nomeadamente argumentando a sua melhor resposta em termos numéricos e dado, mais facilmente, convergir para o valor da carga crítica. Penso que, à parte de qualquer comparação particular entre duas formulações específicas, a exactidão que é conseguida num processo de análise não linear, não depende, exclusiva ou mesmo principalmente, de se seguir uma das vias em detrimento de outra³⁷.

No entanto, a verdade é que se estivermos interessados numa previsão de cargas críticas, o uso de funções de estabilidade não se adequa a esse fim (pelo menos que seja do conhecimento do autor e de acordo com as bases teóricas que fundamentam as formulações que vão ser apresentadas em capítulo próprio), pelo que a opção do uso de matriz geométrica pode-se mostrar exclusiva se quisermos realizar uma previsão da instabilidade global da estrutura, única ou simultaneamente.

Fora essa situação específica, com os exemplos e respectivos resultados agora obtidos, não se pode afirmar conclusivamente a supremacia de um conjunto sobre o outro, à parte das vantagens já mencionadas e que se atribuíram ao uso da matriz geométrica.

Recaindo agora a nossa atenção sobre as várias formulações para cada um dos referidos

³⁶ Nesse trabalho [41], e numa fase preliminar da selecção do tipo de matriz tangente a adoptar, apresenta-se uma terceira possibilidade que consiste na utilização simultânea de funções de estabilidade com a matriz geométrica. Pensa-se que tal será uma soma incompatível de entidades distintas para o mesmo fim, pelo que o facto de com esta formulação os resultados obtidos o serem por defeito, é a confirmação de uma perda de rigidez desmesurada por sobreposição de efeitos.

³⁷ Estará esta mais ligada à sofisticação atribuída ao cálculo, como a actualização de geometria, o número e valor dos incrementos e a própria forma de controlar o processo ser em termos de cargas ou deslocamentos. Aceita-se, todavia, que a tratar-se de uma estrutura de comportamento, eminentemente, linear ou baseado na grandeza do esforço axial, perde o rigor da análise importância em detrimento da congruência do modelo de matriz tangente.

grandes grupos, passa-se a comentar, isoladamente, cada uma delas.

Matriz tangente com base em funções de estabilidade

Esta classe é a que possui maior homogeneidade nos resultados encontrados, não se conseguindo muitas vezes obter qualquer diferença entre os diversos autores, muito embora as funções apresentadas pareçam, completamente, diferentes nas suas expressões matemáticas. Tendo presente o transmitido no período anterior, estabelecem-se os seguintes comentários:

- Não se conseguiram estabelecer diferenças substantivas entre as primeiras quatro formulações, sendo os seus resultados muito próximos ou coincidentes (deve-se ressaltar, muito embora, que os casos abordados não tiraram partido do eventual desempenho da formulação de Chu & Rampetsreiter cujo alcance poderia estender-se ao âmbito de secções não necessariamente prismáticas em ambos os eixos principais das suas secções³⁸);
- As funções de estabilidade deduzidas para o plano, e aqui prolongadas para as três dimensões, obtiveram melhor comportamento em termos de velocidade e estabilidade na convergência que as suas congéneres para o espaço, ficando-se tal facto talvez a dever à sua maior simplicidade.
- Com a formulação de Kassimali & Abbasnia, à semelhança do que aconteceu com a de Cenap Oran que por redundância com a primeira não chegou a ser incluída neste texto, nunca se conseguiram ultrapassar problemas numéricos de vária ordem, pelo que não se pode aqui discuti-la de forma séria. Tal postura é correcta, já que esses problemas podem advir de erros de programação não completamente despistados, dado tratar-se de uma formulação Euleriana e que, portanto, foge à organização, essencialmente, Lagrangeana do próprio programa.

Matriz tangente com base em matriz geométrica

Ao contrário do que se passava no caso anterior, com base em funções de estabilidade, nesta categoria de matrizes tangentes verificam-se algumas dissemelhanças nos resultados. Porventura, tais diferenças seriam de esperar, uma vez que a profundidade e o alcance das formulações em confronto já se anunciavam diversos.

Assim, podemos distingui-las, sem preocupações de rigorosidade, em três espécies:

³⁸ Esta dissertação, ao não incluir efeitos de instabilidade local das barras, como o bambeamento, absteve-se de considerar secções assimétricas.

1. A das formulações elementares, apenas constituídas por matriz geométrica simples e única (Portel & Powell, Cook et Al) ;
2. A das formulações intermédias que pretendem corrigir algumas deficiências circunstanciais, complementar ou adaptar as anteriores (Tededge & Tall, Nedergaard & Pederson e Chajes & Churchill);
3. A das formulações ditas completas que almejam uma análise exacta no âmbito em que se arrogam aplicáveis (Petr Krysl e Yang & Kuo).

Também aqui a maior complexidade das teorias é sinónimo de maiores tempos de cálculo e dificuldades de convergência.

Pelos exemplos realizados, ficou a sensação que à crescente exactidão das formulações não correspondia, fatalmente, uma maior precisão no cálculo. Só pareceram tornar-se, inequivocamente, distintos os resultados, quando situações fora do comum se criavam, ou seja: quando se solicitavam os termos sensíveis aos propalados *momentos induzidos* ou os esforços normalmente desprezados (mas que nestas formulações mais completas são integrados) ganhavam ao só elevada expressão como se tornavam preponderantes (momentos flectores e/ou torsores).

Por outro lado, parece que o uso de formulações simplificadas para a determinação de cargas críticas é satisfatório, restando as dúvidas para o que ao cálculo de esforços concerne, sobretudo numa análise não linear incremental e iterativa sujeita a significativos movimentos de corpo rígido (caso comum a situações de grandes deslocamentos, principalmente dos do tipo das rotações) [46].

Como se vai poder concluir no próximo ponto, de facto, a grande diferença surge quando há importantes movimentos de corpo rígido. Aqui, sim, uma doutrina mais pobre, dificilmente traduzirá resultados rigorosos, pelo que não deverá ser defendida.

Acrescentam-se mais uns comentários que se julgam pertinentes:

- De uma forma geral as formulações intitulam-se de preparadas e sensíveis aos “grandes” deslocamentos, quando preconizam actualização de geometria mantendo as suas equações constitutivas em equilíbrio. Acessoriamente, alguns autores incluem as amplas rotações no espaço de forma específica no sistema. É, ainda, geral que embora os deslocamentos possam ser quaisquer, as deformações devem ser pequenas (será uma reserva contra a não linearidade material).

- A influência dos *momentos induzidos* parece ser, consensualmente, aceite como indispensável para se conseguir uma formulação completa, mostrando os exemplos estudados que uma redistribuição diferente de esforços sucede quando os termos matriciais que os materializam são solicitados.
- As matrizes $[K_1]$ e $[K_2]$ em Chajes & Churchill aparentam ser uma extensão do preconizado por Powell na construção da matriz tangente completa. Também a percentagem de convergência obtida quando se usaram estas matrizes foi muito baixa, o que foi confirmado na discussão desse trabalho em “Journal of Structural Division, ASCE”.
- Nos exemplos realizados as matrizes complementares da matriz geométrica clássica em Tebedge & Tall têm uma pequena importância no contexto global da matriz tangente, pelo que a sua omissão por parte dos restantes autores aqui presentes afigura-se legítima³⁹.
- Frequentemente, quanto mais complexa e/ou completa a formulação maior a dificuldade de convergência e, sobretudo, maior o número de iterações necessário para a atingir.

O quadro-resumo que se segue, Quadro 2.3, é o sumário das propriedades atribuídas pelos respectivos autores e do desempenho agora conseguido para cada formulação.

Também será de referir que por ordem hierárquica decrescente de importância os esforços mais considerados na obtenção dos efeitos de 2ª ordem foram: axiais, flectores e torsões.

Pelo que vai expor-se na continuação deste trabalho, julga-se ainda que a precisão de uma formulação está mais ligada à minúcia e requinte do processo de cálculo do que à qualidade do órgão, ou seja: *é preferível dispor de um “sofável” ciclo incremental e iterativo associado com o mais simples conjunto que se possa realizar entre a matriz linear e a matriz geométrica, do que trabalharmos com uma completíssima e soberba matriz tangente inserida num método directo.*

³⁹ Note-se, contudo, que falamos apenas da família de matrizes que podem entrar numa formulação em que a matriz tangente tem a dimensão 12x12. Outras matrizes apresentadas (para dimensões 14x14) fogem ao âmbito

QUADRO 2.3

Referência	Velocidade e Estabilidade na Convergência	Grandes Deslocamentos	Momentos Induzidos	Elementos Da Equação de Equilíbrio	Esforços		
					Axial	Flectores	Torsores
Chu & Rampetsrei.	Intermédia	Sim	Não	$[K_L] \times FE + ET$	Sim	Não	Não
José Espada	Boa	Não	Não	$[K_L] \times FE$	Sim	Não	Não
El-Metwall. & Chen	Boa	Sim	Não	$[K_L] \times FE$	Sim	Não	Não
Ekhande & Selvappalam	Intermédia	Sim	Não	$[K_L] \times FE$	Sim	Sim	Não
Kassimali & Asbbania	Sem Conclusões	Sim	Sim	$[K_L] \times FE + [K_I]$	Sim	Sim	
Portel & Powell	Boa	Sim	Não	$[K_L] + [K_G]$	Sim	Não	Não
Nedergaard & Pederson	Fraca	Sim	Não	$[K_L] + [K_G] + [K_L] + \{f_2\}$	Sim	Não	Não
Chajes & Churchill	Intermédia	Sim	Não	(1)	Sim	Sim (2)	Não
Cook et al	Boa	Sim	Não	$[K_L] + [K_G]$	Sim	Não	Não
Petr Krysl	Intermédia	Sim	Sim	$[K_L] + [K_G] + [K_I]$	Sim	Sim	Não
Yang & Kuo	Intermédia	Sim	Sim	$[K_L] + [K_G] + [K_I] + [K_M]$	Sim	Sim	Sim

(1), Conforme o método:

1. Linear incremental: $[K_L]$ com actualização de geometria ;
2. Não linear incremental: $[K_L] + [K_G] + AE/2 [K_I] + AE/3 [K_2]$ ou $[K_L] + [K_G]$;
3. Directo: $[K_L] + AE/2 [K_I] + AE/3 [K_2]$.

(2), Para o caso do método directo e não linear incremental se considerarmos que $[K_I]$ e $[K_2]$ contêm

deste trabalho.

deslocamentos de rotação.

2.6. Equilíbrio da estrutura, do elemento e a obtenção de esforços

Trata este subcapítulo a discussão da importância e comprovação do equilíbrio global da estrutura, mas também e sobretudo, do estudo do equilíbrio da barra e da obtenção de esforços. Falar-se-á ainda das cargas nos nós e nas barras, bem como das alterações que estas sofrem com a actualização de geometria.

Embora os assuntos anteriores estejam relacionados, vamos tentar efectuar uma separação de conveniência entre a exposição dos temas, existindo parágrafos que, embora sejam colocados dentro de um destes, poderiam estar com igual propriedade noutro ou noutros.

2.6.1. Equilíbrio global da estrutura

Uma parte importantíssima na análise não linear de estruturas é o confirmar da manutenção do seu equilíbrio ao nível dos nós e das barras no final de cada incremento. O não conseguir garantir esta exigência num grau aceitável compromete a relação entre cargas e deslocamentos, bem como as próprias condições de compatibilidade destes últimos, ou seja: a desconformidade na dependência entre deformações e deslocamentos. Esta situação de discordância vai estender-se, necessariamente, aos esforços, em resultado de uma resposta errónea das próprias relações constitutivas. Isto porque, embora essa ligação entre esforços e deformações dependa, essencialmente, das propriedades mecânicas dos materiais⁴⁰, um erro nas deformações acarreta, consequentemente, um outro erro nas forças internas.

O resultado final é que as forças aplicadas que se distribuem pelas barras e se transmitem às fundações, de forma determinada pelas condições de equilíbrio mal estabelecidas, não tem uma correspondência correcta no campo dos deslocamentos e dos esforços.

⁴⁰ O valor das deformações depende do comportamento do material que compõe as barras, o qual atendendo ao domínio físico linear em que nos admitimos encontrar, pode ser caracterizado pelas condições de elasticidade. Pelo contrário, e para as mesmas hipóteses, as condições de equilíbrio e compatibilidade são independentes das propriedades mecânicas dos materiais.

2.6.2. Equilíbrio da barra

Numa análise não linear geométrica o equilíbrio da barra, independentemente de ser obtido ou não em geometria deformada, é sempre efectuado com base nos pressupostos que foram estabelecidos para a sua matriz tangente. Queremos com isto dizer que as relações geométricas e materiais que esta matriz regula são determinantes em todo o processo que intermedeia entre a aplicação do carregamento até à aquisição de deslocamentos e esforços, muito para além de qualquer outra fórmula ou procedimento que lhe possa ainda sobrevir. Ora, sendo a matriz tangente, no mínimo, construída à custa da matriz de rigidez linear e da matriz geométrica⁴¹, há que conhecer o modo como estes elementos colaboram e se comportam dentro desse conjunto por si formado.

Assim, um factor a ter em conta é que a matriz de rigidez linear, sendo derivada à custa da energia de deformação, não gera outras forças que não de valor nulo quando sujeita a movimentos de corpo rígido. Pelo contrário, a matriz geométrica, enquanto entidade representativa do efeito das forças iniciais nos elementos devido às alterações geométricas, produzirá forças não nulas mesmo quando apenas suporta movimentos de corpo rígido. Pelo que a matriz geométrica contém a mais importante mensagem no que ao comportamento de corpo rígido diz respeito, relativamente a um elemento submetido a tensões iniciais.

Nesta conformidade, numa análise não linear de modelo “passo a passo”, uma importante separação tem que ser efectuada entre condições de equilíbrio para a estrutura entendida globalmente e para o elemento em particular. No primeiro caso a solução genérica já se conhece, $([K_L] + [K_G]) \{U\} = \{P\}$, cabendo agora o estudo do segundo.

Da análise linear sabemos que o equilíbrio de uma barra é garantido pelas forças que sobre esta actuam e de tal modo que, independentemente do ponto a partir do qual este é realizado, a resultante é sempre a mesma. Quando nos encontramos numa análise não linear, essa obrigatoriedade não cessa, só que aqui esse equilíbrio é assente e deve ser cumprido em geometria deformada.

Variando essa deformada do elemento em função da teoria que lhe está subjacente, vamos ilustrar a sua configuração básica para o caso linear e não linear em que apenas o esforço axial intervém nos efeitos de 2ª ordem (Fig.2.27 e 2.28).

⁴¹ Ou através da primeira afectada pelas funções de estabilidade.

Diferente configuração não linear poderia ter lugar, se na formulação em causa outros esforços interviesses na sua construção. Como se verá, imediatamente a seguir, o cálculo de esforços está directamente ligado com o estabelecimento do equilíbrio da barra.

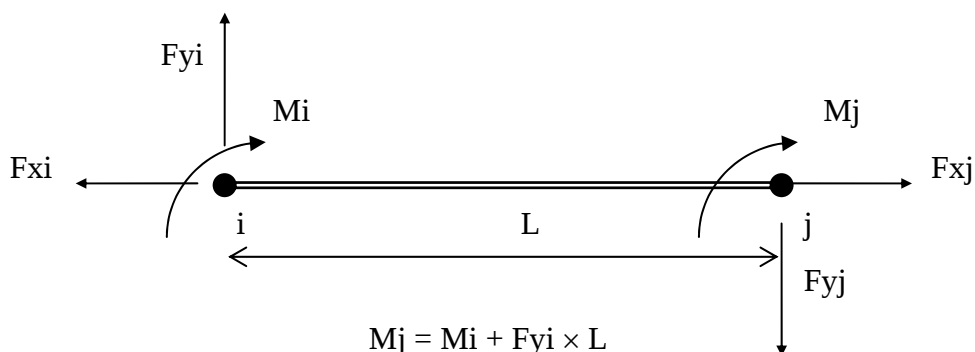


Figura 2.27: Configuração-base de equilíbrio de barra em análise linear.

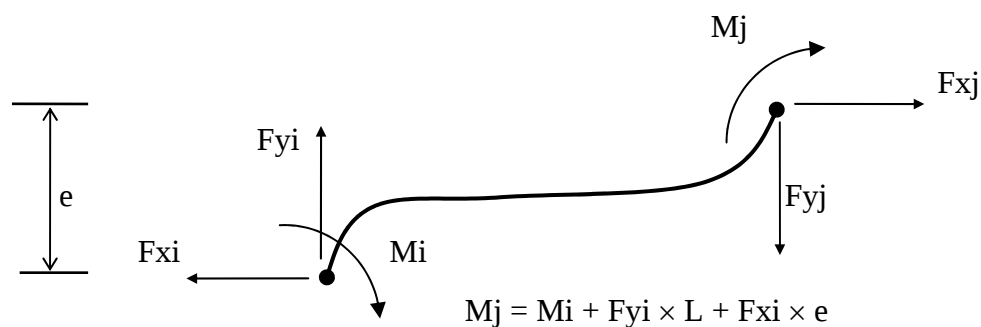


Figura 2.28: Configuração-base de equilíbrio de barra em análise não linear.

2.6.3. Cálculo de Esforços

Verificada que está a existência de disparidades importantes entre as matrizes linear e geométrica, no que à contribuição para o equilíbrio da barra concerne, vamos observar como isso se reflecte na determinação das forças internas.

O cálculo dos esforços nos elementos, cujo conhecimento é indispensável ao longo do processo incremental e iterativo para se poder montar a matriz geométrica e dispor das forças residuais, é aqui determinado de duas formas [46]:

1. Pela aproximação das *deformações naturais* (“natural deformation approach”);
2. Através da *matriz de rigidez externa* (“external stiffness approach”).

De uma forma muito resumida, podemos dizer que o uso de uma aproximação pelas

deformações naturais consiste em dividir o vector deslocamentos incrementais em duas parcelas: uma com os movimentos de corpo rígido e outra com os relativos à deformação natural da barra. Como só esta última parcela dos deslocamentos interessa para a obtenção dos esforços, apenas essa deverá ser usada. Se preferirmos a segunda aproximação, da rigidez externa, os deslocamentos a usar serão os totais, sendo introduzida uma nova matriz designada matriz de rigidez externa que alterará a matriz tangente apenas aquando do cálculo dos esforços:

$$[K_T] = [K_L] + [K_G] - [K_G]_e \quad (2.19)$$

do que:

$$[K_T] \{U\} = ([K_L] + [K_G] - [K_G]_e) \{U\} = \{E\} \quad (2.20)$$

Para o plano cada uma destas formulações tem as seguintes apresentações:

1. Pela aproximação das *deformações naturais* (“natural deformation approach”):

$$\{U\}^T = \{0 \ 0 \ \theta_i \ U_j \ 0 \ \theta_j\} \quad (2.21)$$

como se pode ver, apenas as rotações de extremo já subtraídas dos correspondentes movimentos de corpo rígido e o alongamento total da barra no incremento são contabilizados.

O cálculo dos esforços nos extremos de barra através da deformações naturais é, pois, conseguido pelos deslocamentos totais do elemento subtraídos dos movimentos de corpo rígido.

2. Através da *matriz de rigidez externa* (“external stiffness approach”):

$$[K_G]_e = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & (M_{zi}+M_{zj})/L^2 & & & -(M_{zi}+M_{zj})/L^2 & \\ \hline (M_{zi}+M_{zj})/L^2 & F_{xj}/L & & & -(M_{zi}+M_{zj})/L^2 & -F_{xj}/L \\ \hline & & & & & \\ \hline & -(M_{zi}+M_{zj})/L^2 & & & (M_{zi}+M_{zj})/L^2 & \\ \hline -(M_{zi}+M_{zj})/L^2 & -F_{xj}/L & & & (M_{zi}+M_{zj})/L^2 & F_{xj}/L \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Dois comentários se podem tecer acerca desta matriz:

- 1) Depende, somente, dos graus de liberdade nodais do elemento, mas não da sua função de forma. Por tal razão, o procedimento que esteve na sua origem pode ser estendido a diferentes tipos de outros elementos, aconselhando Yang & Kuo o seu uso preferencial;
- 2) O termo $(M_{zi}+M_{zj})/L^2$ corresponde a um índice nulo na matriz geométrica, representando essa circunstância o cancelamento de factores da deformação afectos a movimentos de corpo rígido.

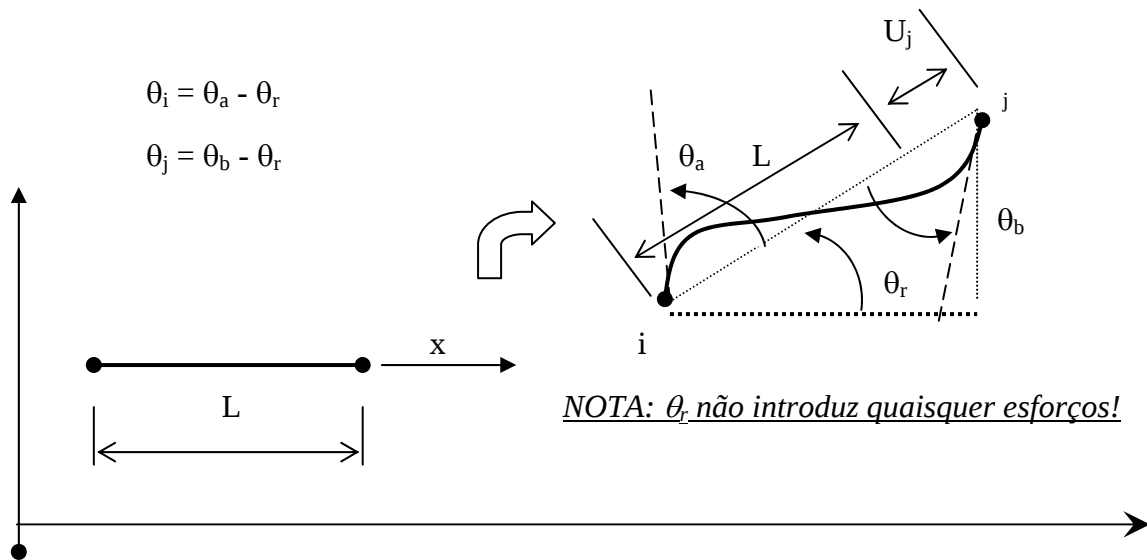


Figura 2.29: Movimentos de corpo rígido no plano e deformações naturais do elemento.

Tem este procedimento fundamento no facto de, existindo deslocamentos significativos em termos de rotações de valor finito, ou seja, deslocamentos angulares quantificáveis e apreciáveis, deixa de ser legítima a simples soma dos deslocamentos nodais verificados no presente incremento com os já encontrados até esse ponto. Isto porque parte dos movimentos são, como se disse, de corpo rígido não impondo, então, quaisquer esforços (tornando incorrecta a sua contabilização).

Para o caso espacial o vector deslocamentos naturais terá a seguinte aparência formal:

$$\{U\}^T = \{0 \ 0 \ 0 \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ \theta_{zi} \ U_j \ 0 \ 0 \ \theta_{xj} \ \theta_{yj} \ \theta_{zj}\} \quad (2.22)$$

sendo a dedução completa dos seus termos efectuada em [46].

Poderá parecer que esta questão só se colocará para um processo em que exista actualização de geometria e em que se efectue o cálculo dos esforços já no estado

actualizado⁴² de deformação. Partindo deste pressuposto e no sentido de manter o procedimento habitual (utilizar todos os deslocamentos de nó), efectuar-se-ia apenas a actualização de coordenadas após o cálculo dos esforços⁴³ no final de cada incremento. Contudo, se tal disposição poderá ser aceitável para estruturas sujeitas a pequenos deslocamentos, já no caso de estes serem significativos (como em situações de “snap-through”) isso não é mais possível.

Acrescente-se que tanto em termos organizativos como computacionais, uma aproximação através da matriz externa de rigidez parece, efectivamente, sempre preferível.

2.6.4. Cargas nos nós e nas barras e alterações com actualização de geometria

Será altura de nos referirmos à problemática das cargas, já que a sua aplicação interessa ao equilíbrio da barra e, se mais não fosse, porque é este o grande motivo de existirem as próprias estruturas.

Todas estas teorias tornam claro que o seu mais legítimo emprego presume que as cargas são directamente aplicadas nos nós. De facto, outra hipótese carecia de um tipo de abordagem mais completo, em que efeitos característicos do carregamento transversal de elementos (como vigas ou vigas-coluna) fossem considerados [10,11,12,47,48]. As formulações constantes na bibliografia acabada de referir, efectuem o estudo destes fenómenos de forma integrada no processo de cálculo, contudo, outra via existe em alternativa: a verificação da estabilidade das secções após a determinação dos esforços por processos lineares ou não lineares [23]. Também, como de resto já foi referido, teorias muito simplificadas e directas há que estimam os próprios efeitos de uma análise de segunda ordem [3,13,30,31,42].

Não podendo ser do âmbito do presente trabalho o estudo de tais fenómenos, vamos, muito embora, admitir a licitude do carregamento distribuído ou concentrado de cargas nas barras, supondo que pela solidez flexo-torsional dos elementos tais manifestações podem ser

⁴² Tendo-se, assim, procedido à colocação do elemento na nova posição deformada e, como tal, sujeitado-o a movimentos de corpo rígido.

⁴³ Aliás, este é o procedimento em análise linear e estamos a tratar a análise não linear como se de um somatório de análises lineares se tratasse (outro raciocínio pressuporia que o cálculo dos esforços como é, normalmente,

desprezadas.

Ao contrário do que sucede com as cargas directas nos nós, que dependendo apenas dos eixos gerais não sofrem qualquer influência ao longo do processo de cálculo, as cargas nas barras estão sujeitas a actualizações em função das sucessivas alterações de geometria.

Assim, no início de cada incremento (primeira iteração) devem ser de novo processadas todas as cargas nas barras face à nova configuração da estrutura e dos seus elementos (barras), isto, obviamente, se estivermos a proceder à actualização de geometria (caso contrário, embora tal procedimento não conduza a qualquer erro é, porém, espúrio).

Para tal será necessário ter em atenção os seguintes cuidados:

- Se admitirmos que as cargas são sempre perfeitamente verticais (cargas de cariz gravítico ou equiparado), há que corrigir a sua inclinação face ao eixo das barras, dado estas serem aplicadas em termos de eixos locais.
- Corrigir a sua grandeza, ponto de aplicação e extensão⁴⁴, para que, em função do encurtamento ou alongamento do elemento, a carga total seja constante.
- Para cada novo incremento temos que substituir as forças de fixação da barra em memória para as dependentes da nova geometria, bem como as consequentes cargas gerais para efeitos do vector de solicitação em termos de cálculo de deslocamentos.

Tal raciocínio é, somente, correcto para elementos sujeitos a pequenos esforços axiais de compressão, caso contrário, e em virtude da flecha provocada por estas cargas, novo agravamento dos momentos flectores tem lugar. O valor atribuível a esta nova penalização é função de vários parâmetros (como o módulo de elasticidade, inércia, área da secção e, claro, o próprio valor do esforço axial), mas será lógico admitir que apenas será apreciável nos elementos verticais, o que torna dispensável a sua consideração prática, dado estes elementos não estarem, normalmente, sujeitos a solicitações directas transversais ao seu eixo⁴⁵.

2.7. Sumário

Após a comparação das várias formulações não lineares apresentadas, uma pergunta

efectuado estaria incorrecto).

⁴⁴ Estas correcções são função do tipo de cargas (distribuídas, pontuais, parcialmente distribuídas, etc.).

⁴⁵ Uma dedução das forças de fixação para carregamentos de barras sujeitas a esforços axiais encontra-se na referência [21] na página 665 e seguintes.

pertinente se pode colocar: qual o seu interesse prático na vida profissional do engenheiro?

A resposta é simples: total!

E isto porque estes efeitos já há muito têm vindo a ser contabilizados na regulamentação afecta às estruturas e seus materiais, simplesmente e dada a dificuldade da sua aplicação na ausência de potentes meios computacionais, toda esta teoria era incluída de forma implícita e conservativa (recordemo-nos, por exemplo, da verificação da segurança nos pilares no ainda em vigor no REBAP/83).

Não sendo, portanto, duvidoso ou sequer discutível o interesse das matérias apresentadas neste capítulo, já que estas traduzem comportamentos reais que não podem ser omitidos sem comprometer a segurança, é a última legislação e outras normas e recomendações técnicas que tendem, progressivamente, a incutir nos projectistas o recurso à análise não linear. E se em algumas áreas há passos ainda tímidos [22] noutras já progressos significativos se registam [23], como são os casos, respectivamente, do Eurocódigo 2 e do Eurocódigo 3. Por exemplo, neste último e na secção relativa ao cálculo de esforços, é incluído o seguinte texto:

«Os esforços podem, geralmente, ser determinados utilizando um dos seguintes métodos:

- a) a teoria de primeira ordem, usando a geometria inicial da estrutura.
- b) teoria de segunda ordem, tendo em conta a influência da deformação da estrutura.

A teoria de primeira ordem pode ser usada para a análise global nos seguintes casos:

- a) estruturas reticuladas contraventadas;
- b) estruturas reticuladas sem deslocamentos laterais;
- c) métodos de cálculo em que os efeitos de segunda ordem sejam considerados indirectamente.

A teoria de segunda ordem pode ser aplicada para a análise global em todos os casos.»

Esta redacção, além de tornar inequívoca a importância e a abrangência de uma análise de segunda ordem, parece separar aquilo que poderá ser considerado um exercício de actualização de geometria, do que significa perda de rigidez pela utilização da matriz geométrica em função dos esforços axiais e/ou outros, ou seja: poderá ser entendível como satisfatório utilizar uma análise linear incremental com actualização de geometria.

Não tem, com certeza, ficado alheio a esta nova postura legislativa o trabalho

desenvolvido pelos vários autores.

Além dos temas já mencionados que focam as formulações atentas à análise não linear geométrica, retome-se a problemática das imperfeições iniciais. Cite-se, por exemplo, Chen & Zhou [8] que apresentaram um método que inclui os efeitos das imperfeições iniciais na rigidez dos elementos, sem necessidade de adoptar uma formulação de elemento curvo, que estes classificam de deficiente na análise de membros sujeitos a esforços axiais elevados ou de necessitarmos dividir a barra em vários elementos, para se conseguir a simulação dessas imperfeições. Se bem que estas observações não sejam despropositadas, a verdade é que, por exemplo, o Eurocódigo 3 obriga a colocar os pilares com uma dada inclinação em relação à vertical, não sendo objectivamente necessário para se conseguir tal intuito simular os mesmos através da sua divisão em mais do que um elemento. Talvez que a razão desta pormenorização passe, antes ou mais, pela melhoria da excelência do desempenho do modelo, uma vez que resulta mais refinado (sendo certo que à possibilidade de deslocamentos dos nós intermédios corresponde uma superior qualidade no rigor na análise).

Particularizando um pouco, podemos dizer que os resultados obtidos com esta formulação parecem convincentes, notando-se, perfeitamente, no exemplo do estudo da instabilidade da estrutura do tipo “toggle frame”, a variação da sua não linearidade em função do valor da imperfeição geométrica imposta. Estes autores já tinham efectuado aplicações semelhantes sem a utilização desta nova componente que integraram na parte prática deste trabalho [9].

As suposições tomadas para o seu desenvolvimento foram as seguintes:

1. Modelo da viga-coluna de Timoshenko & Gere (1961), ou seja: a barra está sujeita, predominantemente, a forças axiais, sendo apenas esforços deste tipo os considerados para o aparecimento dos efeitos de 2ª ordem, mantendo-se a flexão e a torção incluídas nos de 1ª ordem;
2. Os elementos são prismáticos (dois eixos de simetria) e elásticos (lineares em termos materiais);
3. As cargas aplicadas são conservativas e nodais (não se admitindo fenómenos de instabilidade por cargas concentradas ou distribuídas ao longo dos elementos, como o bambeamento);
4. Pequenas deformações, mas deslocamentos arbitrariamente grandes;

5. A deformação por esforço transversal e o bambeamento/enfunamento são ignorados;
6. O elemento, e não a estrutura, está impedido contra quaisquer deformações fora do seu plano, provocadas por instabilidades devidas a momentos;
7. As rotações entre a tangente ao elemento no extremo deste e a corda que une os seus extremos é pequena (podendo isto ser ultrapassado se subdividirmos o elemento em vários trechos).

Aproveite-se para registar que as muitas restrições colocadas são sintoma de nos encontrarmos em 1995, existindo já uma considerável consciência dos investigadores sobre as inúmeras facetas que regem os problemas ligados à não linearidade, criando-se uma posição defensiva na abrangência dos seus modelos.

Por último, refira-se que a relevância das imperfeições iniciais é muito variável em função do carácter da estrutura, do tipo de elemento vertical em causa e do valor do seu esforço axial [32]. Esta relativa importância pode ser enunciada através de dois exemplos opostos:

- Um, em que estas imperfeições são propensas em conduzir ao agravamento precoce dos deslocamentos laterais, com um significativo acréscimo de probabilidade de rotura por instabilidade global geométrica (o que poderá ser o caso de estruturas de nós muito móveis, essencialmente articuladas, em que deslocamentos significativos se dão sem que isso implique, necessariamente, um aumento proporcional dos esforços, já que o material não chega a ser solicitado, devido a estes movimentos não corresponderem acentuadas deformações, tornando-se as imperfeições iniciais um factor de instabilidade apreciável);
- Outro, em que a rigidez das barras e/ou do sistema, nomeadamente, aos deslocamentos laterais torna-se de tal modo elevada que qualquer irregularidade estrutural é desprezável (será o caso de estruturas fortemente contraventadas que tenham os seus movimentos excepcionalmente inibidos ou cujos elementos absorvam com facilidade qualquer agravamento dos esforços devido a excentricidades ocasionais).

Se bem que, mesmo neste segundo caso, se possa pôr sempre a questão de considerar as imperfeições iniciais no dimensionamento das secções, a verdade é que na classe de estrutura

a que nos referimos, os elementos já são por si, suficientemente, robustos ou o sistema está construído de tal forma que se torna inexpressiva a imposição (mesmo regulamentar) de qualquer deficiência geométrica. Será o caso de estruturas destinadas a resistir, privilegiadamente, a solicitações horizontais.

De qualquer modo, algum cuidado deve existir na ponderação da não inclusão dessas imperfeições iniciais, já que a sua ignorância pode elevar o valor da carga crítica de estrutura, podendo quando mal avaliada mostrar-se perigosa em termos de dimensionamento e, como tal, inaceitável na prática do projecto.

3. ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS RETICULADAS ESPACIAIS - PROCESSOS

3.1. Introdução

Refere-se este capítulo ao estudo dos processos mais importantes e, habitualmente, usados numa análise não linear geométrica de estruturas⁴⁶.

Relembre-se que com a denominação de *processos* quis-se salientar que as matérias aqui tratadas dependem dos procedimentos de cálculo que se pretendem tomar, ou seja e sobretudo, do modo como os órgãos vão ser utilizados durante a sequência de carregamento e deformação. Por este motivo, temas como a descrição dos métodos incrementais e iterativos serão aqui trazidos.

Como se vai poder observar, existe uma variedade de possibilidades de abordagem dos problemas não lineares, não dando, inclusivamente, iguais resultados para os mesmos órgãos. Essa disparidade em analogia ao que se passa no caso linear, em que as diferenças entre as diversas teorias não conduzem, em geral, a apreciáveis diferenças numéricas, explica-se pela circunstância de um processo deste tipo não obedecer a uma formulação analítica exacta e directa, mas antes a um somatório de passos lineares admitidos por correctos. Assim, teoricamente, quanto mais pequenos forem esses passos e mais rigoroso e cuidadoso o seu ajustamento⁴⁷, mais realistas e exactos serão os resultados finais.

Outra das principais características destes processos é de só poderem ser, exclusivamente, aplicados a uma acção ou combinação de cada vez, o mesmo é dizer que para cada situação de carga apenas se torna lícito o seu estudo individual, não se podendo sobrepor os efeitos como se de uma análise linear se tratasse. Isto é, facilmente, compreensível se nos recordarmos que a matriz geométrica ou as funções de estabilidade são construídas à custa dos esforços relativos às situações de carregamento, sendo, portanto, uma matriz tangente

⁴⁶ Muitos dos métodos que vão ser apresentados são de carácter geral, sendo, igualmente, aplicáveis a estruturas de outros tipos (como lajes e cascas), bem como a outro tipo de análises (como a não linear material).

⁴⁷ Como, por exemplo, a completa actualização de geometria e da matriz tangente. Na verdade, não faz muito sentido a divisão da carga ou deslocamento total em muitas parcelas incrementais se não existir uma simultânea

distinta para cada acção ou combinação e os seus efeitos não passíveis de ser somados⁴⁸.

Mesmo que se procedesse, simplesmente, a uma análise não linear geométrica primitiva, com utilização apenas da matriz de rigidez linear com actualização de geometria, a situação mantinha-se idêntica porque é diferente a configuração deformada para cada carregamento. Modificando-se a cada passo não só a matriz de transformação como a própria matriz de rigidez linear local, já que a dimensão e posição das barras iriam variar.

Vamos descrever e comentar as mais usuais técnicas incrementais e iterativas, separando a sua apresentação individual no texto. No entanto, e dado o carácter inseparável que estes procedimentos encerram, talvez não seja esta a melhor forma de as expor. Tem particular acutilância esta observação, no sentido em que será mais fácil primeiro perceber o propósito e a organização de um procedimento incremental e iterativo e só depois ingressar nos diversos métodos, especificamente. Por outro lado, parece carecer de lógica entrarmos por esta via que corresponde à das técnicas mistas e só então estudar os métodos que a constituem.

3.2. Técnicas Incrementais

As técnicas incrementais baseiam-se na descrição do comportamento da estrutura através do somatório de cálculos linearizados, correspondentes à utilização da matriz de rigidez tangente, para incrementos de carga ou de deslocamento tão pequenos quanto se queira. Daí que o carregamento total é dividido num número previamente fixado ou que se vai estabelecendo em função do comportamento do processo de incrementos de carga⁴⁹, sendo para cada um deles efectuado um cálculo linear⁵⁰. Trata-se, pois, de substituir um comportamento não linear através de uma aproximação efectuada por um somatório de

actualização de geometria.

⁴⁸ É claro que poderíamos falar de uma matriz tangente em que os seus coeficientes pudessem variar em função do caso de carga, o mesmo se passando para a actualização de geometria e consequentes matrizes de transformação. Alguns problemas acabam por se manter, contudo, já que não se supera com tais procedimentos os gastos em tempo de cálculo e a complexidade do código de programação, nem se ultrapassam as diferenças que, para cada acção, poderão ter que assumir os trajectos de carga, muito principalmente o número de iterações e incrementos.

⁴⁹ Aqui, por simplicidade e clareza de exposição, falamos apenas em incrementos de carga, quando o processo incremental pode ser baseado na limitação dos deslocamentos (a que corresponde, de qualquer forma, uma carga necessária para os provocar).

⁵⁰ Considerar este cálculo linear poderá parecer excessivo, uma vez que a matriz geométrica está presente. Pelo que esse termo terá mais a ver com o tipo de sistema de equações a resolver

cálculos a elasticidade constante, com base na matriz tangente obtida no final do cálculo anterior.

Esta técnica é de grande utilidade quando o sistema tem tendência para divergir perante a aplicação directa de cargas significativas, quando se pretende realizar a actualização de geometria ou estivermos perante certos métodos incrementais, nomeadamente, de controlo de deslocamentos. Sendo sempre favorável, em termos de fiabilidade, a selecção de técnicas incrementais deste tipo em estruturas que levantem dúvidas ou problemas na sua trajectória de carga, estas não devem ser usadas, isoladamente, mas em conjunto com procedimentos iterativos compatíveis.

Reflectindo agora um pouco no que será um esquema incremental puro, ou seja, sem ciclo iterativo associado, concluiremos que este poderá dividir-se em três categorias:

1. Utilização somente da matriz de rigidez linear com actualização de geometria;
2. Utilização da matriz tangente sem actualização de geometria;
3. Utilização da matriz tangente com actualização de geometria.

Discutamos uma a uma estas três alternativas, na certeza de ser óbvio que, conforme o aumento do número de incrementos com que se divide o carregamento total, melhor aproximação existirá à realidade, assim:

Utilização somente da matriz de rigidez linear com actualização de geometria:

- Neste caso, por maior que seja o número de incrementos, nunca se atingirá a curva exacta carga-deslocamento (fig.3.1), mesmo que se realize um recomendável ciclo iterativo adicional, para cada incremento, com vista à completa satisfação das equações de equilíbrio, isso será possível⁵¹. A razão prende-se com facto de a não utilização da matriz geométrica ou equivalente retirar a sensibilidade a diversos contributos para a não linearidade geométrica, como o ter em atenção o valor das tensões já alojadas nos elementos.
- Contudo, se o procedimento anterior ainda tem préstimo e alguma eficiência em estruturas que sofram acentuados deslocamentos e não estejam sujeitas a severos esforços, sobretudo axiais, já em caso contrário se mostram radicalmente

⁵¹ Pelo facto de se utilizar um ciclo incremental rudimentar com base, unicamente, na matriz de rigidez linear e actualização de geometria, nada obsta a que se melhore esse processo com a introdução de qualquer das técnicas incrementais e iterativas que se vão adiante expor. Aliás e como vamos ver, o emprego conjunto da matriz de rigidez linear e a actualização de geometria com métodos de controlo de deslocamentos é suficiente para se

inaplicáveis. Isto porque, como já foi supramencionado, não se consegue captar sem o recurso à matriz geométrica o efeito, neste caso condicionante, da não linearidade geométrica causada por esses esforços. Ou seja: a estrutura tem o seu comportamento não linear regulado pela perda de rigidez devida às elevadas tensões que estão instaladas nos seus elementos e não por motivo de eventuais alterações de geometria.

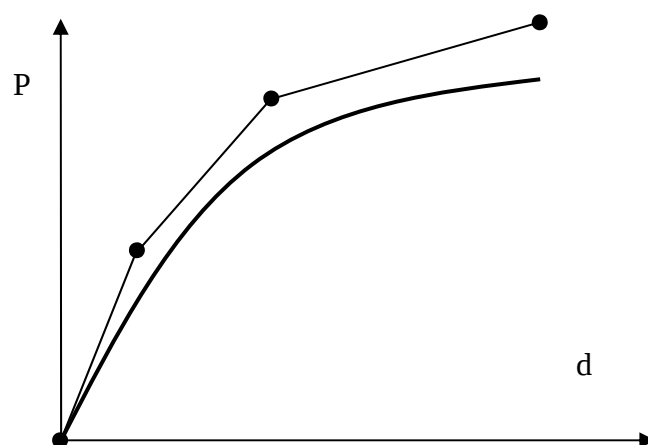


Figura 3.1: Carga-deslocamento no método incremental com matriz linear e actualização de geometria.

Utilização da matriz tangente sem actualização de geometria:

- Aqui, ao contrário da situação anterior, já se consegue colher, recorrendo à matriz geométrica, o efeito da não linearidade geométrica causada pelos esforços. Pelo que, se a estrutura tem o seu comportamento não linear assente na redução de rigidez devido às elevadas tensões que estão instaladas nos seus elementos e não por motivo de eventuais alterações de geometria (efectuando-se no final de cada incremento a actualização dos esforços na matriz geométrica), esta formulação poderá conduzir a resultados menos maus.
- Mas, caso seja a modificação de geometria o factor decisivo, poderemos ficar muito aquém de valores aceitáveis.
- Como se pode observar na figura 3.2 os resultados alcançados por este método poderão ser melhores ou piores do que no anterior, conforme for predominante a

ultrapassarem, surpreendentemente bem, pontos críticos do trajecto de carga do tipo “snap-through”.

actualização de geometria ou as forças axiais (ou mesmo outros esforços).

Assim, para a trajectória (1) os resultados mostraram-se menos exactos utilizando a matriz geométrica do que apenas a matriz linear com actualização de geometria (2), já para o percurso (3) se verificou o inverso, estando-se na presença de um caso para o qual o valor das força internas instaladas na estrutura são determinantes.

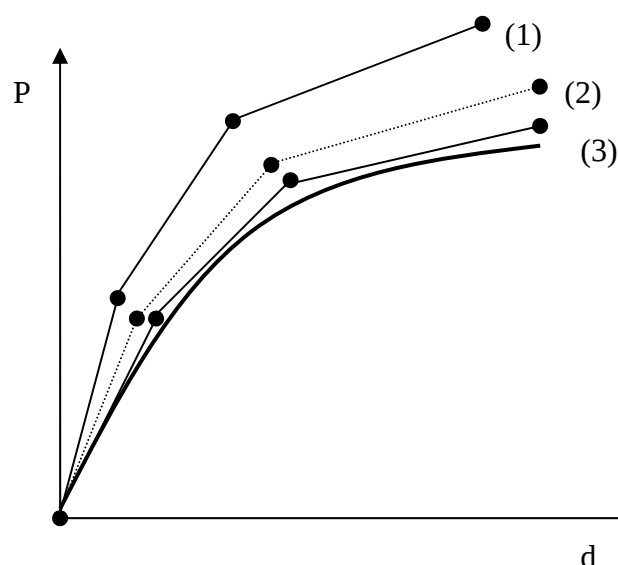


Figura 3.2: Carga-deslocamento no método incremental puro com $[K_G]$ e sem actualização de geometria.

Utilização da matriz tangente com actualização de geometria:

- Corrigem-se nesta formulação os principais obstáculos que diferenciam as duas anteriores, mantendo-se aquele que lhes é comum: a ausência de garantia do equilíbrio das equações do sistema por cada incremento aplicado.
- Em termos gerais, será a mais séria das três formulações, embora a que arrasta mais problemas de estabilidade e precisão numérica.

Como foi referido, e conforme se pode observar na figura seguinte, a relação entre as cargas e os deslocamentos nodais afasta-se, progressivamente, da correcta, estando este desfasamento ligado, intimamente, à tendência para a não linearidade do próprio sistema estrutural. Esta alegada propensão não linear da estrutura, terá muito que ver com a regularidade da geometria inicial e com a sua constituição material. De qualquer forma, como também já se assinalou, em todos estes três processos a ausência de um ciclo iterativo que restitua o equilíbrio por cada incremento aplicado invalida, sempre e irremediavelmente, uma

solução final convincente e isenta problemas numéricos⁵².

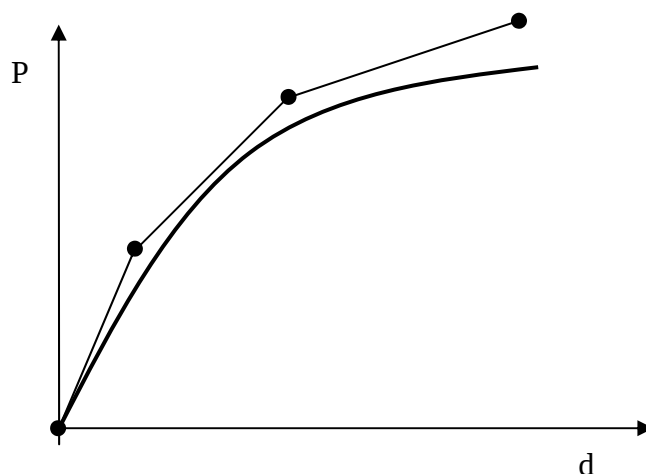


Figura 3.3: Carga-deslocamento no método incremental simples com $[K_G]$ e actualização de geometria.

Já com o pensamento noutra vertente, podemos dizer que existem duas formas principais de se efectuar a condução do processo incremental: através das cargas ou através dos deslocamentos. No primeiro caso, a carga total é dividida em parcelas que são completamente definidas antes do início do cálculo ou que são função do valor de variáveis estabelecidas durante este. No segundo, só a dimensão dos deslocamentos interessa controlar, sendo o processo insensível à quantidade de carga que está subjacente aos deslocamentos permitidos, variando mesmo o seu valor absoluto e o seu sinal ao longo do processo iterativo que, neste caso, tem que estar obrigatoriamente presente. Aliás, dada esta ser a única forma, variação do sinal⁵³ da carga, de se poderem ultrapassar pontos de inversão do sinal de carregamento, são estes os únicos processos com fiabilidade na justeza dos resultados quase assegurada, desde que haja convergência.

Feita esta pequena introdução sobre as particularidades de um método incremental puro e dos dois tipos básicos de controlo do processo incremental, propriamente dito, voltaremos a estes aquando do estudo das técnicas incrementais e iterativas ou mistas.

3.3. Técnicas Iterativas

Estas técnicas pretendem, sempre, o estabelecimento do equilíbrio entre cargas

⁵² Na verdade, e como se constatou invariavelmente neste trabalho, na verificação final de equilíbrio estrutural ao nível dos nós e dos elementos apareceram, sempre, desequilíbrios de maior ou menor dimensão.

⁵³ Ou direcção positiva ou negativa da mesma face ao seu sentido inicial, se preferirmos.

aplicadas e deslocamentos correntes, ou seja: a correspondência entre forças e deformações. Pode tal proporção ser atingida de harmonia, ou não, com o relativo estado de tensão estabilizado. Quer isto dizer que esse equilíbrio pode ser fundamentado em equações que regem o sistema sem preocupações na sua trajectória de evolução, ou, pelo contrário, com base em formulações mais completas e sensíveis às diversas mudanças das suas variáveis de estado, tanto geométricas como materiais.

Tem isto que ver, por exemplo, com:

- Inclusão, ou não, da matriz geométrica ou funções de estabilidade não lineares;
- Grau de actualização da matriz tangente;
- Método incremental e/ou iterativo.

3.3.2. Método Directo

Este método iterativo baseia-se na actualização sucessiva da matriz de rigidez geométrica, sendo as equações de equilíbrio estabelecidas para a totalidade do carregamento em cada iteração. Trata-se, pois, de lidar directamente com deslocamentos e esforços totais em todas iterações, já que a carga é também a total.

Os deslocamentos e esforços obtidos em cada iteração permitem recalcular a matriz secante a utilizar na iteração seguinte, repetindo-se este processo até que a solução respeite o critério de convergência adoptado (definido em termos de forças ou deslocamentos).

Em termos de passos a seguir, podemos estabelecer:

- 1º) Cálculo da equação $[K_L] \{U\} = \{P\}$, de onde se retiram os esforços axiais elásticos lineares.
- 2º) Iterações sucessivas de resolução de $[K_L + K_G] \{U\} = \{P\}$, com actualização dos esforços axiais na matriz $[K_G]$ correspondentes à iteração anterior, até que a diferença entre os deslocamentos dessa iteração e os da iteração presente sejam nulos, a menos de uma tolerância.

Este é, portanto, um processo em que apenas existe um incremento único com a totalidade da carga, executando-se um processo iterativo de aproximação sucessiva à solução convergida.

Este método tem sido, exclusiva e profusamente, usado em trabalhos que se situam na mesma área do presente [5,18,38], tendo-se verificado, segundo estes autores, a grande

vantagem de uma rápida convergência, dado os efeitos de 2ª ordem não dependerem, significativamente, dos esforços axiais⁵⁴. Há, contudo, quem discorde desta facilidade de convergência [41], afirmando que a aplicação deste método conduz, normalmente, a processos de convergência lenta, podendo mesmo não se garantir a sua obtenção em situações em que as relações P-d são côncavas, ou seja, estruturas que endureçam durante a deformação.

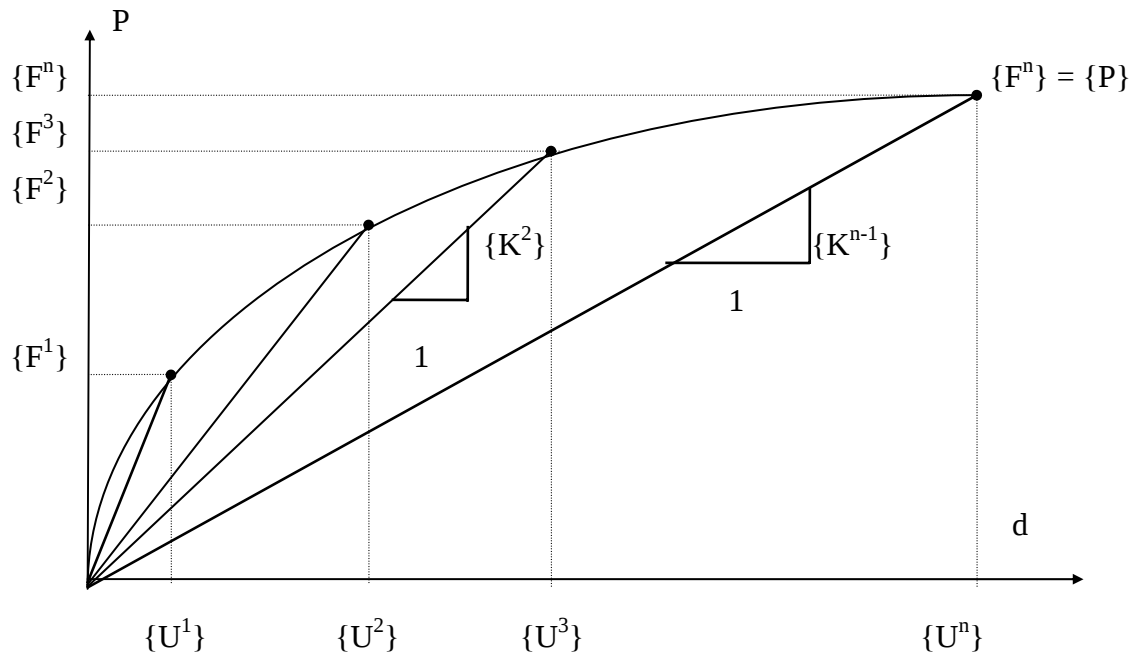


Figura 3.8: Diagrama carga-deslocamento do método directo.

Na verdade, ambas as opiniões têm razão de ser, dado a sua menor ou maior aptidão de convergência ser função da estrutura em questão. De acordo com os exemplos agora testados, registou-se que, muito embora a sua simplicidade, conduz a resultados tão bons como as mais sofisticadas alternativas, desde que as estruturas não tenham um forte comportamento não linear e/ou sofram deslocamentos significativos. Reafirme-se, todavia, que este método é impraticável em estruturas que na sua trajectória da relação carga-deslocamento estejam sujeitas a redução de carga com aumento de deslocamento, ou seja: estruturas que necessitem de actualização de geometria para uma completa identificação da sua história de deformação

⁵⁴ Traduzindo-se, essencialmente, os principais efeitos de 2ª ordem num agravamento dos momentos elásticos, o que não é, mesmo de forma imediata, difícil de aceitar. Os exemplos executados neste trabalho confirmam tais observações, sobretudo para estruturas correntes sujeitas, predominantemente, a cargas verticais.

(como será fácil compreender, não é possível actualização de geometria num processo em que só existe um incremento, seja este em termos de carga ou de deslocamento⁵⁵).

Por último, e na sequência e complemento do que foi dito, refira-se que o método directo dentro de um processo incremental satisfaz, perfeitamente (podendo mesmo ser usado com actualização de geometria), desde que se esteja em controlo de cargas. Com efeito, não é razoável pensar numa utilização do método directo em controlo de deslocamentos, uma vez que o primeiro pressupõe carga constante em todas as iterações⁵⁶.

3.3.3. Método de Newton-Raphson

Este método é o mais antigo esquema iterativo ainda largamente em uso.

O método de Newton-Raphson utiliza a matriz tangente definida para cada iteração, com base no incremento de deslocamentos e forças residuais da iteração anterior.

Adapta-se muito bem à formulação Lagrangiana actualizada, já que se trata de um processo de elasticidade variável que implica a actualização da matriz tangente em cada iteração, com base na seguinte expressão:

$$\{U\}_n = ([K_T]_{n-1})^{-1} \{R\}_{n-1} + \{U\}_{n-1}, \text{ com } \{R\}_{n-1} = \{P\}_{n-1} - \{F\}_{n-1} \quad (3.1)$$

Os deslocamentos no final de cada iteração são actualizados através da adição dos incrementos de deslocamento obtidos nessa iteração e o processo termina logo que seja respeitado o critério de convergência adoptado.

Apresenta uma convergência bastante superior ao método iterativo directo, sendo ainda reduzido o inconveniente da divergência do processo iterativo provocado por eventuais soluções oscilantes [41].

Se bem que o expresso nos parágrafos anteriores é verdade, usualmente, situações existem em que não é possível atingir a solução. Isto pode acontecer porque a mesma não é de todo possível ou porque em função da formulação adoptada (em termos de matriz tangente, critérios de actualização de geometria, controlo de cargas ou de deslocamentos, características

⁵⁵ Referimo-nos à versão convencional do método directo, já que nada obsta a que este possa ser utilizado numa forma incremental e com actualização de geometria. No entanto, a registar-se esta última situação, poder-se-á pôr a questão se continuamos a falar do mesmo método. Seguramente que mesmo em caso de resposta afirmativa à dúvida anterior, nunca esta se poderá estender à sua forma mais pura.

⁵⁶ Em todos os métodos consistentes com controlo de deslocamentos a carga varia ao longo do processo iterativo, de modo a conseguir-se limitar o(s) deslocamento(s) dentro de limites impostos, ou restringir uma

geométricos e materiais das secções, etc.) tal não se consegue assegurar ou atingir.

3.3.4. Método de Newton-Raphson modificado

Existem diversas variações do método iterativo de Newton-Raphson, sendo estas baseadas, essencialmente, no número de vezes que é necessário recalculer a matriz tangente. De facto, enquanto o método de Newton-Raphson original recalcula a matriz tangente no início de todas as iterações, com significativos custos computacionais, os seus derivados só o fazem uma única vez ou em algumas vezes durante todo o processo. Se bem que se ganhe tempo, com estas adaptações ao método primitivo, ao evitar ter de se actualizar a matriz tangente, a convergência torna-se bastante mais lenta, já que se vê aumentado o número de iterações [4,41].

Ressalve-se, de qualquer modo, que não retirando uma veracidade genérica ao que foi afirmado, casos há (e não parecem ser assim tão poucos na opinião do autor) em que a razão entre o número de iterações suplementar e a velocidade de cálculo, face à não necessidade de montar a matriz tangente, estão equilibradas ou mesmo em vantagem para as versões modificadas. Tal é tanto mais perceptível quanto maior for a linearidade do comportamento da estrutura (o que faz absoluto sentido, já que a diferença prática entre a matriz tangente no início do incremento e no final do mesmo não é influente no desempenho do processo iterativo de convergência, sendo também os resíduos a dissipar igualmente menores).

Saliente-se, ainda, que se eleva, dramaticamente, o nível de eficiência dos processos modificados, quando estes são acompanhados de algoritmos de cálculo que permitem a dispensa da triangulação do sistema de equações a resolver, tornando-se apenas necessária a retrossubstituição por as forças solicitantes (os resíduos) se alterarem em cada iteração (caso tal não se verifique, então o próprio processo de convergência encontrar-se-ia condenado e sem solução, irremediavelmente).

Diga-se que estas técnicas iterativas, baseadas no método de Newton-Raphson, são normalmente utilizadas em conjunto com um processo incremental.

Segue-se um resumo das versões modificadas, mais usuais, do método de Newton-Raphson que se baseiam, então, no actualizar da rigidez da estrutura só em algumas iterações.

energia associada ao trabalho da(s) carga(s) ao longo desse(s) mesmo(s) deslocamento(s) (controlo energético).

3.3.4.1. Matriz Tangente calculada na 1ª iteração do 1º incremento

Também conhecida por matriz de rigidez inicial, utiliza-se a matriz de rigidez tangente calculada na 1ª iteração do 1º incremento (é suposto que estamos a adoptar uma metodologia incremental) ao longo de todo o processo. Daqui resulta que, se colocarmos a matriz de rigidez reduzida em memória, apenas temos que proceder à sua retrossubstituição para resolver a equação de equilíbrio:

$$\Delta\{U\}_n = ([K_T]_0)^{-1} \{R\}_{n-1} \quad (3.2)$$

Apesar de incondicionalmente estável, à parte das excepções já apontadas, é um método que exige um grande número de iterações, já que a sua taxa de convergência é linear. Por outro lado, embora o espírito desta técnica seja a máxima economia, trabalhando apenas com a matriz de rigidez linear, será recomendável o recalcular da matriz tangente na 2ª iteração deste 1º incremento, pois de outro modo não será possível preencher a matriz geométrica pelo menos uma vez. Representando esta matriz uma medida importante da não linearidade da estrutura e dos respectivos efeitos de 2ª ordem na mesma, parece pouco razoável a completa ausência da sua contribuição no processo. Acresce ainda que esta atitude de actualizar a matriz geométrica uma única vez, pode não se tornar muito arriscada em estruturas de comportamento, fundamentalmente, linear, dado que a proporção com que são distribuídos os esforços lineares iniciais mantém-se próxima da final, conduzindo a bons resultados com um pequeno esforço.

3.3.4.2. Matriz Tangente calculada na 1ª iteração de todos os incrementos

A matriz tangente só é calculada na 1ª iteração de cada incremento.

Como já se referiu, este processo apresenta a grande vantagem de apenas ser montada a matriz tangente da estrutura uma vez para cada incremento, podendo efectuar-se também uma única triangulação do sistema de equações, restando efectuar a retrossubstituição em cada iteração.

Entre os métodos modificados este foi o que apresentou melhores resultados globais para os exemplos realizados.

3.3.4.3. Matriz Tangente calculada na 2ª iteração de todos os incrementos

Neste caso, a matriz tangente só é calculada na 2ª iteração de cada incremento, salvo o caso do 1º incremento em que, imperiosamente, terá que existir a montagem inicial da matriz de rigidez linear.

A razão de se recorrer ao recalcular da matriz tangente só na 2ª iteração e não na 1ª tem a ver com o facto de se poder mostrar mais fácil de convergir uma matriz que já deu mostras de o conseguir no incremento anterior, sendo agora só a mesma actualizada para efeitos de «espalhamento»⁵⁷ do resíduo.

3.4. Técnicas Mistas

As técnicas incrementais e as iterativas são, em geral, mais produtivas e eficazes quando utilizadas de forma associada. Esta complementaridade baseia-se nas seguintes funções distintas:

- Cabe ao ciclo incremental a definição do valor, em termos de cargas ou de deslocamentos, que se deve aplicar a cada novo incremento, assegurando uma ajustada proporção, de modo que não ocorra insuficiência nem excesso na sua grandeza. Quer isto significar, de forma sintética, que se torna pouco económico um pequeno incremento para um comportamento próximo do linear e arriscado um grande incremento para um comportamento decididamente não linear.
- Presta-se o ciclo iterativo para encontrar o equilíbrio entre as forças aplicadas no início do incremento e os deslocamentos obtidos, proporcionando as forças aos deslocamentos ou vice-versa, conforme se trate de controlo de cargas ou controlo de deslocamentos.

A denominação destes processos, bem como a sua própria organização mais visível, tem variado ao longo do tempo e dos autores, não sendo necessariamente os aqui designados. No entanto, a sua natureza vital mantém-se a mesma no que ao elementar dos processos

⁵⁷ O uso da palavra «espalhamento» serve apenas para enfatizar o facto de o resíduo ser o conjunto das forças desequilibradas, face à diferença entre as cargas aplicadas e as que se encontram, realmente, instaladas, tendo em consideração os deslocamentos presentes. Daí que essas forças desproporcionadas tenham que ser aplicadas de novo ao sistema que ainda não as «conseguiu» absorver, já que se mantém à procura da configuração de equilíbrio entre forças e deslocamentos.

incremental e iterativo diz respeito.

Neste contexto, e a título de exemplo, refira-se José Espada [21] que apresentou em 1975, três métodos de abordagem para o cálculo não linear de estruturas, diferenciando-os desta forma:

1ª) Método “passo a passo”

A carga total é aplicada de forma subdividida através de um número específico de pequenos incrementos de carga, sendo efectuado um cálculo linear com elasticidade constante para cada um deles. Este cálculo corresponde à resolução das equações de equilíbrio, adoptando a matriz de rigidez surgida dos deslocamentos atingidos no final do incremento anterior admitidos como correctos.

A essência do método consiste, pois, em supor que a matriz de rigidez completa $([K_L] + [K_G])$ se mantém constante em cada passo, por este ser muito pequeno. Trata-se de substituir o processo real por uma série de processos elásticos, em cada um dos quais se mantém constante a matriz de rigidez tangente, sendo esta construída com os esforços axiais obtidos no final do incremento anterior.

Assim:

1º) Resolver o sistema:

$$\{P\}_n = [K_T]_{n-1} \Delta\{U\} \quad (3.3)$$

do qual o primeiro membro é conhecido e sendo a matriz $[K_T]_{n-1}$ a obtida no final do passo anterior (ou a matriz linear para a 1ª aplicação);

2º) Calcular os deslocamentos dos nós obtidos no final do passo n:

$$\{U\}_n = \{U\}_{n-1} + \Delta\{U\} \quad (3.4)$$

3ª) Conhecendo $\{U\}_n$ podemos conhecer nos eixos locais de cada peça as forças axiais existentes (bem como os restantes esforços);

4º) Com essas forças axiais podemos montar de novo a matriz geométrica actualizada ao final deste último incremento e partir de novo para o ponto 1º) até que se atinja o último incremento de carga.

2º) Método da correcção do equilíbrio

Este método é bastante semelhante ao anterior, só que aqui não se fixa, previamente, o valor do incremento de carga a aplicar no próximo passo. Esse incremento de carga é, neste caso, obtido da diferença entre a carga que queremos aplicar e a carga necessária a manter os

nós na posição em que se encontravam no final do incremento anterior ao considerado.

Assim:

1º) Resolver o sistema:

$$\{P\}_n = [K_T]_{n-1} \Delta\{U\} \quad (3.5)$$

do qual o primeiro membro é conhecido (sendo a carga total para a 1ª aplicação e o resíduo para as restantes) e a matriz $[K_T]_{n-1}$ obtida no final do passo anterior (ou a matriz linear para a 1ª aplicação);

2º) Calcular os deslocamentos dos nós obtidos no final do passo n:

$$\{U\}_n = \{U\}_{n-1} + \Delta\{U\} \quad (3.6)$$

3ª) Conhecendo $\{U\}_n$ podemos conhecer nos eixos locais de cada peça as forças axiais existentes (e restantes esforços);

4º) Dando por bons os deslocamentos obtidos no final deste passo e partindo da relação:

$$\{F\}_n = [K_T]_n \{U\}_n \quad (3.7)$$

é possível averiguar qual a carga que teríamos de aplicar nos nós, para conseguir que os deslocamentos dos mesmos fossem os definidos por $\{U\}_n$;

5º) Deste modo a carga a aplicar no próximo incremento resulta da diferença:

$$\Delta\{F\}_{n+1} = \{P\} - \{F\}_n \quad (3.8)$$

3º) Método misto

Trata-se de uma combinação dos métodos anteriores, sendo o seu objectivo evitar uma possível divergência entre os resultados reais e os conseguidos pelo método “passo a passo”.

Consiste em efectuar uma correcção de equilíbrio, sistematicamente, depois de se ter efectuado um grupo de vários passos.

Como se pode intuir, ao primeiro método (“passo-a-passo”) corresponde um processo incremental simples, ao segundo (“correcção de equilíbrio”) o método iterativo simples e ao terceiro (“misto”) um processo incremental e iterativo em que este último (processo iterativo) só terá lugar de tantos em tantos incrementos⁵⁸.

Sintetizando, um processo incremental e iterativo visa, essencialmente, o cumprimento das seguintes missões [46]:

⁵⁸ O que está de acordo com a posição deste autor, quanto à generosa tolerância na precisão dos cálculos nos incrementos iniciais.

1. Estabilidade numérica na aproximação de pontos críticos, como pontos limites e pontos de “snap-back”;
2. Ajustabilidade dos incrementos de carga que reflecta as variações de rigidez da estrutura;
3. Capacidade de averiguação própria na determinação do sinal de carregamento.

Hoje, poder-se-á dizer que este tipo de técnica, incremental e iterativa, está já estabelecido, nos seus aspectos doutrinários essenciais, para as formulações mais usuais.

Como exemplo, cite-se um processo incremental a carga constante com ciclo iterativo baseado no método de Newton-Rapshon. De facto, na diversa bibliografia que apresenta e adopta estes processos, depara-se com um grande consenso e uniformidade quanto a esta questão [4,15,16,24,35,41,46].

Assim, e no sentido de estabelecer um algoritmo completo de análise não linear geométrica (embora na sua forma condensada ou, se quisermos, abreviada), passa-se a expor a sua iniciação, os seus passos elementares e a sua adaptação às técnicas apresentadas⁵⁹.

Seja a equação geral de equilíbrio de uma estrutura sujeita a uma análise não linear, relativa ao incremento i da iteração j :

$$[K_T]_{j-1}^i \{\Delta U_j^i\} = \{P_j^i\} - \{F_{j-1}^i\} \quad (3.9)$$

em que as condições iniciais, correspondentes ao incremento, são:

$$[K_T]_0^i = [K_T]_n^{i-1}, \{P_0^i\} = \{P_n^{i-1}\}, \{F_0^i\} = \{F_n^{i-1}\} \quad (3.10)$$

sendo o subscrito “ n ” usado para indicar a última iteração. Aqui $\{\Delta U_j^i\}$ significa o acréscimo de deslocamento da iteração j , provocado pelas cargas externas $\{P_j^i\}$ aplicadas nessa iteração e pelas forças internas $\{F_{j-1}^i\}$ da iteração anterior $j-1$.

O vector de cargas externas pode ser decomposto em:

$$\{P_j^i\} = \{P_{j-1}^i\} + \{\Delta P_j^i\} \quad (3.11)$$

ou :

$$\{P_j^i\} = \{P_{j-1}^i\} + \lambda_j^i \{P\} \quad (3.12)$$

em que as condições iniciais relativas a este vector seriam $\{P_0^i\} = \{P_n^{i-1}\}$, λ_j^i o factor incremental de carregamento para a iteração j do incremento i e $\{P\}$ o vector de cargas total.

Com a resolução do sistema (3.9) obtemos $\{\Delta U_j^i\}$, pelo que o deslocamento total, no

⁵⁹ Com base nos subcapítulos 8.6 a 8.11 de [46] e em [35].

final da iteração j do incremento i , é :

$$\{U_j^i\} = \{U_{j-1}^i\} + \{\Delta U_j^i\} \quad (3.13)$$

Convencionalmente, a diferença entre as cargas externas aplicadas $\{P_{j-1}^i\}$ e as forças internas $\{F_{j-1}^i\}$, resultantes da análise da iteração anterior $j-1$, é designada como forças desequilibradas. Na forma vectorial podemos representar:

$$\{R_{j-1}^i\} = \{P_{j-1}^i\} - \{F_{j-1}^i\} \quad (3.14)$$

e a equação (3.9) pode ser reescrita:

$$[K_T]_{j-1}^i \{\Delta U_j^i\} = \lambda_j^i \{P\} + \{R_{j-1}^i\} \quad (3.15)$$

Por conveniência e demarcação dos dois processos, podemos substituir esta equação pelas duas equações seguintes:

$$[K_T]_{j-1}^i \{\Delta V_j^i\} = \{P\} \quad (3.16)$$

$$[K_T]_{j-1}^i \{\Delta X_j^i\} = \{R_{j-1}^i\} \quad (3.17)$$

aonde o acréscimo de deslocamento de subdividiu em duas partes, originando que:

$$\{\Delta U_j^i\} = \lambda_j^i \{\Delta V_j^i\} + \{\Delta X_j^i\} \quad (3.18)$$

Seguidamente, vai expor-se como o factor λ_j^i é determinado em função das restrições impostas para cada um dos métodos iterativos apresentados.

Porém, faça-se antes uma chamada de atenção ao facto de esta exposição divergir da patente na referência bibliográfica citada [46], já que nesse texto aparece o método de Newton-Raphson como distinto e mais um entre os restantes. Atendendo a que este método é não só o precursor de todos os outros, como também por encerrar uma filosofia generalista, optou-se por não chamar aqui esta formulação, directamente, sendo corporizada por todos os processos que têm por base o controlo de cargas. Tal atitude tem, em meu entender, tanto mais sentido quanto o método de Newton-Raphson apenas controla o ciclo iterativo, sendo, portanto, um método iterativo puro, enquanto os métodos de controlo de deslocamentos também administram o processo incremental.

Segue-se uma apresentação sumária dos vários métodos que se julga deverem estar presentes neste trabalho, sendo a sua exposição efectuada numa perspectiva descritiva e de formulação matemática explícita.

3.4.1. Controlo de Carga

Nestas técnicas o motivo central é a forma como se distribui a carga ao longo do caminho da solução, sendo os deslocamentos apenas, exclusivamente⁶⁰, utilizados para a obtenção da convergência, durante o ciclo iterativo de busca de equilíbrio. Mais, apenas na 1ª iteração é aplicada a carga atribuída a esse incremento, sendo nulo o vector solicitação nas restantes iterações (estamos, pois, na presença de uma sequência iterativa a carga constante). Consistindo, deste modo, as restantes iterações na simples procura do equilíbrio dessa carga aplicada.

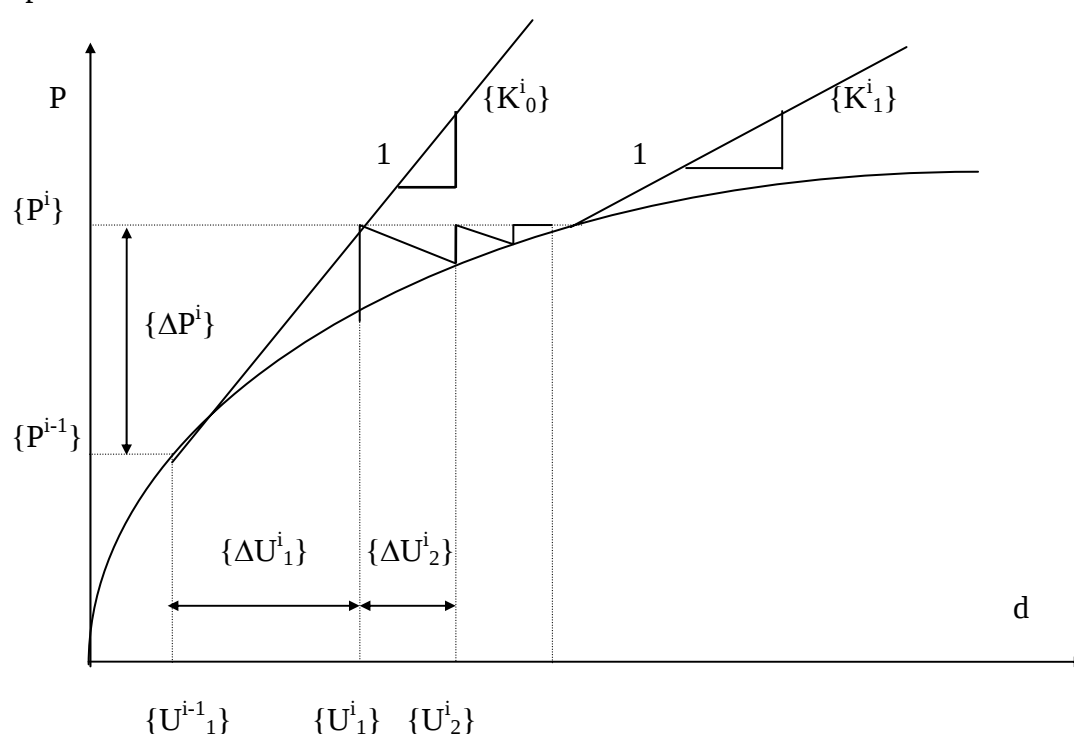


Figura 3.4: Diagrama carga-deslocamento para o método do controlo de carga.

Uma das grandes desvantagens da adopção de métodos de controlo de carga, é que estes não estão vocacionados para alterações no percurso da solução, por ajuste dessas cargas face às modificações de comportamento da estrutura.

Vão-se apresentar dois tipos de métodos de controlo da cargas: número de incrementos

⁶⁰ Mesmo que se utilize um qualquer dispositivo de verificação de deslocamentos (como, por exemplo, flechas a meio-vão de vigas), tal não se pode considerar, no contexto deste trabalho, como uma teoria de controlo de deslocamentos no processo incremental.

pré-fixado e de igual valor e incrementação automática com base no número de iterações do incremento anterior

3.4.1.1. Número de incrementos pré-fixado e de igual valor

É a forma mais simples, consistindo na fixação prévia do número dos incrementos de carga ao longo do processo, sendo, normalmente, todos de igual grandeza.

Desde que não se pretenda efectuar uma actualização de geometria, não possui este método muitas vantagens em relação à aplicação simples da totalidade da carga com ciclo iterativo associado.

3.4.1.2. Incrementação automática com base no número de iterações do incremento anterior

Trata-se de um forma muito simples de tentar contabilizar a dificuldade que a cada instante de carregamento a estrutura tem, face às cláusulas envolvidas, de encontrar o equilíbrio, reduzindo ou aumentando o valor do incremento em função desse sintoma.

Esta forma aproximada de captar a não linearidade da resposta da estrutura foi proposta por Ramm (1981) e recolhida de [35].

O acréscimo do factor de carga a aplicar no incremento i , λ_i , é obtido de:

$$\lambda_i = \lambda_{i-1} (I_d / I_{i-1})^{(1/2)} \quad (3.19)$$

onde I_d é o número de iterações desejado para cada incremento e I_{i-1} foi o número de iterações do incremento anterior. É apontado como valor de referência $I_d \cong 3$, tendo sido neste trabalho os melhores resultados obtidos com $I_d = 4$.

Este procedimento aponta para acréscimos do factor de carga mais pequenos quando a resposta tem uma não linearidade mais acentuada e para acréscimos maiores quando a resposta é mais linear.

O valor de partida λ_1 é um factor importante já que condiciona todo o encadeamento seguinte (conforme é comentado em 3.7.1.), podendo uma menos feliz selecção obrigar a repetir todo o processo.

Para todos os factores de carga é prudente fixar um intervalo restritivo dos valores de

crescimento e de redução, de modo a evitar comportamentos anómalos. Como limites superiores e inferiores de referência cite-se [35]:

$$0,1 \leq \lambda_i / \lambda_{i-1} \leq 5,0 \quad (3.20)$$

Como se pode observar, o valor inferior mínimo do incremento é metade do máximo superior, ou seja, cautelas especiais devem existir, sobretudo, quando nos propomos a um acréscimo significativo desse incremento.

Em termos de factor incremental de carregamento λ_j^i , as condições restritivas podem ser expressas, simbolizando j a iteração corrente, como:

$$\lambda_j^i = \begin{cases} \text{Constante} & \text{para } j = 1 \\ 0 & \text{para } j \geq 2 \end{cases} \quad (3.21)$$

3.4.2. Controlo de Deslocamentos

Nestas técnicas o motivo central é limitar os deslocamentos, de modo que, por muita acentuada que seja a perda de rigidez⁶¹, a carga é sempre distribuída ao longo do caminho da solução em função desses mesmos deslocamentos. Aqui será forçoso existir um ciclo iterativo, no qual a carga vai variando em função da necessidade de se obter um valor já fixado⁶² de deslocamento (estamos, pois, na presença de uma sequência iterativa a carga variável). Não consistindo, unicamente, as restantes iterações após a primeira, na simples procura do equilíbrio da carga aplicada. Mais, como o que se pretende é controlar os deslocamentos, a carga aplicada na 1ª iteração de qualquer incremento será sempre a carga total, cabendo a todas as seguintes iterações empregar a porção de carga necessária à anulação dos deslocamentos em excesso.

Um das grandes vantagens da adopção de métodos de controlo de deslocamentos é que estes estão vocacionados para alterações no percurso da solução, por doseamento do nível de

⁶¹ Ou o aumento da não linearidade na réplica da estrutura ao carregamento actual, face ao estado de deformação-tensão já existente.

⁶² Todos os métodos de controlo de deslocamentos existentes, quanto seja do conhecimento do autor, impõem a fixação prévia de um valor de deslocamento no incremento, ainda que na forma indirecta de uma energia. Uma formulação pertinente, talvez fosse aquela que permitisse que dentro do próprio ciclo iterativo o objectivo do deslocamento a atingir pudesse ser modificado, face às informações entretanto adquiridas do interior desse

carregamento face às modificações de comportamento da estrutura.

As formulações a seguir apresentadas foram, essencialmente, retiradas das referências [35] e [46], existindo nesta última uma exposição sintética e particularmente feliz, bem como uma discussão consequente, igualmente, interessante.

3.4.2.1. Incrementação automática com base no CSP

Será, espontaneamente, aceite a circunstância de que conforme a estrutura perder rigidez ao longo do processo de cálculo, a diminuição do valor dos incrementos se torna, gradualmente, mais aconselhável, para que se possa acompanhar com maior justeza a curva que relaciona cargas e deslocamentos.

Esta certeza quase palpável, pode ser apurada com facilidade porquanto forças e deslocamentos são conhecidos em qualquer ponto do espaço e do tempo. Assim, conseguimos ter uma percepção sobre a variação da rigidez da estrutura da qual nos vamos poder servir para estabelecer o valor do incremento a aplicar. Como será lógico, essa quantidade poderá aumentar para pequenas variações e diminuir em caso contrário.

Um indicador da rigidez do sistema é, indubitavelmente, a relação materializada no quociente entre cargas e deslocamentos ($k=\Delta p/\Delta d$) a cada incremento ou mesmo iteração. Esta relação básica poderá ser melhorada, se denunciar a situação actual face à inicial e também à imediatamente anterior, ou seja: se proporcionar uma comparação consecutiva e quantificável da mudança de rigidez no momento, face não só à original como ainda à do último passo convergido. Dispondo-se, assim, de uma sensibilidade melhorada que abarque a história recente de forma proveitosa.

Designa-se, neste caso, esta relação por parâmetro de rigidez corrente ("current stiffness parameter" – CSP), podendo definir-se esse parâmetro da seguinte maneira:

$$CSP = (\lambda_{i-1} / \lambda_1) (\{\delta d^1\}_1^T \{P\}) / (\{\delta d^1\}_i^T \{P\}) \quad (3.23)$$

Sendo:

$\lambda_i = (CSP / |CSP|) \lambda_1 (CSP)^{(1/2)}$, factor multiplicativo ao vector de cargas total $\{P\}$ a aplicar na 1ª iteração do iº incremento.

próprio ciclo.

λ_1 , factor de carga da 1ª iteração do 1º incremento.

λ_{i-1} , factor de carga da 1ª iteração do anterior incremento.

$\{\delta d^1\}_1^T$, vector de acréscimo de deslocamentos da 1ª iteração do 1º incremento.

$\{\delta d^1\}_i^T$, vector de acréscimo de deslocamentos da 1ª iteração do iº incremento, ou incremento corrente.

Desta expressão podem-se retirar as seguintes observações:

- O parâmetro de incremento de carga λ_j é sensível às eventuais mudanças de sinal de carregamento; essa informação é transmitida pelo CSP através de $(CSP / |CSP|)$. O quociente $(\{\delta d^1\}_1^T \{P\}) / (\{\delta d^1\}_i^T \{P\})$ estabelece uma relação entre as grandezas do trabalho efectuado no início do processo e o actual, servindo o primeiro para ponderar o segundo.
- O quociente $(\lambda_{i-1} / \lambda_1)$ estabelece uma relação entre os valores do incremento efectuado no início do processo e o actual, servindo o primeiro para ponderar o segundo.
- O parâmetro λ_1 em $\lambda_i = (CSP / |CSP|) \lambda_1 (CSP)^{(1/2)}$ limita ainda o valor a aplicar no presente incremento, reduzindo os riscos de uma variação demasiado brusca.

Esta versão do CSP foi retirada de [46], sendo atribuída a Bergan (1978,1980).

Numa apreciação incluída nessa bibliografia, distinguem-se algumas propriedades deste parâmetro entre as quais:

- A sua dilatação em estruturas em que o carregamento esteja a provocar uma fase de endurecimento, ou a sua contracção quando o carregamento esteja a conduzir a uma fase de amaciamento. Num terceiro caso que é da aproximação de pontos-limite, esse valor tende para zero.
- O seu sinal é, pois, positivo para uma zona estável da curva carga-deslocamento, para a qual as cargas exteriores podem ser incrementadas. Ou negativo se nos encontramos num percurso instável dessa curva, onde o carregamento exterior deve ser diminuído.
- Esta formulação é bastante satisfatória para ultrapassar pontos-limite como os do tipo “snap-through”, no entanto pode-se mostrar insuficiente para situações de “snap-back”, já que neste caso a expressão tende para o infinito.

Na verdade, no caso desta última situação, pode acontecer que, coincidentemente, o

vector $\{\delta d^1\}_i$ na vizinhança do ponto de inversão dos deslocamentos seja, ou muito se aproxime, de um vector nulo, implicando que $(\{\delta d^1\}_1^T \{P\}) / (\{\delta d^1\}_i^T \{P\})$ tenha valor infinito. Contudo, será também conveniente dizê-lo, tal situação não é tão provável de suceder quanto possa parecer, já que de um ponto se trata e não de uma região.

Acrescente-se, como observação, que este método foi incluído na espécie de controlo de deslocamentos, quando em rigor pertence a uma classe de controlo de energia que é, vulgarmente e por facilidade e uniformização de designações, arrumado nesta secção. Como se vai poder confirmar nesta rubrica intitulada de controlo de deslocamentos, muitos dos métodos ditos deste nome são formulações energéticas puras que se baseiam na manutenção de um patamar constante de energia a consumir em cada incremento.

3.4.2.2. Deslocamento Controlado

Este método caracteriza-se pela adopção de uma determinada componente do vector deslocamentos nodais, como parâmetro de controlo de todo o processo. Foi introduzido, inicialmente, por Argyris em 1965 [35], tendo sido depois desenvolvido por vários autores, entre os quais Batoz e Dhatt (1985) que lhe introduziram todas as considerações que vão ser apresentadas para o método do comprimento do arco [35].

Como todos os métodos de controlo de deslocamentos difere dos métodos anteriores, com base no Newton-Raphson, no facto das iterações serem efectuadas a deslocamento constante (e carga variável).

Basicamente, consiste este método no seguinte:

1. Na primeira iteração de qualquer incremento é aplicada a carga total ou de referência⁶³ à estrutura, provocando esta um deslocamento correspondente que, neste caso, se quer ver estudado numa componente devidamente seleccionada do vector deslocamentos;
2. Nas iterações seguintes à primeira é aplicada uma carga correctiva à estrutura, de tal

⁶³ *Carga total ou de referência* quer simbolizar que tanto se pode tratar de uma carga bem definida e limitada que quando atingida pára o cálculo automaticamente, como um carregamento-tipo cuja balizagem seja o esgotamento da estrutura, ou mesmo uma interrupção do acréscimo sucessivo (automático ou não) da carga por intervenção do utilizador. Estas questões têm que ver com o tipo de estudo que se pretende, desde o dimensionamento de secções de uma estrutura real a projectar, até, por exemplo, ao estudo do comportamento de bifurcação de equilíbrio num caso muito particular.

modo que no final desse incremento se assegure um valor de deslocamento previamente fixado para essa componente escolhida do vector deslocamentos, emendando quanto for preciso a resultante da carga total aplicada na 1ª iteração.

Pelo exposto, podemos dizer que no início do processo de cálculo é fixado um valor de deslocamento para uma variável do sistema, ficando todos os incrementos a realizar sujeitos a esse limite numérico

Difere, pois, dos métodos anteriores com base no de Newton-Raphson, no facto das iterações serem efectuadas a deslocamento constante e carga variável.

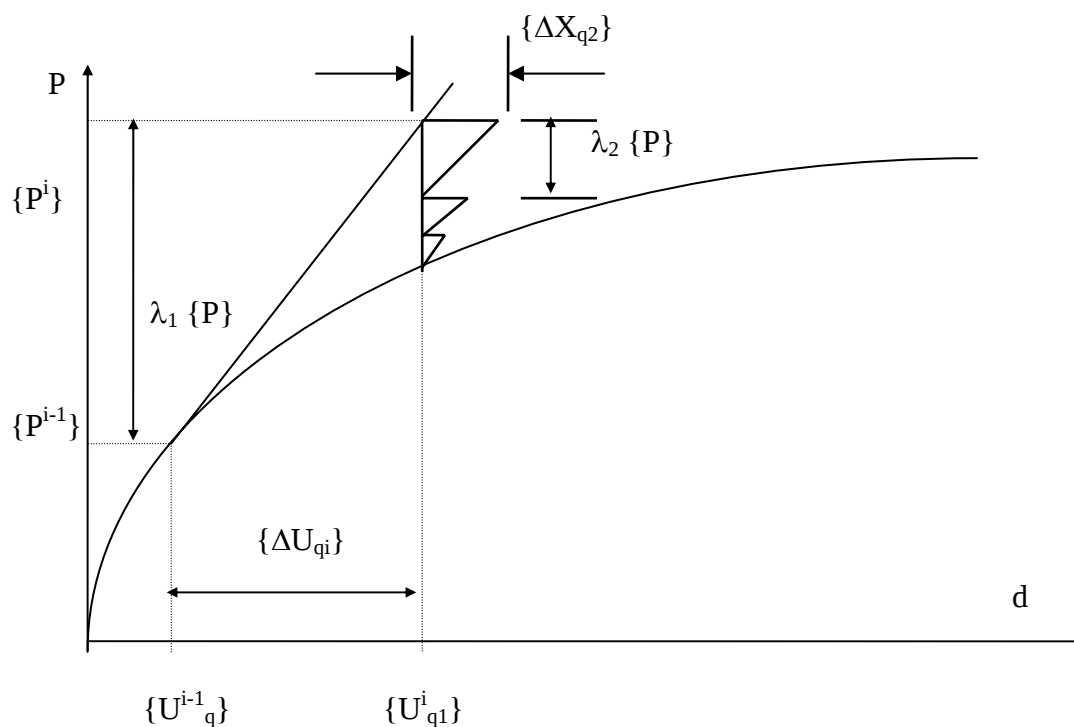


Figura 3.5: Diagrama carga-deslocamento para o método do controlo de deslocamento.

Assim, seleccionamos uma componente do vector de deslocamentos que corresponde a um grau de liberdade de um nó da estrutura, por exemplo a componente q , que vai agir como parâmetro controlador do processo, uma vez que em cada incremento esse índice só sofre o valor de deslocamento que foi fixado.

Em termos de expressão matemática simples e reportando-nos a essa componente do vector de deslocamentos $\{U_q\}$, as condições restritivas pelo método do deslocamento controlado podem ser expressas:

$$\{\Delta U_{qj}^i\} = \begin{cases} \text{Constante} & \text{para } j = 1 \\ 0 & \text{para } j \geq 2 \end{cases} \quad (3.24)$$

o que de acordo com a equação (3.18), pode conduzir à divisão da componente q do vector deslocamentos em duas partes:

$$\{\Delta U_{qj}^i\} = \lambda_j^i \{\Delta V_{qj}^i\} + \{\Delta X_{qj}^i\} \quad (3.25)$$

colocando λ_j^i em evidência no primeiro termo:

$$\lambda_j^i = (\{\Delta U_{qj}^i\} - \{\Delta X_{qj}^i\}) / \{\Delta V_{qj}^i\} \quad (3.26)$$

Para a 1ª iteração não existe qualquer resíduo, pelo que $[K_T]_{j-1}^i \{\Delta X_{qj}^i\} = \{R_{j-1}^i\} = \{0\}$, o que implica $\{\Delta X_{qj}^i\} = 0$, pelo que $\lambda_j^i = \{\Delta U_{qj}^i\} / \{\Delta V_{qj}^i\}$. Para as iterações remanescentes o método do deslocamento controlado obriga a que $\{\Delta U_{qj}^i\} = 0$, de acordo com (3.17) e a teoria que lhe está subjacente, do que: $\lambda_j^i = -\{\Delta X_{qj}^i\} / \{\Delta V_{qj}^i\}$.

Esquemmatizando:

$$\lambda_j^i = \begin{cases} \{\Delta U_{qj}^i\} / \{\Delta V_{qj}^i\} & \text{para } j = 1 \\ -\{\Delta X_{qj}^i\} / \{\Delta V_{qj}^i\} & \text{para } j \geq 2 \end{cases} \quad (3.27)$$

3.4.2.3. Comprimento do Arco

Este método consiste na aproximação do processo iterativo à curva carga-deslocamento através de uma superfície restritiva, sobre a qual vai variando o nível de carregamento até ser encontrado o ponto de equilíbrio.

O raio ou comprimento do arco, Δl ou S , pode ser definido por:

$$\Delta l^2 = \Delta d_i^T \Delta d_i + \Delta \lambda_i^2 b^T f \quad (3.28)$$

onde Δd_i é o vector incremental de deslocamento, $\Delta \lambda_i^2$ o factor de carga incremental, f o vector de forças nodais de base e b o parâmetro de escala. Este novo parâmetro tem pouco ou nenhum efeito, segundo estudos de Crisfield e Ramm [35,46], atribuindo-se-lhe por isso valor nulo. Esta nulidade corresponde a uma formulação cilíndrica da superfície referida, sendo para outras formas, como a esférica, $b \neq 0$.

O valor dos deslocamentos totais e do factor de carga incremental actualizado dado pelo somatório de todas as iterações em todos os incrementos até ao instante considerado, surge:

$$\Delta d_i = \Delta d_{i-1} + \delta d_i \quad (3.29)$$

$$\Delta \lambda_i = \Delta \lambda_{i-1} + \delta \lambda_i \quad (3.30)$$

onde o símbolo δ significa acréscimo iterativo.

Tendo em atenção as expressões (3.29) e (3.30) e aplicando-as em (3.28), obtém-se a seguinte expressão quadrática:

$$a_1 \delta \lambda_i^2 + a_2 \delta \lambda_i + a_3 = 0 \quad (3.31)$$

em que a_1 , a_2 e a_3 são coeficientes determinados em função das mesmas variáveis que compõem as expressões de (3.28) a (3.30).

A resolução desta equação (3.31) conduz, para $b=0$, a um acréscimo inicial de carga estabelecido por [35]:

$$\delta \lambda_i^n = \eta \Delta I^n / (\delta d_i^T \delta d_i)^{(1/2)} \quad (3.32)$$

em que o escalar introduzido tem como objectivo tomar em consideração as alterações no sinal do determinante da matriz de rigidez tangente ($\eta = \pm 1$), decorrentes da passagem de pontos-limite, e é obtido por:

$$\eta = \delta d_i^T f / (|\delta d_i^T f|) = \delta d_i^T K_T \delta d_i / (|\delta d_i^T K_T \delta d_i|) \quad (3.33)$$

Note-se que a utilização deste escalar obriga ao recalcular da matriz tangente na 1ª iteração de cada incremento, sem o que se torna ilusória a possibilidade de ser detectada a passagem de um ponto-limite.

O método do comprimento do arco baseia-se, então, nas seguintes condições restritivas:

$$\{\Delta U_1^i\}^T \{\Delta U_j^i\} + \lambda_1^i \lambda_j^i = \Delta S^2 \quad (3.34)$$

onde $\{\Delta U_1^i\}$ e $\{\Delta U_j^i\}$ correspondem à 1ª e jª iteração do iº incremento e ΔS é o comprimento do arco.

Estabelecendo-se que:

$$\Delta S = \begin{cases} \text{Constante} & \text{para } j = 1 \\ 0 & \text{para } j \geq 2 \end{cases} \quad (3.35)$$

Devido à inexistência de resíduos na 1ª iteração, podemos afirmar que:

$$\{\Delta U_j^i\} = \lambda_1^i \{\Delta V_j^i\} \quad (3.36)$$

o que substituindo esta equação na (3.34) conduz a:

$$\lambda_1^i = \pm \Delta S / ((\Delta V_1^i)^T \{ \Delta V_1^i \} + 1)^{(1/2)} \quad (3.37)$$

que é, exactamente, o factor incremental de carregamento a ser aplicado na 1ª iteração do i^o incremento.

As restantes iterações são efectuadas de tal forma que não haja qualquer acréscimo ao comprimento do arco, conforme (3.35). Sendo nulo ΔS , o factor incremental de carga λ_j^i toma a forma:

$$\lambda_j^i = - (\Delta U_1^i)^T \{ \Delta X_j^i \} / ((\Delta U_1^i)^T \{ \Delta V_1^i \} + \lambda_1^i) \quad (3.38)$$

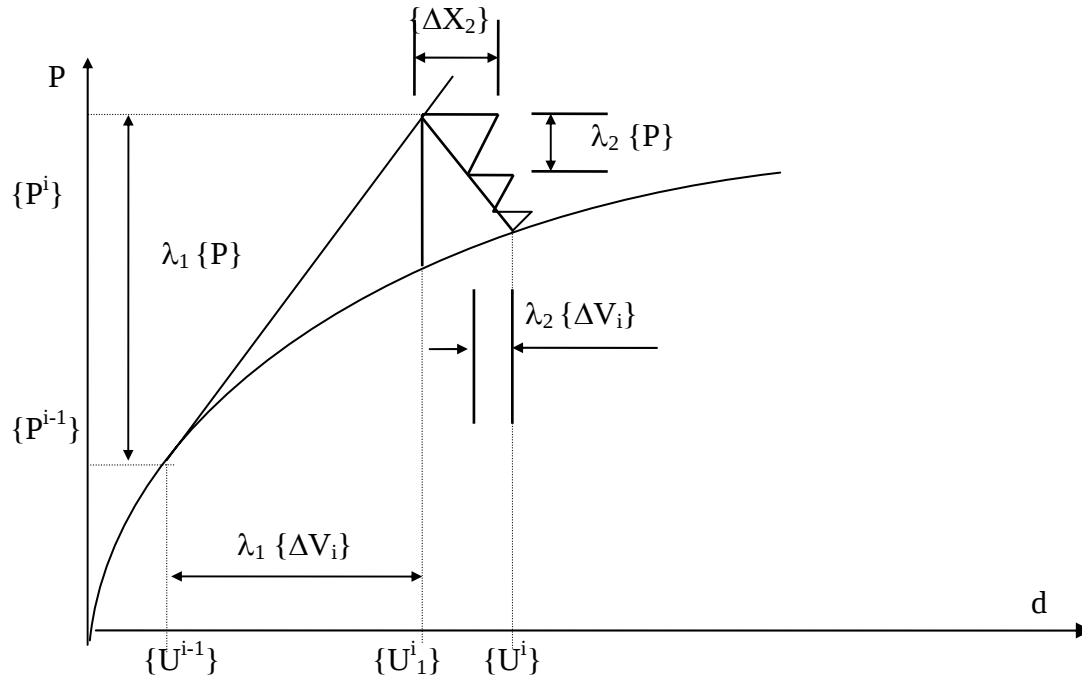


Figura 3.6: Diagrama carga-deslocamento para o método do comprimento do arco.

Uma explicação mais detalhada pode encontrar-se em [35], documento técnico do qual alguns destes apontamentos foram retirados.

Um inconveniente deste método será o facto de desconhecermos o sinal do factor λ_1^i .

3.4.2.4. Energia Controlada (ou Trabalho Controlado)

Este método tem como objectivo manter todos os passos do processo dentro de um nível

de energia constante, evitando variações bruscas que possam conduzir a divergências ou erros na procura da solução.

Essa energia que é permitido empregar em cada incremento corresponde ao exacto consumo equivalente do trabalho realizado pelas cargas aplicadas na estrutura ao longo dos deslocamentos suficientes dos graus de liberdade dos nós. Deslocamentos chamados de “suficientes” porque, embora a carga seja a total ou de referência, a deformação correspondente causada será reduzida de um coeficiente, o designado factor de carga incremental λ_j^i , implicando que o movimento da estrutura se limite à directa satisfação do dispêndio de energia estipulado previamente.

Portanto, no início de cada incremento (1ª iteração) é aplicada a carga total ou de referência que provocará um determinado deslocamento, constatando-se que o produto interno desse vector acréscimo de deslocamento pelo vector de cargas que o causa é superior ao trabalho permitido⁶⁴, há que nas iterações subsequentes desse incremento reduzir o vector acréscimo de deslocamento de tal modo que a energia total equivalente seja a pretendida.

Sendo a grandeza dos deslocamentos e das cargas linear, a afectação do factor redutor ao vector deslocamentos ou ao vector das forças é irrelevante sob o ponto de vista aritmético⁶⁵.

Aqui, como em todos os métodos, pode utilizar-se uma variável de controlo da parcela da carga total ou de referência já aplicada. Esta variável Λ_j^i será o somatório de todos os factores incrementais de carga λ_j^i já aplicados em todas as iterações de todos os incrementos:

$$\Lambda_j^i = \Lambda_{j-1}^i + \lambda_j^i = \sum \lambda_j^i \quad (3.39)$$

Proposto por Yang & McGuire (1985) é baseado nas seguintes equações restritivas:

$$\{\Delta U_j^i\}^T \lambda_j^i \{P\} = \Delta W \quad (3.40)$$

onde o incremento energético ΔW é definido por:

⁶⁴ Em princípio, pois caso tal não se verifique ou a carga de referência é muito pequena ou o valor do deslocamento imposto muito generoso.

⁶⁵ Como já se reparou, falamos de controlo e restrição de deslocamentos, mas referimo-nos sempre a factor incremental de carga. Tal deve-se ao facto de, como foi dito, ser indiferente em termos matemáticos a variável de controlo identificar-se com o campo de forças ou com o campo de deslocamentos. O importante é que exista um parâmetro bem identificado que, de forma insofismável, quantifique a parcela já aplicada de uma referência arbitrada e em relação a qualquer instante, ou seja, a cada iteração de todo e qualquer incremento (como já se esclareceu noutra nota de rodapé, tal referência pode ser uma carga bem definida e limitada, um tipo de carregamento cuja balizagem seja o esgotamento da estrutura ou um término de cálculo do utilizador).

$$\Delta W = \begin{cases} \text{Constante} & \text{para } j = 1 \\ 0 & \text{para } j \geq 2 \end{cases} \quad (3.41)$$

Para a 1ª iteração, o factor incremental de carga λ_1^i é determinado com base num acréscimo energético constante ΔW . Substituindo a equação (3.36) para $\{U_1^i\}$ em (3.40), obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda_1^i (\Delta V_1^i) \lambda_1^i \{P\} &= \Delta W, \\ \lambda_1^{i,2} (\Delta V_1^i)^T \{P\} &= \Delta W, \\ \lambda_1^{i,2} &= \Delta W / ((\Delta V_1^i)^T \{P\}), \\ \lambda_1^i &= \pm (\Delta W / ((\Delta V_1^i)^T \{P\}))^{(1/2)} \end{aligned} \quad (3.42)$$

mantendo-se o sinal por determinar.

Para as restantes iterações do incremento o factor λ_j^i é obtido com a condição de o acréscimo de trabalho ΔW ser nulo. Usando (3.18) e atendendo a (3.40), podemos encontrar esse parâmetro:

$$\lambda_j^i = - (\Delta X_j^i)^T \{P\} / ((\Delta V_j^i)^T \{P\}) \quad (3.43)$$

Como se pode observar olhando (3.38) e a equação acima, verifica-se que esta última expressão é bastante mais consistente em termos de unidades, o que será um melhoramento em relação à primeira. Constate-se a ausência do termo λ_1^i no denominador de (3.43), bem como os diferentes vectores ponderadores, (ΔU_1^i) e $\{P\}$, destas expressões que conduzem a que o factor λ_j^i seja um escalar puro.

3.4.2.5. Deslocamento Controlado Generalizado (GSP)

Este método pretende suprir as várias fraquezas dos que se descreveram e assenta nas seguintes características, sucintamente:

- Imposição de um primeiro incremento λ_1^1 que estabelece o sinal inicial de carregamento e que assegura a proporção de todos os seguintes relativamente a este;
- Introdução de uma variável de sistema que mede a sua própria não linearidade, fundamentando-se no vector acréscimo de deslocamentos devido à carga total ou de referência: parâmetro de rigidez generalizado (GSP – generalized stiffness parameter);

- Sensibilidade às inversões do carregamento com base no sinal de GSP;
- Estabilidade do processo, já que tanto o factor incremental como os deslocamentos se mantêm sempre controlados (conferindo-lhe aptidão para lidar com pontos de “snap-back”).

Os incrementos superiores ao primeiro têm na sua primeira iteração um valor com base no GSP e com uma ponderação do factor inicial λ^1_1 , ou seja: $\lambda^1_1 = \lambda^1_1 | \text{GSP} |^{(1/2)}$. As restantes iterações, tanto nestes incrementos como no primeiro, visam o enquadramento dentro da amplitude ponderada da história de deslocamentos e têm por base os vectores de acréscimos de deslocamentos devido à carga total ou de referência e ao resíduo. O deslocamentos anteriores condicionantes são, sobretudo, os do 1º incremento.

Esta preponderância pode entender-se parcialmente, dado que estes deslocamentos se encaixam na zona mais linear e, como tal, estável e comedida, muito embora também possa concorrer para algum atraso exagerado no processo dado em situação de média não linearidade poder conduzir a incrementos muito contidos.

Este método, apresentado por Yang & Shieh em 1990, teria, então, o objectivo de controlar os deslocamentos efectuados de uma forma global para toda a estrutura. Seria, assim, um espécie de método do deslocamento controlado aplicado a todos os graus de liberdade do sistema, sem a necessidade de fixar um valor para cada passo incremental. A variável orientadora da grandeza dos incrementos é o valor empregue na primeira iteração do primeiro incremento λ^1_1 , impondo-se para as restantes primeiras iterações de todos os incrementos:

$$\lambda^i_1 = \lambda^1_1 ((\Delta V^1_1)^T \{ \Delta V^1_1 \} / ((\Delta V^{i-1}_1)^T \{ \Delta V^i_1 \}))^{(1/2)} \quad (3.44)$$

se introduzirmos a nova entidade designada por Parâmetro Generalizado de Rigidez (GSP):

$$\text{GSP} = (\Delta V^1_1)^T \{ \Delta V^1_1 \} / ((\Delta V^{i-1}_1)^T \{ \Delta V^i_1 \}) \quad (3.45)$$

$$\text{e: } \lambda^i_1 = \lambda^1_1 | \text{GSP} |^{(1/2)} \quad (3.46)$$

Para as restantes iterações do incremento utiliza-se o vector (ΔV^{i-1}_j) como elemento ponderador do factor λ^i_j :

$$\lambda^i_j = - (\Delta V^{i-1}_j)^T \{ \Delta X^i_j \} / ((\Delta V^{i-1}_j)^T \{ \Delta V^i_j \}) \quad (3.47)$$

3.5. Critérios de Convergência

A verificação da convergência no processo iterativo é um aspecto fundamental a considerar, pois há que estabelecer uma regra definidora de quando se atingiu um equilíbrio suficiente entre as forças e os deslocamentos instalados na estrutura, ou seja: a partir de que dimensão das forças desequilibradas ainda existentes se torna desnecessário manter o ciclo iterativo de dissipação desse resíduo.

A partir de um certo erro, que será a diferença entre as cargas aplicadas à estrutura e as efectivamente alojadas na mesma, é supérfluo ou mesmo indiferente continuar, em virtude de problemas de precisão numérica computacionais insuperáveis. Na verdade, se o uso de um processo iterativo implica, sempre, a existência de um erro que se procura anular ou minorar, a solução equilibrada estabelece-se logo que satisfeitas as relações constitutivas e cinemáticas, dentro de uma tolerância fixada.

Normalmente, essa tolerância é previamente marcada. No entanto, e tal como acontece com a grandeza dos incrementos no ciclo incremental, poder-se-á estabelecer a mesma em função do andamento de todo o processo. Autores há que defendem uma alta tolerância nos ciclos iterativos dos primeiros incrementos, baixando a mesma com a aproximação do fim do processo [21]. Tem este procedimento fundamento no facto de no início do cálculo a precisão necessária poder ser reduzida dado estarmos ainda longe da solução exacta, pelo contrário, quando nos abeirmos dos resultados finais correctos esse cuidado deve aumentar. A finalidade de eficiência que se quer com este raciocínio obter é louvável, contudo há que manter presente que em algumas situações pode conduzir ao acumular de erros comprometendo a convergência final do processo.

Assim, um processo diz-se que convergiu quando se obtém uma medida do erro menor que a tolerância exigida, enquanto que se a mesma medida de erro continuar sempre maior do que esta, o processo diz-se divergente.

Por fim, afirme-se que é sensato a atribuição de um valor máximo de iterações dentro de cada incremento, como uma forma de impedir uma procura de soluções num processo divergente ou demasiadamente lento. Sobre o número de iterações que deve ser permitido, recomendações existem que prevêem 8 a 10 para o método de Newton-Raphson, o dobro

para o Newton-Raphson modificado e o quádruplo para a utilização da matriz de rigidez elástica [35]. Os diversos exemplos deste trabalho confirmam estes valores para algumas das formulações, mas ficam aquém do razoável para outras que convergem, facilmente, embora com outras exigências na busca do equilíbrio⁶⁶.

3.5.1. Em termos de variação simples de Forças ou Deslocamentos

Será o processo mais simples, apesar de ser mesmo usado em algumas das formulações mais refinadas⁶⁷.

Em geral, consiste na quantificação da norma da diferença elementar entre vectores de deslocamentos, forças ou ambos de iterações seguintes. Embora não possua alguns atributos dos critérios a seguir apresentados, conseguem-se bons resultados desde que o processo não seja falsamente convergente. Quer isto dizer que uma análise, francamente, divergente pode ter duas iterações sucessivas com deslocamentos ou forças muito próximas que nada representam. Em princípio, não se traduzindo tal fenómeno em qualquer problema⁶⁸, pode atrasar a descoberta imediata dessa adversidade.

Assim, em termos de variação simples de deslocamentos:

$$\delta = \left\| \{ U \}_n - \{ U \}_{n-1} \right\|$$

E em termos de variação simples de forças:

$$\delta = \left\| \{ R \}_n - \{ R \}_{n-1} \right\|$$

Como vamos poder observar na exposição dos critérios seguintes, num processo puramente iterativo em que só pode existir um incremento, este método é o único passível de ser utilizado.

⁶⁶ Situam-se neste grupo as formulações que incorporam valores de deslocamentos nas suas matrizes ou actualização de coordenadas no processo, onde o número de iterações em incrementos convergentes pode chegar a algumas dezenas.

⁶⁷ Leia-se algoritmo de solução não linear de Yang & Kuo a págs. 543 e 544 de [46].

⁶⁸ Isto porque:

- nos incrementos seguintes será difícil ocorrer de novo igual coincidência;
- nos incrementos seguintes o número de iterações permitido é ultrapassado;
- nos resultados finais não há equilíbrio de forças nos nós ou nas barras.

3.5.2. Em termos de variação de Forças

A convergência ocorre em termos de forças quando o quociente entre a norma das forças desequilibradas ou residuais e a norma das forças aplicadas à estrutura for inferior a uma tolerância, para uma dada iteração de um dado incremento [4,35]:

$$\delta = \frac{\left\| \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\{ R \}_i \right)^2} \right\|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\{ F \}_i \right)^2}} \times 100$$

Seja tal raciocínio aplicado a um como a todos os graus de liberdade da estrutura.

3.5.3. Em termos de variação de Deslocamentos

A convergência ocorre em termos de deslocamentos quando, no incremento corrente, o quociente entre a norma dos acréscimos de deslocamentos na actual iteração e a norma dos acréscimos dos deslocamentos na 1ª iteração, for inferior uma tolerância [35].

Estamos, pois, na presença de uma razão simples entre normas de dois vectores de deslocamentos:

$$\delta = \frac{\left\| \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\{ U \}_i^j \right)^2} \right\|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\{ U \}_i^1 \right)^2}} \times 100$$

Ou, de forma mais rigorosa, o quociente entre o valor absoluto da diferença das normas dos deslocamentos nodais em duas iterações consecutivas e a norma dos deslocamentos nodais obtidos na 1ª iteração desse incremento, tenham menor valor que essa tolerância [4]:

$$\delta = \frac{\left\| \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\{U\}_i^j \right)^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\{U\}_i^{j-1} \right)^2} \right\|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\{U\}_i^1 \right)^2}} \times 100$$

Seja tal raciocínio aplicado a um como a todos os graus de liberdade da estrutura.

Para ultrapassar a dificuldade de para a 1ª iteração não ser possível usar este critério, têm que se realizar sempre pelo menos duas iterações, ou ainda:

1. Se utiliza, simultaneamente, outro critério;
2. Se utiliza outro critério que substitua este na 1ª iteração.

3.5.4. Em termos de variação de Forças e Deslocamentos

Trata-se, simplesmente, da utilização individual, mas conjunta, dos dois critérios anteriormente descritos, procurando aproveitar o que ambos têm de melhor.

Visa esta técnica alargar o espectro de situações de convergência com sucesso que cada uma das técnicas anteriormente descritas, isoladamente, pode não cobrir eficientemente. De facto, cenários existem em que a informação recebida por um dos critérios é da não convergência, quando de facto isso já se concretizou.

3.5.5. Em termos Energéticos

Outra forma que visa permitir alguma indicação de convergência em termos tanto de deslocamentos como de forças, é incluir essas variáveis, simultaneamente.

Assim, o método energético equaciona o acréscimo de trabalho de deformação que ocorre numa determinada iteração com o trabalho produzido no início do incremento em estudo através da expressão [4,35]:

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\{R\}_i^j \right)^T \left(\{U\}_i^j - \{U\}_i^{j-1} \right)}{\sum_{i=1}^n \left(\{R\}_i^1 \right)^T \left(\{U\}_i^1 - \{U\}_i^0 \right)} \times 100$$

Também aqui terá de se ultrapassar a dificuldade de para a 1ª iteração não ser possível

usar este procedimento, devendo seguir-se o estipulado no último parágrafo de 3.5.3..

Outra forma similar a esta será utilizar a relação entre o trabalho desenvolvido pelas forças residuais numa determinada iteração sobre os acréscimos de deslocamentos correspondentes e o trabalho desenvolvido pelas forças totais instaladas na estrutura e os respectivos deslocamentos [35]:

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\{ R \}_i^j \right)^T \left(\{ U \}_i^j \right)}{\sum_{i=1}^n \{ F \}^T \{ U \}} \times 100$$

3.5.6. Discussão dos critérios

Uma discussão destes critérios encontra-se em [35], efectuando-se aqui alguns comentários sobre a mesma e outros extraídos da experiência deste trabalho.

Quanto à eficiência e escolha entre os critérios em termos de deslocamentos ou forças, esta parece prender-se com a maior ou menor vocação do sistema estrutural em ter facilidade de atingir o equilíbrio mais rapidamente para os deslocamentos do que para as forças ou vice-versa. Nestas circunstâncias pode dar-se o caso de a informação prestada pelo critério seleccionado corresponder ao de já se ter atingido a convergência, quando isto só é parcialmente verdade.

Não sendo relatada a sua probabilidade de ocorrência, julga-se que esta circunstância que poderá parecer excepcional (dado deslocamentos e forças estarem intimamente ligados), não ser tão invulgar quanto o intuitivamente suposto. Isto pode associar-se com o facto de a não linearidade poder conduzir a grandes deslocamentos para pequenos acréscimos de carga, numa situação de amolecimento, e a pequenos deslocamentos corresponderem elevados carregamentos, numa situação de endurecimento⁶⁹. Estas circunstâncias podem, efectivamente, afastar significativamente o comportamento equilibrado entre as relações de cargas e deslocamentos.

⁶⁹ Situações a que podem condizer, respectivamente, elevados esforços de compressão ou de tracção.

Deixa-nos este trabalho a recomendação do uso simultâneo de diversos critérios, nomeadamente nas primeiras iterações, numa tentativa de se beneficiar das vantagens de cada um. Tendo sido considerado o critério energético “total” (segunda variação apresentada e atribuída somente a esta referência bibliográfica) como o mais eficaz.

Não se comentam os valores aí aconselhados para a tolerância, dado estes fugirem bastante e por defeito ao que foi seguido neste trabalho, sistematicamente. Embora se admita que talvez tenha havido algum exagero no rigor agora imposto, valores de cerca de $1E-8$, várias situações houve em que uma tolerância de $1E-4$ se mostrava incapaz de evitar desequilíbrios finais ao nível dos nós e das barras. Esta situação pode também estar relacionada com o facto de, embora ambos os estudos terem sido efectuado para estruturas tridimensionais, o trabalho referido se limite aos aspectos uniaxiais da barra, o que implica, obviamente, muito menos problemas numéricos.

De qualquer forma, e como é muito bem incluído, acrescem ainda os seguintes juízos:

- Se de uma dada tolerância pouco apertada se devem esperar resultados grosseiros e menos fiáveis, a uma tolerância demasiado restritiva não corresponde, necessariamente, uma melhoria significativa nos resultados e pode implicar um custo pesado em termos de tempo de cálculo despendido.
- Uma baixa tolerância pode também conduzir a uma pseudodivergência por se ultrapassar o número de iterações máximo permitido, ou por o erro estabilizar sem que a isso corresponda o seu descontrolo ou um desequilíbrio significativo.

De tudo o que ficou dito, se pode aperceber a relatividade dos critérios e da tolerância prescrita. E se não há qualquer garantia na escolha do algoritmo mais conveniente para cada situação, deve existir alguma sensibilidade na eleição do critério⁷⁰. Por exemplo, não é viável numa análise em que apenas se utiliza a matriz de rigidez linear com actualização de geometria usar o critério das forças, já que o resíduo será sempre, forçosamente, muito baixo e desligado dos deslocamentos.

Como remate desta discussão e face à cada vez crescente melhoria do desempenho dos computadores, este problema virá a perder gradualmente importância, já que a adopção de uma tolerância muita baixa e o uso conjugado de vários métodos será cada vez menos penoso.

⁷⁰ É sempre mais difícil a escolha do critério mais acertado, já que quanto à tolerância resta sempre a hipótese de um valor, arbitrariamente, baixo.

3.6. Actualização de Geometria

3.6.1. Introdução

A actualização de geometria é um tema que, em rigor, pode ir da extrema à nula importância. Embora possa parecer ambígua tal frase, ela é bastante sensata, conforme se pretende vir a demonstrar. Na verdade, se casos existem em que a actualização de geometria nada mais traz que ganhos desprezíveis em precisão, outros há que sem este procedimento o processo é mesmo divergente⁷¹, inexoravelmente.

A questão passa um pouco por avaliar até que ponto tal escolha é de pormenor ou de importância. Se bem que possamos afirmar que tomar essa decisão deverá conduzir sempre o cálculo para o lado da segurança, ela acarreta custos elevados em termos computacionais. Propriamente, não no acto da actualização de geometria em si ou no refazer das matrizes de transformação, mas, isso sim, nas turbulências que advêm na procura da convergência.

Por outro lado, a sua aplicação a um programa de cálculo não é, de forma alguma, tarefa simples. Isto, muito particularmente, se quisermos efectuá-la procurando simular com grande perfeição o que se passa numa estrutura sujeita a grandes deslocamentos.

3.6.2. Discussão

Qual será, pois, o erro ou a grosseria de num processo incremental e iterativo as matrizes de transformação que se utilizam para obter os esforços finais, totais e convergidos da estrutura, por transposição dos deslocamentos de eixos gerais para eixos locais, serem as mesmas que foram utilizadas inicialmente para a estrutura indeformada?

Isto porque na prática, e muito embora estejamos perante uma análise não linear geométrica, é preciso não esquecer que os deslocamentos finais serão sempre muito pequenos em relação às dimensões das peças, independentemente de toda a teoria subjacente à sua formulação ser a da hipótese de grandes deslocamentos. Uma estrutura que fuja a tal característica não será, com certeza, construída com o objectivo de ocupação humana e, muito dificilmente, terá qualquer outra aplicação no âmbito da construção civil.

Além disso, uma postura de actualização de geometria implica muitas mais considerações, nomeadamente, que os incrementos das cargas nas barras estejam sujeitos às mesmas modificações. Esta nova realidade obriga, por exemplo, a que não se possa mais adoptar uma perspectiva em que todas as cargas se concentram no início do cálculo nos nós, sendo aplicadas de forma directa a cada incremento. Adicionalmente, o ângulo com que estas cargas eram aplicadas, previamente, em eixos locais não corresponderia mais ao inicial, dado que a barra já teria uma outra posição no espaço em virtude da actualização das coordenadas dos seus nós, o que também levantaria problemas ao nível das forças de fixação de barra no caso de existirem cargas distribuídas.

Ora, se a barra pode assumir outra posição no espaço, as solicitações que lhe estão associadas podem não acompanhar a nova direcção em virtude desse movimento, o que obrigaria a uma correcção automática do ângulo da carga e, eventualmente, do seu próprio valor se a variação da dimensão da barra fosse significativa, pois, de outro modo e na presença de uma carga distribuída, podíamos ter uma alteração do seu valor absoluto.

Por outro lado, e para ser rigoroso, ao longo da aplicação destas próprias acções a deformação interna e pontual da própria barra ao longo das secções do seu eixo, também deveria ser considerada para efeitos de reorientação e redistribuição destas mesmas cargas, distribuídas ou concentradas.

Tais procedimentos são, contudo, muito difíceis de concretizar em termos de cálculo automático e, sobretudo, provavelmente, na esmagadora maioria dos casos desproporcionados em termos dos seus custos face às reais vantagens que podem acrescentar.

E se, em termos pragmáticos, todos estes argumentos ainda se mostrassem insuficientes ficaria a nossa consciência, com certeza, muito mais tranquila, se meditássemos na forma muito menos exigente e exacta com que se consegue chegar ao valor das próprias solicitações a aplicar.

Pelas razões apontadas não parece ser, numa primeira reflexão, de grande importância esta questão. No entanto, e dada a relativa facilidade com que se conseguem implementar os princípios básicos⁷², da actualização de geometria em termos de cálculo automático, procedeu-se à comparação entre o efectuar ou não.

⁷¹ Exemplos destas situações encontram-se no capítulo 5.

⁷² E apenas estes, os elementares, dado que uma actualização completa da geometria envolve muitos parâmetros.

Assim, a actualização de geometria circunscreveu-se ao que se considerou mais essencial e verdadeiramente importante:

- Coordenadas;
- Matrizes de transformação;
- Cargas.

No fundo, estes três parâmetros são os fundamentais, se bem que ao nível dos eixos locais de barra se possam adoptar vários tipos de métodos, uns mais completos do que outros.

Os exemplos basearam-se em estruturas reticuladas regulares, sucessivamente, mais volumosas com desenvolvimento equilibrado ou mais pronunciado em altura ou extensão.

Os resultados encontrados apontaram para que a actualização de geometria só se mostra necessária na generalidade dos casos correntes e, mesmo em estruturas globalmente esbeltas e de vários pisos, quando existem forças horizontais consideráveis ou a estrutura é bastante flexível. Situações que se enquadrem neste figurino, será mais comum ocorrerem em estruturas metálicas especiais e/ou em condições particularmente desvantajosas.

Como exemplo do primeiro caso, cite-se uma estrutura de suporte de um reservatório sujeita a uma acção sísmica violenta e no segundo, um painel esbelto sob a acção dinâmica de um vento agressivo.

Há que compreender e aceitar que numa análise deste tipo, e em que se parte de uma geometria perfeita da estrutura, a deformação acompanha as cargas de uma forma proporcional. Mesmo aqui a ambição de obtermos uma deformada com um comportamento que indicie uma aproximação consentânea com uma perda de equilíbrio global da estrutura, nem com a perturbação introduzida por uma força horizontal significativa se consegue. Essa sensibilidade aos movimentos “dissidentes” em geometria perfeita, só se obtêm nas situações da vizinhança da carga crítica com uma interpretação alicerçada num estudo de valores e vectores próprios (como veremos mais adiante).

Muito embora o que foi expresso, e para além dos casos práticos em que o seu uso se possa justificar, este tema é sempre motivo de interessante e válido estudo, pelo que se tecem algumas conjecturas sobre a sua realização.

Como já foi dito, no caso de se adoptar um cálculo que inclua actualização de geometria, a manutenção da coerência dos eixos locais dos elementos de barra ao longo desse processo é, absolutamente, fundamental para a correcção e precisão dos resultados em termos

de deslocamentos e esforços.

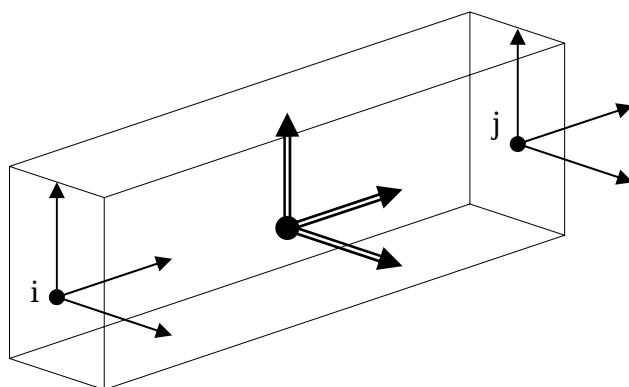
Relembrando a matriz geral de transformação de coordenadas, note-se o facto de não existir nenhum relacionamento entre as submatrizes que representam cada um dos extremos de barra (submatrizes R_{ij} e R_{ji} nulas), o que indica que em termos de mudança de coordenadas os seus extremos são absolutamente independentes. De facto, e ainda que no caso de se efectuar uma actualização de geometria tão completa que trabalhasse com o elemento na sua forma deformada mesmo ao nível do eixo do seu centro de gravidade [46], a matriz de rotação permanecia idêntica e nula para estas submatrizes.

Uma actualização de geometria tão rigorosa que não incluísse apenas a actualização das coordenadas dos nós da estrutura, e, por conseguinte, das matrizes de rotação ao nível do elemento e o comprimento deste, mas que também reflectisse a própria deformação do seu eixo de gravidade em função da rotação dos seus extremos⁷³, merece uma cuidada discussão não só em termos teóricos como de eventual mais-valia que possa trazer para o cálculo. A dedução da matriz de rotação atrás apresentada e formulada por Yang & Kuo aborda este assunto [46, pág.497], mas não se torna transparente a sua utilização no processo de cálculo, limitando-se a uma actualização da posição do eixo central do elemento com base na média rectificadora (garantia de ortogonalidade entre eixos locais) dos eixos locais actualizados dos extremos.

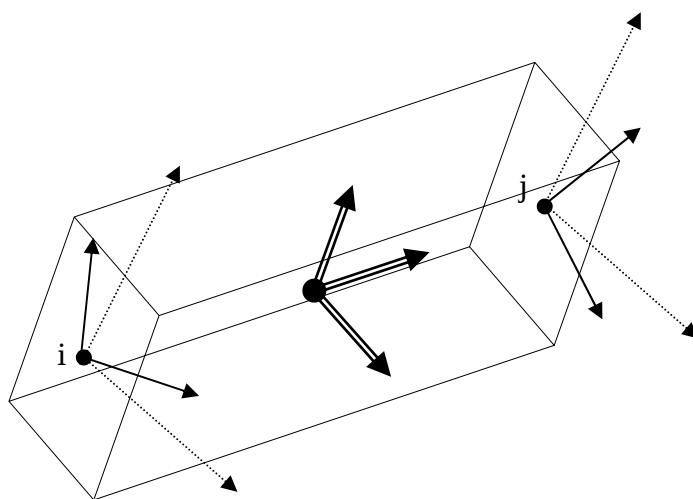
De qualquer modo, e como emerge do texto destes autores, tal contabilização pressupõe a adopção de vários tipos de eixos (como os eixos relativos aos nós em coordenadas gerais, os eixos relativos aos nós em coordenadas locais e os eixos locais relativos ao centro do elemento), o que torna a compreensão do que se passa pouco atraente e que acaba por redundar numa matriz de transformação única e muito simplificada face ao que se propunha alcançar⁷⁴.

⁷³ Ou seja, além dos deslocamentos lineares dos nós (δx , δy e δz), também se contabilizariam os deslocamentos devidos à sua rotação (θx , θy e θz) alterando-se a configuração da barra em cada actualização, perdendo esta o seu carácter rectilíneo inicial.

⁷⁴ Aliás, o mesmo se conseguiria obter, no fundo, somando à eleita formulação de Argyris (modificada) a média das rotações dos nós extremos recorrendo à matriz de transformação de eixos locais para eixos principais da secção. Mais, podia-se ainda optar pela criação de dois nós fictícios independentes, um para cada sistema de eixos individual das secções de extremo e trabalhar desta forma (claro que aqui as coisas ficariam muito



(1) Geometria não deformada: estado inicial.



(2) Geometria deformada: estado intermédio ou final.

Figura 3.9: Sistema de eixos local com actualização de geometria indexada ao seu centro.

No caso presente, a actualização de geometria limita-se à actualização de coordenadas (que, de facto, fica inteiramente caracterizada pela soma sucessiva dos valores dos deslocamentos δx , δy e δz no final de cada iteração ou incremento⁷⁵ às coordenadas existentes).

De qualquer modo, entre as vantagens eventuais de uma actualização de geometria mais completa, ressalta o posicionamento das cargas ao longo do processo incremental e iterativo de cálculo. Ora, se bem que mesmo numa formulação que admita que as barras se mantêm

complicadas se quiséssemos utilizar cargas aplicadas directamente nas barras).

⁷⁵ Quando se toma a opção de actualizar as coordenadas, a decisão de o efectuar no final de cada iteração ou só

rectilíneas se pode efectuar a correcção da disposição das cargas, na realidade (e independentemente das deformações dos elementos), as cargas mais significativas não costumam estar fixas às barras, tomando sempre uma direcção vertical e com o sentido da gravidade (tal assunção de constância de direcção ao longo do processo de deformação da estrutura em relação às cargas é extensível às ditas forças horizontais, como o vento e os sismos). Assim sendo, mesmo no caso das forças de fixação para cargas distribuídas ou concentradas ao longo das barras, a manutenção da admissão destas como elementos constantemente rectilíneos é muito correcta. Aliás, tal só deixaria de ser verdade, eventualmente, no caso de grandes rotações segundo o eixo de gravidade das barras, o que significa o eixo local x rodar fortemente em torno de si próprio, conduzindo os eixos locais y e z a grandes deslocamentos angulares⁷⁶ (e, neste caso, quer isto se tratasse de cargas directas nos nós, nas barras ou em ambos).

Parece, pois, que não se comete um grande erro ao afirmarmos que em situações normais, e mesmo em muitas especiais, não será provável poderem registar-se grandes rotações das secções em torno do seu eixo de gravidade (ou de inércia) nos seus extremos (tendo esta observação o cuidado de excluir movimentos deste tipo em secções abertas - do tipo 4 no Eurocódigo 3 - fora dos apoios).

Acredita-se que apenas em sistemas com módulo de elasticidade muito baixo, como é o caso da borracha, estas asserções perdem validade, ou seja: no domínio dos “muito” grandes deslocamentos.

De qualquer modo, há sempre a possibilidade de perante a formulação escolhida neste trabalho (Argyris e Petyt [43]) proceder de modo a ultrapassar, completamente, algumas reticências que possam existir sobre as simplificações apontadas:

1) Dividir o elemento de barra em vários outros mais pequenos, tentando com este refinamento obter um comportamento mais fiel do mesmo;

2) Criar, à semelhança do preconizado por Yang & Kuo [46], dois sistemas de eixos locais independentes baseados nos nós de extremidade (recorrendo para isso a dois nós

no final do incremento convergido é discutida mais adiante.

⁷⁶ Neste caso, o funcionamento e relação entre o sistema geral da estrutura e local dos elementos ficaria significativamente afectado se não se procedesse à correspondente actualização da posição dos eixos normais ao elemento.

fictícios⁷⁷), e estabelecer um sistema de eixos local fixado na secção central, único e estimado em função dos dois anteriores;

3) O mesmo que o preceituado no ítem anterior, mas trabalhando, directamente, com os dois eixos locais dos nós de extremidade, o que proporciona uma deformação independente entre estes e, decerto, mais verdadeira.

Sobre estes três procedimentos poder-se-á arriscar as seguintes considerações:

- Embora o primeiro não seja completamente eficaz ao verificar-se, na realidade, grandes deslocamentos angulares dos eixos locais, possibilitam, com certeza, uma muito maior aproximação à real deformada vertical e mesmo lateral do elemento (e isto em relação a qualquer direcção⁷⁸ do espaço que se queira tomar por referência);
- Os dois últimos garantem uma maior aproximação à deformada da barra em termos de rotações em torno dos eixos das secções, sobretudo o terceiro caso que se pode considerar praticamente exacto em todo o processo (incremental e iterativo);
- O primeiro em conjunto com o segundo e, principalmente, com o terceiro configuram uma excelente aproximação, esgotando-se talvez aqui tudo o que se possa fazer em defesa do máximo rigor.

Por último, e fechando este assunto no que a este trabalho diz respeito, autores há que defendem a não necessidade de se efectuar sequer qualquer actualização de geometria [25] dado que, embora se trate de uma análise não linear, permaneceremos no domínio dos pequenos deslocamentos, ou seja: à perda de rigidez global e local da estrutura face à importância dos esforços axiais, não correspondem, directa e necessariamente, deslocamentos apreciáveis cuja influência ainda deva ser somada a esses efeitos.

Parece razoável que assim seja em estruturas correntes normalmente solicitadas, contudo, será de admitir que tal pode perder validade em situações de estruturas muito flexíveis ou sujeitas a severas acções horizontais.

Não seria correcto terminar este assunto, sem salientar o facto deste domínio ser ainda

⁷⁷ O que não será mais que estender o atrás preconizado por Argyris e Petyt a mais um nó imaginário.

⁷⁸ Embora estes movimentos laterais da barra (que são, neste caso, completamente livres e universais na sua direcção) não satisfaçam qualquer verificação a instabilidades, normalmente, associadas a fenómenos desta natureza (como o bambeamento, que está mais ligado a fenómenos de tracção e compressão nas fibras extremas das secções carregadas), a verdade é que estes deslocamentos estão relacionados directamente com as propriedades geométricas das secções (como as suas inércias), sendo, portanto, função intrínseca do seu valor e indicadores de um comportamento real dos elementos na estrutura deformada.

alvo de profunda investigação e discussão.

3.7. Técnicas complementares

Como entidades complementares aos métodos descritos, aparecem, compulsiva ou acessoriamente, algumas variáveis que se vão apontar. A sua utilização é, pois, em alguns casos facultativa, mas noutros tem de ser considerada e expressamente definida.

3.7.1. Factor Inicial de Carga

Muitos dos processos de incrementação automática, independentemente de serem afectos à família do controlo de cargas ou de deslocamentos, necessitam da definição prévia de um factor quantitativo de arranque do processo. Isto passa-se porque sendo boa parte destes métodos alimentada por valores associados a incrementos e iterações anteriores, no início do processo não existe qualquer valor que possa indicar qual a amplitude desse incremento de começo.

Por outro lado, este valor que aqui se designa por factor inicial de carga, acaba por assumir relevante importância em todo o processo, já que ao fixar a magnitude do 1º incremento vai estabelecer muitas quantidades a ele adstritas que vão ser usadas até ao fim de todo o processo. De tal modo isto poderá pesar na análise e no tempo a ela dispensado, que diversos autores preconizam uma primeira tentativa com um só incremento, estimando o valor deste factor de acordo com a resposta da estrutura. Outra postura consiste, ainda, em que este primeiro valor de carga seja coincidente com o factor de carga elástico.

Os valores que este factor possa assumir são função do número de vezes que queiramos actualizar a geometria ou o requinte da curva carga-deslocamento que se pretenda obter. Naturalmente, quanto mais pequeno for este valor, mais tendência terá o processo para ver aumentado o seu número de incrementos e com isso a sua própria fidelidade.

Como veremos no capítulo 5, que se refere aos exemplos a apresentar, este factor também varia conforme o método, tanto podendo ser uma percentagem da carga total como uma parte da energia de um cálculo linear equivalente.

3.7.2. Avaliação da Rigidez Corrente e Permuta de Algoritmo

Quando um processo entra numa fase de nítida alteração de linearidade, como a aproximação de um ponto de inversão de carregamento, provavelmente, só um algoritmo com base no controlo de deslocamentos poderá lidar com esta situação eficazmente.

Assim, se tivermos uma medida do estado de não linearidade da estrutura, que é como quem diz da variação da sua rigidez, podemos tomar disposições preventivas que obstem a uma futura perda de convergência no processo.

Com um dispositivo deste tipo podemos começar um estudo de uma estrutura em controlo de cargas, que é, normalmente, um processo mais rápido, e, em caso de necessidade, efectuar uma passagem automática para controlo de deslocamentos. O critério que conduziria a essa mudança de algoritmo seria, então, o estado de não linearidade ou perda de rigidez do sistema.

A quantificação necessária pode ser feita através de um qualquer identificador da condição da rigidez actual da estrutura face ao seu passado, apelidado de parâmetro de rigidez corrente (CSP), cuja formulação tem variantes em função dos autores.

Partindo da relação fundamental, já conhecida, que estabelece a rigidez do sistema, $k = \Delta p / \Delta d$, introduz-se aqui outra variante deste parâmetro [35] em alternativa ao exposto em 3.2.1.3..

Seja então:

$$k = \Delta p^T \Delta d / (\Delta d^T \Delta p) = f^T \delta p / (\delta p^T \delta p)$$

Através da relação entre o parâmetro de rigidez do incremento actual k_n e o parâmetro equivalente respeitante ao final do primeiro incremento k_0 , obtém-se o parâmetro de rigidez corrente: $CSP = k_n / k_0$.

Esta fórmula é, claramente, uma medida da rigidez directa do sistema em qualquer instante de carregamento e deformação⁷⁹.

Este parâmetro, CSP, toma o valor unitário em fase linear, variando conforme a grandeza relativa da rigidez da estrutura ao longo do carregamento. Esta nova definição pode, também, servir de alternativa à atrás usada no estabelecimento da incrementação automática.

A mudança de algoritmo tem lugar quando se atinge a rigidez de permuta, ou seja:

⁷⁹ Outra forma possível de se poder equacionar, seria a variação do valor do determinante da matriz tangente ou,

quando o valor do CSP atinge ou ultrapassa um valor fixado como máximo tolerável para as características de desempenho do algoritmo em uso.

3.7.3. Possibilidade de Recomeço e Corte de Incremento

Muito embora as várias e elaboradas técnicas que hoje já estão disponíveis, bem como uma escolha aparentemente acertada de qual deverá ser utilizada, casos há em que a solução não consegue ser atingida, pelo menos numa primeira tentativa.

Quando tal acontece várias opções se podem tomar, entre as quais:

- Reiniciar o caso desde o começo com outro algoritmo;
- Corrigir o valor do(s) último(s) incremento(s) e efectuar ainda um eventual alargamento do número máximo permitido de iterações.

A primeira solução é imediata, mas um tanto radical, já que se podem perder vários incrementos devidamente convergidos. No sentido de se ultrapassar este possível desperdício, poder-se-á recorrer à segunda opção, repetindo um ou mais passos anteriores.

A questão principal é saber desde quando e com que valor de incremento se deverá recomeçar o cálculo, sendo a segunda a de se manter o algoritmo actual ou não. Sobre a primeira podem colocar-se, entre outras, as seguintes alternativas :

- Recomeçar no incremento cujo número de iterações começou a fugir à média, cortando o seu valor para um nível a fixar;
- Recomeçar no incremento cuja relação carga-deslocamento variou acentuadamente, cortando o seu valor para um nível a fixar;
- Recomeçar no próprio incremento presente que divergiu ou não encontrou a convergência no número de iterações permitido, diminuindo ao seu valor e, por exemplo, alargar o número de ciclos.

Nada obsta a que uma ou mais destas variantes possam ser adoptadas em sobreposição.

A segunda opção, que tem sempre que incluir, conjuntamente, algumas das medidas que se propuseram na primeira, altera o algoritmo primitivo por outro de hierarquia superior. É o caso, por exemplo, da passagem de controlo de cargas para controlo de deslocamentos, em que esse deslocamento a fixar por incremento pode mesmo ser escolhido com base na história

mesmo e somente, da própria matriz geométrica.

de deslocamentos já conseguida.

Um processo simples que se pode utilizar, quando a convergência não se atinge num determinado número de iterações, é aplicar uma redução do acréscimo do factor de carga para o incremento corrente e fazer um recomeço da análise da estrutura no final do incremento anterior.

Esta redução deverá ter em atenção [35]:

$$\lambda_i = \lambda_{i-1} \beta_d / \beta$$

e

$$0,1 \leq \lambda_i / \lambda_{i-1} \leq 0,5$$

Sendo:

λ_{i-1} - Factor de carga aplicado na 1ª iteração do anterior incremento.

λ_i - Factor de carga aplicado na 1ª iteração do presente incremento.

β_d - Tolerância fixada.

β - Razão obtida na análise de convergência feita para a última iteração do incremento anterior.

Neste trabalho decidiu-se, por simplicidade, efectuar nos casos em que houve divergência num incremento, este ser repetido diminuindo para metade a variável que comandava o valor desse incremento. Isto aplicou-se de modo indiferente e independente do processo em uso, do número de iterações desejado, do factor inicial de carga ou do deslocamento permitido.

Dessa experiência ficou a sensação que a melhor opção será, invariavelmente, encaminhar o recomeço pela segunda via: mudança de algoritmo. Os processos divergentes poucas vezes resultaram mais bem comportados pela simples redução do valor dos incrementos. O único caso em que se obteve algum êxito numa simples correcção de incremento, era quando esta fosse acompanhada por um alargamento do número de iterações permitido. Só que aqui as culpas não caem sobre o valor dos incrementos propriamente ditos ou no algoritmo em si, mas na falta de generosidade no número de ciclos julgado suficiente para se estabelecer o equilíbrio.

3.8. Sumário

Atendendo ao facto de já terem sido lançadas apreciáveis discussões ou comentários sobre os critérios de convergência, actualização de geometria e as técnicas complementares, ficará este sumário, exclusivamente, votado para a apreciação complementar das técnicas incrementais, iterativas e mistas.

Considerando ainda a proporção da exposição anterior e volume e pertinência relativa dos temas, bem como pela razão das técnicas mistas encerrarem em si mesmas as restantes, vão ser estas particularmente visadas. O alegado desempenho dessas formulações baseia-se em [46] e na experiência deste trabalho.

Métodos de Controlo de Cargas

Estes métodos têm a grande vantagem de manter sempre o factor de carga λ controlado, porém, não conseguem, em qualquer caso, ultrapassar os pontos-limite. De facto, tal nunca poderia acontecer pela incapacidade de estes, por si só, se aperceberem das mudanças de sinal de carregamento que a passagem desses pontos acarreta.

Prende-se tal inabilidade com o facto de as iterações serem executadas a carga constante, sendo a direcção dessas iterações controlada pela posição prévia da carga a aplicar (veja-se figura 3.10).

Sempre que a carga excede o valor-limite correspondente ao ponto máximo, a linha horizontal que guia a sequência para qualquer passo iterativo nunca conseguirá acompanhar a curva carga-deslocamento. O processo será divergente, jamais se conseguindo estabelecer o equilíbrio.

Deslocamento Controlado

Em virtude da faculdade do sinal e valor dos acréscimos de carga poderem variar ao longo do encadeamento iterativo, esta técnica consegue, facilmente, abordar e ultrapassar com sucesso os pontos-limite ou pontos de máximo e mínimo da curva carga-deslocamento. Contudo, e como os incrementos são efectuados a deslocamento constante, dificilmente responderá com eficácia no caso de um cenário de “snap-back”, dado que na vizinhança

destes pontos não existe variação do deslocamento, mas sim do carregamento.

Por outro lado, o facto de com este método apenas se controlar uma componente de deslocamentos ocasiona as seguintes desvantagens:

- A componente que estamos a controlar não é representativa dos deslocamentos do sistema, ocorrendo estados de desconformidade em pontos mais notáveis da estrutura;
- Não é conhecida, à partida, uma estimativa do deslocamento total a ter lugar nessa componente, conduzindo a situação de excesso ou deficiência de passos no processo.

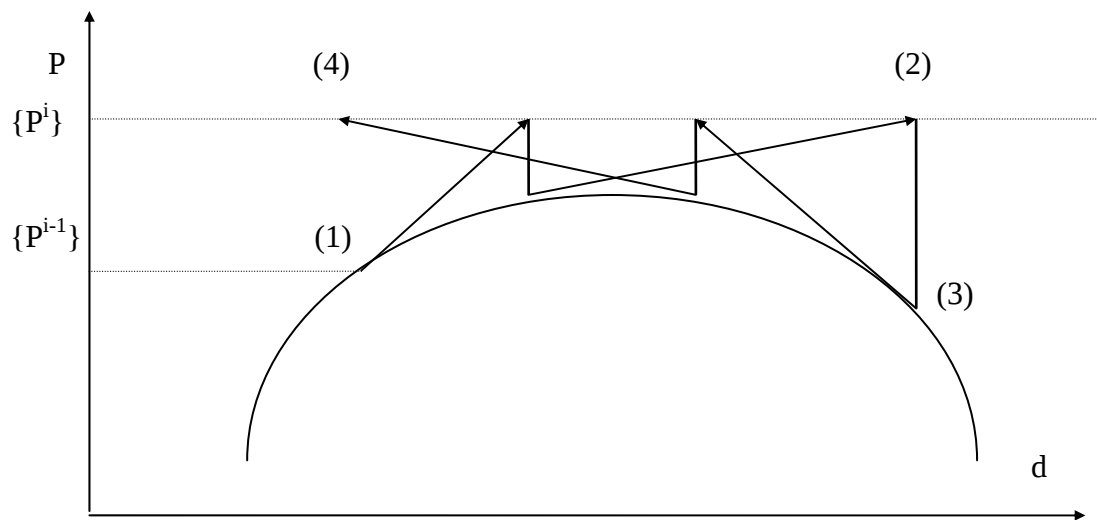


Figura 3.10: Divergência do método de Newton-Raphson em controlo de carga.

Comprimento do Arco

Ao contrário do método de controlo de deslocamentos anterior, aqui já existe uma ponderação global dos deslocamentos da estrutura. Todavia, em virtude da relativa incoerência das unidades da expressão (3.4.27):

$$\lambda_j^i = - (\Delta U_1^i)^T \{ \Delta X_j^i \} / ((\Delta U_1^i)^T \{ \Delta V_1^i \} + \lambda_1^i)$$

existe a possibilidade do parâmetro λ_1^i ser de tal modo elevado que o sinal de λ_j^i dependa, grandemente, da relação entre $\{ \Delta U_1^i \}$ e $\{ \Delta X_j^i \}$, ou seja, da ligação entre a direcção do acréscimo de deslocamentos na 1ª iteração e durante o decorrer do ciclo iterativo. Tal poderá, mais facilmente, ocorrer na vizinhança de pontos sujeitos a “snap-back”, o que pode conduzir

a direcções incorrectas em termos de ciclo iterativo e consequentes divergências numéricas.

Energia Controlada (ou Trabalho Controlado)

Os inconvenientes que enfermam o método anterior são os mesmos que aqui residem, embora por razões distintas.

Sendo o factor incremental λ_j^i dimensionado em função de $\{P\}$ (3.4.31),

$$\lambda_j^i = - (\Delta X_j^i)^T \{P\} / ((\Delta V_j^i)^T \{P\})$$

pode para um sistema fracamente carregado este vector possuir poucos valores não nulos. Ora, na proximidade dos mencionados pontos do tipo “snap-back” os vectores (ΔX_j^i) e (ΔV_j^i) têm valores muito baixos (ou mesmo nulos se caírem, exactamente, nesse ponto), o que facilitará a imprecisão ou descontrolo de λ_j^i .

Deslocamento Controlado Generalizado

Segundo os seus autores, Yang & Shieh, este método ultrapassa a primordial excepção que debilita os dois precedentes e que se prende, exclusivamente, com a gerência de pontos do tipo “snap-back”.

No sentido de se concretizarem essa e outras propriedades desta formulação, é nesse texto apresentada uma comparação entre a sua base ao nível do parâmetro GSP com o de outras alicerçadas no CSP. Entre as deficiências aí apontadas ao CSP, refira-se a deste parâmetro mudar de sinal tanto no caso de pontos-limite como no de “snap-back”, não se tornando possível distinguir entre estes dois tipos de pontos (só há necessidade de inversão do carregamento na passagem dos pontos-limite). Por outro lado, ao variar o seu valor de forma abrupta quando uma componente de deslocamento sofre “snap-back”, podem existir com esta análise sérios problemas numéricos nas imediações destes pontos.

Consubstanciando a confrontação:

1. No GSP, utilizando-se a razão da norma do acréscimo de deslocamento do primeiro passo e do corrente, nenhum salto numérico pode ocorrer mesmo na cercania de regiões de “snap-back”; o GSP só se torna negativo para o incremento

imediatamente após a passagem de um ponto-limite, enquanto se mantém positivo para todos os passos seguintes;

2. O GSP, tal como o CSP, começa por um valor unitário e desvanece-se nos pontos-limite. Aumenta para estruturas em fase de endurecimento e diminui para estruturas em fase de amaciamento. Contudo, é superior ao CSP, porquanto permanece controlado durante toda a história de carregamento, independentemente da presença de situações de “snap-back”.

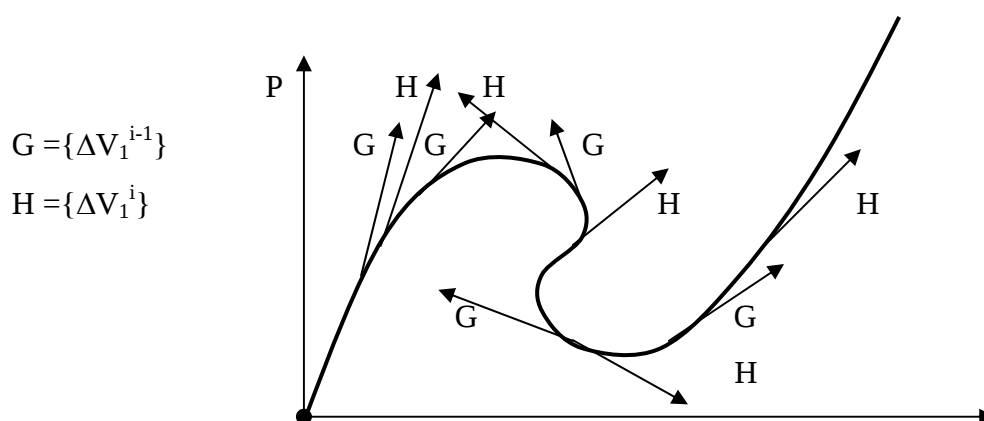


Figura 3.11: Características do GSP.

Quadro sumário comparativo

Apresenta-se agora uma comparação entre as diversas formulações, que tem por alicerce a experiência deste trabalho e a compilação das impressões gerais recolhidas na bibliografia consultada.

Mais uma vez se faz uma chamada de atenção no sentido de se dar a compreender que os exemplos realizados não foram os suficientes para se poder, com um rigor aceitável, afirmar com autoridade a completa validade desta apreciação. De qualquer modo, este espelham as conclusões de um conjunto apreciável de ensaios numéricos.

Este quadro sumário tem a seguinte legenda complementar:

(CC) – Controlo de Cargas.

(CD) – Controlo de deslocamentos.

(CE) – Controlo de Energia.

(1) Desde que esta formulação seja aplicada a casos com que seja consistente.

(2) Desde que esta formulação seja aplicada com conhecimento de uma estimativa do valor do deslocamento final.

(3) Salvaguardando a possibilidade de inversões de sinal despropositadas.

QUADRO 3.1

	Estabilidade Numérica	Rapidez de Convergência	Sensibilidade à variação de Rigidez	Sensibilidade à variação do sinal de carregamento	Desempenho perante pontos-limite, do tipo “snap-through”	Desempenho perante pontos do tipo “snap-back”
Número Incrementos Pré-fixado (CC)	Muito Elevada (1)	Muito Elevada	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
Incrementação pelas Iterações Anteriores (CC)	Intermédia (1)	Intermédia	Baixa	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
Incrementação com base no CSP (CE)	Elevada	Baixa	Elevada	Existe (3)	Muito Elevada	Intermédia
Deslocamento Controlado (CD)	Muito Elevada (1)	Muito Elevada (2)	Intermédia	Existe	Muito Elevada	Fraca
Comprimento do Arco (CD)	Elevada	Intermédia	Elevada	Existe	Muito Elevada	Intermédia
Energia Controlada (CE)	Muito Elevada	Muito Elevada	Muito Elevada	Existe	Muito Elevada	Elevada
Deslocamento Controlado Generalizado (CD)	Elevada	Intermédia	Elevada	Existe	Muito Elevada	Muito Elevada

Como se pôde apreciar, é este capítulo um dos mais ricos em diversidade e em discussão. Resta, muito embora, uma questão importante por aclarar: qual será afinal o melhor método?

Bom, numa perspectiva defensiva podíamos afirmar que a escolha cairia sobre o controlo generalizado de deslocamentos. Porém, o grande número de incrementos que este método em situações de baixa não linearidade impõe, bem como algumas dificuldades não, imediatamente, perceptíveis de convergência, quando o factor de carga inicial é mal arbitrado, leva a colocar fortes reservas na sua eleição. Pessoalmente, e atendendo ao pequeno artifício introduzido neste trabalho e que será exposto no capítulo 5 (que consiste em definir a variável de acréscimo de trabalho, ΔW , como a correspondente a um primeiro incremento em fase mais linear), a escolha recai na energia controlada.

De qualquer forma, as restantes formulações podem ter óptimas prestações, dependendo do tipo de estrutura e do carregamento aplicado. Para situações correntes não é de prever que se precise, sequer, de recorrer a métodos de controlo de deslocamentos mais elaborados.

Diria mais, para estruturas vulgares sujeitas às solicitações regulamentares habituais, a aplicação de uma formulação de controlo de cargas com base no número de iterações do incremento anterior, aliada a uma eventual actualização de coordenadas e possibilidade de mudança de algoritmo, parece-me satisfatória. Baseando-se tal preferência no facto deste conjunto de opções simultâneas garantir uma boa rapidez de cálculo, acompanhar a variação de não linearidade do sistema e salvaguardar a exigência de passagem para formulações mais rigorosas. Ficariam, assim, pelo menos aparentemente, verificadas as premissas fundamentais a que deve obedecer a análise não linear geométrica de estruturas:

1. Estabilidade e boa capacidade de convergência;
2. Valor dos incrementos de acordo com a variação de rigidez do sistema;
3. Capacidade de a todo o instante se determinar o sinal do carregamento.

4. PREVISÃO DE CARGAS CRÍTICAS

4.1. Introdução

A carga crítica de uma estrutura corresponde ao último valor, de uma qualquer forma de carregamento, para o qual ainda é possível o equilíbrio, ou seja: qualquer que fosse o acréscimo infinitesimal de carga somado a esse presente estado de tensão a estrutura perderia, globalmente, o seu equilíbrio, entrando em colapso. Daqui se depreende que essa carga corresponde a um equilíbrio indiferente, situação da qual a estrutura já não regressará mesmo que seja retirada a totalidade da carga aplicada, ou seja, à remoção da perturbação não corresponde o regresso ao estado inicial [21]. A este fenómeno corresponde, intrinsecamente, uma deformada dessa estrutura associada ao nível de energia que conduziu a esse estado, designando-se esta por modo de encurvadura.

Em termos matemáticos, o estudo destes fenómenos está ligado à busca dos valores e vectores próprios da estrutura que se relacionam, directamente, com a matriz geométrica⁸⁰. A sua determinação e a da configuração de instabilidade correspondente podem, pois, ser obtidas a partir de um modelo que inclua os efeitos de 2ª ordem, bastando adaptar as equações e equilíbrio que lhe servem de base, com vista a conseguir-se traduzir a situação de equilíbrio indiferente pretendida [21].

Muito embora se possam obter tantos valores e vectores próprios quantos os números de graus de liberdade do sistema estrutural, em termos práticos só os mais baixos (ou mesmo somente o mais baixo) tem interesse determinar, já que são os que correspondem à menor energia necessária para conduzir a estrutura à perda generalizada de equilíbrio.

Admitindo um qualquer carregamento que se pretende estudar, vai procurar-se um factor de carga λ_c que, multiplicado por essa solicitação inicial, traduzirá a carga crítica da estrutura e que corresponde ao valor próprio mais baixo [21].

Ou seja: vamos aferir um parâmetro de carga λ_c , pelo qual se devem multiplicar as

⁸⁰ À semelhança do que acontece com a matriz de massa numa análise dinâmica de estrutura, na procura das frequências próprias e dos modos de vibração associados.

acções aplicadas no sistema em análise, de forma a não ser possível encontrar uma solução única de equilíbrio⁸¹. Como a matriz geométrica é proporcional às forças internas existentes na estrutura [5]:

$$[[K_L] + \lambda_c [K_G]] \{u\} = \lambda_c \{f\} \quad (4.1)$$

Assim, e uma vez que essa matriz depende linearmente dos valores dos esforços instalados em cada uma das barra da estrutura, uma situação de equilíbrio indiferente será expressa segundo o método dos deslocamentos por [21,43]:

$$[[K_L] + \lambda_c [K_G]] \{u\} = 0 \quad (4.2)$$

Soluções não nulas desta equação poderão ser obtidas se [5,21,43]:

$$\det ([[K_L] + \lambda_c [K_G]]) = 0 \quad (4.3)$$

Como se disse, por esta via encontra-se um problema clássico de determinação de valores e vectores próprios associados a $[K_L]$ e $[K_G]$. Sendo de salientar que a resolução desta equação terá de ser feita, em geral, por métodos iterativos, pois consiste na obtenção das raízes de um polinómio de grau igual ao das dimensões das matrizes $[K_L]$ e $[K_G]$. Como só se conhecem métodos para o cálculo das raízes de um polinómio se o grau for igual ou inferior a quatro, a solução do problema terá que ser obtida recorrendo a processos iterativos [5].

Convém aqui recordar as condições e hipóteses a que está sujeita a nossa análise, aplicando-se as mesmas a qualquer das formulações que a seguir se apresentam:

1. Admite-se que o sistema de barras carece de qualquer imperfeição geométrica, muito embora a geometria possa estar actualizada em resultado dos sucessivos cálculos de deslocamentos efectuados;
2. Durante todo o processo supõe-se que o comportamento material é contínuo, homogéneo, isotrópico e perfeitamente elástico e linear;
3. Não se considera a possibilidade de encurvadura nas barras por flexão ou torção;
4. Todas as barras encurvam simultaneamente.

Esta última hipótese não exclui, completamente, uma possibilidade de encurvadura local, muito embora, se tal suceder, não poderá conduzir ao colapso da estrutura. Isto é fácil de aceitar, já que de outro modo essa ocorrência deveria ser detectada, directamente, pela

⁸¹ Dado o equilíbrio ser indiferente, existem, consequentemente, tantas formas de equilíbrio quantos os graus de liberdade do sistema. Numa situação de equilíbrio estável, que corresponde a todos os instantes imediatamente antes deste, só é possível uma única configuração de equilíbrio (que não é mais que a deformada proporcional da

análise.

4.2. Método da Iteração Matricial de Stodola

Aires Camões apresenta uma descrição desta formulação [5] que se reproduz e se comenta nas partes que se julgam pertinentes para a sequência e entendimento deste trabalho⁸².

No método da Iteração Matricial de Stodola a relação básica considerada é:

$$[K_L] \{\phi_i\} = \lambda_i [K_G] \{\phi_i\} \quad (4.4)$$

sendo:

$\{\phi_i\}$ - vector próprio correspondente ao modo i ;

λ_i - valor próprio i , associado ao vector próprio $\{\phi_i\}$;

Esta equação, que materializa a situação de equilíbrio instável que ocorre quando a matriz geométrica é uma combinação linear da matriz de rigidez elástica, é equivalente à equação (4.2), sendo o factor multiplicativo a aplicar a essa matriz geométrica a carga crítica que se pretende determinar.

Para a obtenção do primeiro valor próprio e correspondente vector próprio, pode-se arbitrar uma configuração inicial deformada $\{u_0\}$ que traduza uma primeira aproximação para a situação de instabilidade, do que:

$$[K_L] \{\phi_1\} = \lambda_1 [K_G] \{u\}_0 \quad (4.5)$$

ou, de outra forma:

$$[K_L] (1/\lambda_1) \{\phi_1\} = [K_G] \{u\}_0 \quad (4.6)$$

Considerando o segundo membro como um vector solicitação $\{f_0\} = [K_G] \{u_0\}$, a expressão (4.6) pode ser escrita como:

$$[K_L] (1/\lambda_1) \{\phi_1\} = \{f\}_0 \quad (4.7)$$

Ainda e atendendo ao carácter iterativo da solução:

$$[K_L] (1/\lambda_1)_j \{\phi_1\}_j = \{f\}_j \quad (4.8)$$

estrutura para esse índice de carregamento).

⁸² Este método encontra-se descrito por K.J.Bathe e E.L.Wilson em “Numerical Methods in Finite Element Analysis” da Printice-Hall, sendo designado por método da Iteração Inversa ou método da Iteração Matricial de Stodola por Raimundo Delgado e Elsa Caetano em “Jornadas sobre a Aplicação da Nova Regulamentação de Estruturas – A Encurvadura em Pórticos de Betão-Armado”, FEUP, e ainda por Nelson Vila Pouca [38].

Resolvendo o sistema de equações criado, surge:

$$\{\hat{u}\}_j = (1/\lambda_1)_j \{\phi_1\}_j \quad (4.9)$$

Se a configuração traduzisse, exactamente, o modo de instabilidade $\{\phi_1\}$ da estrutura, as relações entre as componentes do vector $\{u\}_j$ as do vector $\{\hat{u}\}_j$ seriam constantes e o parâmetro de carga da estrutura, λ , atendendo a (4.3), seria obtido por:

$$(\lambda_1)_j = \{u\}_j / \{\hat{u}\}_j \quad (4.10)$$

Note-se que $\{u\}_j$ e $\{\hat{u}\}_j$ são vectores auxiliares, sendo que $\{u\}_j$ corresponde a $\{\phi\}$ quando esta expressão, finalmente, se verifica. Como, em princípio, isso não é imediato torna-se necessário procurar o valor para que tal seja verdade.

Uma primeira aproximação de λ pode ser conseguida recorrendo ao quociente de Rayleigh que visa relacionar este parâmetro com os vectores a aproximar, utilizando uma ponderação através da matriz de rigidez geométrica:

$$(\lambda_1)_j = (\{\hat{u}\}_j^T [K_G] \{u\}_j / \{\hat{u}\}_j^T [K_G] \{\hat{u}\}_j) \quad (4.11)$$

De modo a conseguir uma segunda aproximação, pode ser adoptado para a configuração da deformada o vector:

$$\{u\}_j = \{\hat{u}\}_j / (\{\hat{u}\}_j^T [K_G] \{\hat{u}\}_j)^{(1/2)} \quad (4.12)$$

Para se obter uma aproximação sucessivamente melhor do valor de λ , deveremos prosseguir o processo iterativo, corrigindo-se a deformada arbitrada inicialmente a partir do valor de λ já calculado.

Assim, a determinação da carga crítica elástica de uma estrutura reticulada assenta nos seguintes passos:

- 1 – Arbitragem de uma configuração inicial de instabilidade, $\{u\}_0$;
- 2 – Rotina a efectuar para a iteração i :
 - 2.1 – Cálculo do vector solicitação $\{f\}_i = [K_G] \{u\}_{i-1}$;
 - 2.2 – Obtenção do vector $\{\hat{u}\}_i$ por resolução de $[K_L] \{\hat{u}\}_i = \{f\}_i$;
 - 2.3 – Determinação de $\{u\}_i = \{\hat{u}\}_i / (\{\hat{u}\}_i^T [K_G] \{\hat{u}\}_i)^{(1/2)}$;
 - 2.4 – Cálculo do parâmetro $\lambda_i = (\{\hat{u}\}_i^T [K_G] \{\hat{u}\}_{i-1})$;
 - 2.5 – Verificação da precisão conseguida, impondo: $(\lambda_i - \lambda_{i-1}) / \lambda_i \leq \delta$;
 - 2.6 – Repetição dos passos 2.1 a 2.4 até satisfazer 2.5 ;
- 3 – Determinação da carga crítica elástica: $\{P\} = \lambda \{f\}$.

O processo iterativo descrito convergirá para o valor do parâmetro de carga crítica mais baixo ou fundamental, a menos que durante os passos descritos se obtenham configurações da deformada, $\{\hat{u}\}_i$, ortogonais ao primeiro modo de encurvadura da estrutura.

Isto pode suceder porque, como se verá, a determinação de modos de encurvadura superiores ao primeiro implica que esse modo seja ortogonal a todos os anteriores.

4.3. Método da Iteração Matricial de Stodola modificado

Uma versão modificada do método anterior foi apresentada por Raimundo Delgado e Elsa Caetano em “Jornadas sobre a Aplicação da Nova Regulamentação de Estruturas – A Encurvadura em Pórticos de Betão-Armado”, publicação da FEUP, tendo sido adoptada em trabalhos posteriores [18,38].

Assenta nos seguintes passos [38]:

- 1 - Determinação de uma configuração de instabilidade aproximada: $\{u\}_0$ ⁸³;
- 2 - Estabelecimento do processo iterativo correspondendo à iteração j os passos:

- 2.1 – Determinação do vector solicitação $\{f_G\}_j = [K_G] \{u\}_{j-1}$;

- 2.2 – Determinação do vector $\{\hat{u}\}_j$ por resolução do sistema:

$$[K_G] \{\hat{u}\}_j = \{f_G\}_j ;$$

- 2.3 – Determinação de $(\lambda_c)_j$ pela ponderação da matriz de rigidez geométrica:

$$(\lambda_c)_j = \{\hat{u}\}_j^T [K_G] \{u\}_{j-1} / \{\hat{u}\}_j^T [K_G] \{\hat{u}\}_j$$

e verificação da precisão conseguida;

- 2.4 – Repetição dos passos 2.1 a 2.3 com a nova configuração de instabilidade

$$\{u\}_j = (\lambda_c)_j \{\hat{u}\}_j ;$$

- 3 – determinação da carga crítica elástica $P_c (\lambda_c)_j = P$.

Como se pode observar, as alterações introduzidas resultam em alguma poupança no número necessário de operações, mantendo-se a sua organização e conteúdo muito semelhantes.

Na verdade, procede-se a uma simples concentração e simplificação dos passos 2.3 a 2.6 do método anterior, em que resulta um valor igual para a carga crítica, embora o mesmo já

⁸³ Poder-se-á igualar todo o vector à unidade ou aproveitar o vector deslocamentos do final do cálculo não linear dessa mesma solicitação.

não suceda para o modo de encurvadura (mantendo-se, todavia, estes vectores proporcionais, necessariamente).

4.4. Método da Bifurcação de Equilíbrio

Uma apresentação alternativa, mesmo em termos da teorização ilustrada na introdução deste capítulo (ponto 4.1), é estabelecer o problema da seguinte forma [1,2]:

1. Seja N_0 o esforço axial a que uma das barras da estrutura está sujeita e que serve de referência;
2. Admita-se a equação de equilíbrio: $\{P\} = ([K_L] - N_0 [K_G]) \{U\}$;
3. Determine-se o valor mais pequeno que podemos designar por N e anule o determinante dos coeficientes desta equação:

$$|[K_L] - N [K_G]| = 0$$

executando para o efeito os seguintes procedimentos:

- 3.1. Operações prévias sobre a expressão $|[K_L] - N [K_G]| = 0$:

$$|[K_L]^{-1} [K_L] - N [K_L]^{-1} [K_G]| = 0$$

$$|[I] - N [K_L]^{-1} [K_G]| = 0$$

$$|[I]/N - [K_L]^{-1} [K_G]| = 0$$

$$|[I]/N - [D]| = 0$$

em que a matriz $[D] = [K_L]^{-1} [K_G]$ se designa por matriz característica.

- 3.2. Ao menor valor N associa-se o vector próprio $\{\phi\}$ que verifica a equação característica:

$$|[I]/N - [D]| \{\phi\} = 0$$

$$|[I]/N \{\phi\} - [D] \{\phi\}| = 0$$

$$[I]/N \{\phi\} = [D] \{\phi\}$$

$$[I] \{\phi\} = N [D] \{\phi\}$$

introduzindo-se o seguinte método iterativo para encontrar o menor valor de N :

- 3.2.1. Iniciação do vector de arranque:

$$\{\phi_1\} = \{1\}$$

- 3.2.2. Cujo encaixe na equação característica dá lugar a um novo vector:

$$\{\phi_2\} = [D] \{\phi_1\}$$

3.2.3. Para normalizar o novo vector $\{\phi_2\}$, calcula-se o seu módulo e dividem-se por ele todos os elementos:

$$\lambda_2 = (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)^{(1/2)}$$

sendo certo que se este fosse o vector próprio procurado teria de se verificar a equação característica:

$$[I] \{\phi_2\} = 1/\lambda_2 [D] \{\phi_2\}$$

3.2.4. A não ser assim, elege-se agora como vector de prova $\{\phi_2\}/\lambda_2$ que aplicado à equação característica produz um novo vector:

$$\{\phi_3\} = [D] \{\phi_2\}/\lambda_2$$

3.2.5. Repetem-se os procedimentos de 3.2.2. a 3.2.4. até que a diferença entre passos sucessivos seja inferior a uma tolerância fixada:

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} < \delta$$

4. As componentes do vector próprio $\{\phi_n\}$ são o modo de encurvadura correspondente e $N = 1/\lambda_n$ o valor que tem de alcançar o esforço axial na barra de referência para que se dê a encurvadura global da estrutura. Este valor N dividido pelo que, efectivamente, suporta a barra de referência N_0 definirá o coeficiente crítico:

$$\lambda_C = N/N_0$$

que multiplicado pelo vector solicitação resulta no vector de carga crítica. Quer isto dizer: λ_C ou N/N_0 é o incremento que teremos de aplicar à totalidade das cargas para que tenha lugar a encurvadura geral da estrutura em estudo.

4.5. Modos de Encurvadura superiores ao primeiro

Vimos em 4.1. o procedimento de cálculo da carga crítica fundamental e correspondente primeiro modo de instabilidade ou encurvadura de uma estrutura. Na eventualidade de após este deslocamento a estrutura conseguir encontrar uma nova posição de aparente equilíbrio, ainda que precário, poderá voltar a ser carregada. A este acréscimo sucessivo de carga advirá novo ponto de bifurcação de equilíbrio, condizendo este fenómeno com a segunda carga crítica e segundo modo de encurvadura. Tal processo poderá ter lugar tantas vezes quantas o sistema consiga compensar-se para nova posição de equilíbrio instável, correspondendo a valores crescentes de novas cargas críticas.

Não tendo, obviamente, os modos superiores o mesmo interesse que o primeiro ou modo fundamental de instabilidade, já que todos os outros equivalem a níveis de energia superiores, pode existir algum interesse no seu cálculo e visualização, nomeadamente:

- Quando há modos com valor muito próximo do primeiro, não se conseguindo estabelecer uma direcção principal de contraventamento;
- Mesmo que existindo um modo principal bem marcado, o segundo modo comporta um risco de ocorrência que justifica uma segunda direcção de contraventamento;
- Se pretende um conhecimento mais pormenorizado do comportamento da estrutura.

Estes modos de encurvadura podem ser obtidos recorrendo à ortogonalização de Gram Schmidt que permite obter, para configurações aproximadas da deformada a utilizar no processo iterativo, vectores ortogonais aos vectores próprios já calculados [5].

Conhecidos $i-1$ modos anteriores de instabilidade da estrutura no início⁸⁴ de cada ciclo, o vector $\{u\}_j$ terá de ser purificado⁸⁵, procedendo-se da seguinte maneira:

$$\{u\}_i = ([I] - \sum \{\phi\}_j \{\phi\}_j [K_G]) \{u\}_i$$

Os vectores $\{\phi\}_j$ são todas as anteriores configurações de instabilidade $\{u\}$ já calculadas, indo, portanto, o índice j de 1 a $i-1$.

A cada nova configuração corresponde uma carga crítica λ_c , superior a todas as anteriormente encontradas.

Outra abordagem muito análoga pode ser citada [18], sendo também baseada no facto do processo iterativo convergir para o modo de encurvadura de valor próprio mais baixo.

A determinação de um modo mais elevado passa por partir para cada iteração de um vector $\{u\}$ desde logo ortogonal a todos os modos já determinados. Há, assim, a necessidade de no início de cada iteração i , purificar o vector de arranque, tendo em vista garantir aquela ortogonalidade $\{u\}_{pur}$. Essa purificação para a configuração i é efectuada através de:

$$\{u_{pur}\}_i = ([I] - \sum \{\phi\}_j \{\phi\}_j [K_G] / \sum \{\phi\}_j [K_G] \{\phi\}_j) \{u\}_i$$

A diferença entre as duas expressões assenta na própria diversidade entre as

⁸⁴ Na referência bibliográfica [5] também é efectuada esta operação antes do cálculo de $(\lambda_c)_j$, embora aqui não se tenha esta suposta dupla cautela, os resultados são idênticos. Esta postura é coerente com a adaptação deste processo ao método da bifurcação de equilíbrio, conduzindo também aqui a resultados correctos.

⁸⁵ Entenda-se purificação como o processo através do qual se assegura que o próximo modo a ser derivado é ortogonal a todos os a si anteriores, garantindo-se que nenhum poderá ser um pseudomodo com base numa qualquer combinação dos restantes. Para que dois diferentes vectores próprios sejam ortogonais deverá verificar-

formulações de base, estabelecendo-se apenas na forma como se faz a ponderação do vector $\{u\}$.

4.6. Curva de Cargas Críticas

Um esboço com bastante interesse é aquele a que poderemos chamar curva das cargas críticas e que consiste na linha que une os pontos correspondentes ao valor estimado para a carga crítica no final de cada incremento. Com este procedimento conseguimos obter interessantes sobreposições e comparações entre esta curva de cargas críticas e a já conhecida curva da análise não linear ou curva carga-deslocamento.

Antes de efectuar algum confronto entre estas metodologias, lembremo-nos que, embora a matriz de rigidez linear seja, praticamente, independente do nível de carregamento, a menos da actualização de geometria, o mesmo já não acontece com a matriz geométrica. Na verdade, é esta última directamente proporcional a esse grau de carregamento, pelo que afigurar-se-ia normal que o valor da carga crítica descesse proporcionalmente ao aumento do estado de carga da estrutura. Contudo, a perda de rigidez total não é linear e em caso de existir actualização de geometria a situação pode alterar-se de forma considerável, sobretudo para uma estrutura que sofra deformações significativas. Pelo que, embora estas curvas mantenham um andamento lógico, este não será de imediato visível, se pretendermos realizá-lo para uma em função da outra, já que essa não linearidade acompanhada da actualização de geometria pode não o possibilitar.

Vejamos o que se passa para alguns casos [15] cuja exposição já foi efectuada em 1.2 :

Caso normal

Vimos ser este o caso mais frequente na generalidade das estruturas construídas em que a solicitação a que estão sujeitas leva a alguma perda na sua rigidez e ao aumento da deformação, sem que tal situação alguma vez atinja valores exagerados.

Neste caso, a curva de carga crítica é sempre decrescente, ou seja: conforme o nível de carregamento caminha para a sua totalidade o factor de carga crítica diminui

se a condição $\{\phi\}_m^T [K_G] \{\phi\}_n = 0$, do que a fórmula apresentada é uma generalização desta faculdade.

proporcionalmente. Se esta curva interceptar a da análise não linear, esse ponto corresponderá a um valor unitário para o factor de carga crítica, pelo que o nível de carga até este ponto aplicado bastará para conduzir a estrutura ao colapso geométrico, devendo ser esta reequacionada.

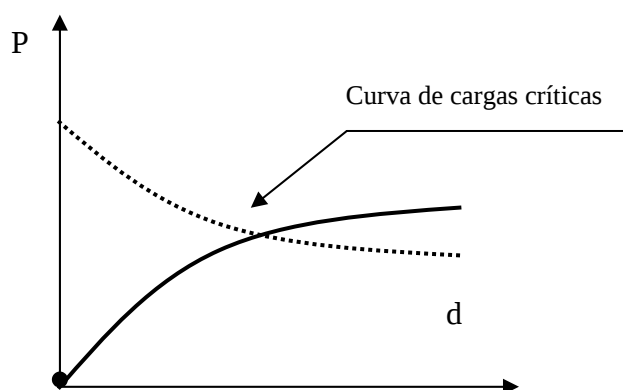


Figura 4.1: Curva carga-deslocamento e cargas críticas num caso normal.

Inflexão da trajectória de equilíbrio

Nestes casos também não existe uma situação de instabilidade, mas uma passagem de uma fase de amaciamento para outra de endurecimento com um ponto de inflexão.

Como se pode constatar, a esse ponto de inflexão corresponde um outro de mínimo na curva de carga crítica, o que é coerente, já que aqui a estrutura tem o seu valor mais baixo da rigidez. Atendendo, então, a que o factor da carga crítica ou coeficiente crítico λ é uma medida da diferença a que nos encontramos da falência geométrica, ao referido ponto de mínimo corresponderá aquilo a que poderemos chamar do valor mais próximo da carga crítica que para esta estrutura e nesta acção de carregamento tem probabilidade de ocorrer.

Sem o recurso a uma curva de cargas críticas o valor atingido neste ponto, muito provavelmente, nunca seria conhecido, podendo fixar-se o valor do factor de carga crítica muito acima de uma estimativa mais rigorosa e prudente, já que, em princípio, estaria mais de acordo com a situação final de endurecimento.

Ora, se é possível que esta condição correspondente ao término da aplicação da carga se pode de facto verificar e ser a que importa às conclusões da análise, na verdade e entretanto a estrutura realizou um percurso de deformação em que se avizinhou de uma situação bem mais desfavorável, a qual não se deve omitir ou subavaliar na globalidade do estudo.

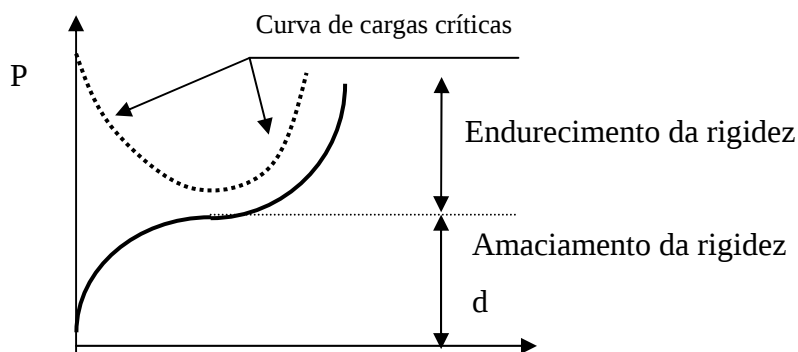


Figura 4.2: Curva carga-deslocamento e cargas críticas num caso de inflexão da trajectória de equilíbrio.

Bifurcação de equilíbrio

Aqui o começo da trajectória apresenta um comportamento essencialmente linear, querendo isto dizer que as pequenas variações da geometria inicial têm uma incidência insignificante na actualização da matriz tangente. Isto leva a que à medida que a carga aplicada aumenta a matriz de rigidez geométrica cresce proporcionalmente e o factor λ que nos separa da carga crítica vai diminuindo na razão inversa, resultando uma carga crítica quase constante.

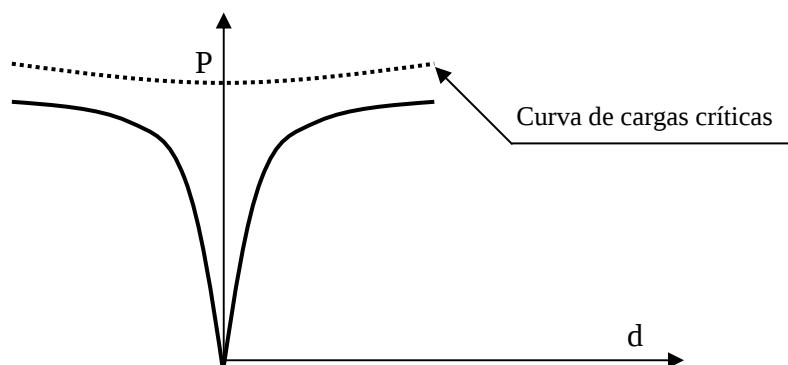


Figura 4.3: Curva carga-deslocamento e cargas críticas num caso de bifurcação de equilíbrio.

Inversão de equilíbrio com descontinuidade

Nestas circunstâncias, os efeitos da não linearidade, acompanhados de uma diminuição da rigidez, vão-se acentuando com o aumento de carga, prosseguindo isto até que a trajectória alcança um ponto de máximo onde a rigidez se anula e a estrutura se torna instável. A esta

perda momentânea de equilíbrio, segue-se uma nova configuração estável e um percurso de carregamento negativo até que um ponto de mínimo é atingido, após o que a estrutura entra em endurecimento da rigidez.

A curva de carga crítica irá cruzar a sua homóloga para a relação carga-deslocamento nos pontos notáveis descritos: ponto de máximo e de mínimo de carregamento. Isto porque estes pontos correspondem a situações-limite para as quais o factor λ é unitário, ou seja: pontos que condizem com a ocorrência de inversão do sentido de carregamento.

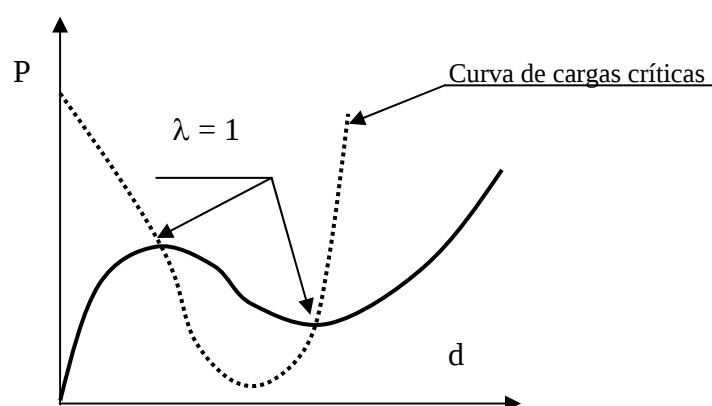


Figura 4.4: Curva de cargas críticas com inversão de equilíbrio com descontinuidade tipo “snap-through”.

Atendendo aos casos vistos, podemos concluir que é sempre vantajoso o conhecimento da curva de cargas críticas que interessa ao carregamento em apreço, sendo esta uma informação suplementar e, primeiramente, uma segurança quanto ao comportamento da trajectória de carga.

Refira-se que este tipo de instabilidades se pode verificar em vigas curvas [49], nas quais a dimensão do seu arco e o raio da sua curvatura assumem papel determinante.

4.7. Coeficientes Complementares de Encurvadura

Além das variáveis já explicitadas, outras existem que nos auxiliam na interpretação dos dados já disponíveis, bem como identificam várias propriedades associadas às anteriores que concedem importantes informações ao nível da barra [1,2]:

Carga crítica global ao nível da barra

A carga crítica global ao nível da barra não é mais que a força real instalada na barra em causa para o nível de carregamento em que se faz a previsão, afectada do factor de carga crítica:

$$N_{\text{Crítico da barra}} = N_{\text{barra}} \lambda_c$$

Carga crítica de Euler

É a carga mínima, hipoteticamente, necessária para provocar a instabilidade local da barra, tendo em consideração a teoria de Euler:

$$N_{\text{Crítica Euler}}^Y = \pi^2 EI_Y / L^2$$

$$N_{\text{Crítica Euler}}^Z = \pi^2 EI_Z / L^2$$

Serve este valor para a verificação do anterior, já que, respeitando esta doutrina, terá de se confirmar, obrigatoriamente:

$$N_{\text{Crítica Euler}}^Y > N_{\text{Crítico da barra}}$$

$$N_{\text{Crítica Euler}}^Z > N_{\text{Crítico da barra}}$$

pois, caso contrário, estaríamos na eventualidade de uma situação de instabilidade local de valor inferior à global.

Poderia pôr-se a questão de não ter sido considerado qualquer factor que afecte o comprimento real da barra L , face às condições de fronteira existentes. Parecendo, por esta razão, tomar-se esse factor como unitário, correspondendo a uma situação de comprimento de encurvadura, teórico e recomendado, de barra articulada isolada [33].

Esta postura seria de qualquer modo, normalmente⁸⁶ conservativa e, como tal, do lado da segurança.

Uma posição que poderia parecer mais rigorosa e provavelmente mais económica, seria a adopção de métodos mais rigorosos e adaptados a pilares de pórticos, como [33]:

- Distância entre pontos de momento nulo na distribuição final de esforços ao longo do pilar, recorrendo a uma análise não linear;
- Relação da rigidez relativa entre elementos concorrentes nos nós extremos do elemento:

$$\alpha = \Sigma (EI/L)_{\text{pilar}} / \Sigma (EI/L)_{\text{viga}}$$

- Ábacos de Jackson e Moreland;

⁸⁶ Quer-se com esta posição salvaguardar situações mais desfavoráveis como a do pilar em consola.

- Fórmulas simplificadas (REBAP e BS8100);
- Comprimento livre ou teórico do pilar (MC90 e EC2).

Coefficiente multiplicativo do comprimento de barra β_0

Um coeficiente de grande importância é aquele que nos relaciona a carga crítica de Euler com a carga crítica real, em função do comprimento da barra, ou seja: qual seria o comprimento que a barra deveria ter para que, atendendo à carga crítica real instalada, se igualasse a carga crítica de Euler:

$$N_{\text{Crítico da barra}} = \pi^2 EI / (\beta_0 L)^2 \quad \text{com} \quad \beta_0 = \pi (EI / (N_{\text{Crítico da barra}} L))^{\frac{1}{2}}$$

Comprimento de encurvadura L_E

Então, com base neste factor β_0 podemos determinar o comprimento de encurvadura para cada uma das direcções principais dos eixos da secção da barra:

$$\beta_{Y0} = \pi (EI_Y / (N_{\text{Crítico da barra}} L))^{\frac{1}{2}} \Rightarrow L_{EY} = \beta_{Y0} L$$

$$\beta_{Z0} = \pi (EI_Z / (N_{\text{Crítico da barra}} L))^{\frac{1}{2}} \Rightarrow L_{EZ} = \beta_{Z0} L$$

Esbelteza λ_E

Por último, conseguiremos avaliar o coeficiente de esbelteza como parâmetro importante em termos regulamentares para o dimensionamento de secções:

$$\lambda_{EY} = L_{EY} / (I_Y/A)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \lambda_{EZ} = L_{EZ} / (I_Z/A)^{\frac{1}{2}}$$

4.8. Análise Plana e Espacial da Instabilidade

Por várias razões, o estudo das estruturas efectua-se, muitas vezes, por divisão das mesmas em pórticos planos.

Desta atitude resultam, entre outras, as seguintes duas grandes vantagens:

- Menor volume de dados e resultados;
- Possibilidade de só com um pórtico plano tratar, simultaneamente, várias partes idênticas e repetidas da estrutura.

Se para o cálculo dos esforços, e mesmo dos deslocamentos, isso é satisfatório para estruturas particularmente regulares e simétricas, o mesmo já não se pode dizer quanto à análise global de estabilidade, independentemente dessa vantajosa simplicidade da estrutura.

Claro que se alegará que um simples travamento intuitivo e/ou regulamentar resolve eficazmente a questão. Parece, contudo, tal postura sofrer de alguma rudeza científica,

ficando mesmo, em alguns casos, uma residual sensação de relativa incerteza.

Como se vai reconhecer no capítulo seguinte, a carga crítica de um pórtico plano, quando analisada em termos espaciais e sem que os seus deslocamentos sejam impedidos para fora do seu plano, cai brutalmente. Tal é denunciador do erro grosseiro que se comete ao reduzir esta análise a um somatório simples de casos planos. Mais, será inequivocamente superior, tanto em precisão como em economia, um dimensionamento em que os elementos de contraventamento são colocados e calculados com base no seu exacto funcionamento individual e de conjunto, do que em procedimentos vagos e rudimentares.

Outra situação em que este género de simplificação se pode mostrar incongruente, é quando do aparecimento de modos de encurvadura por torção que assumem carácter preponderante [18].

Como resultado do que foi dito e pelo que vai ser confirmado, parece aconselhável optar, de forma preferencial ou mesmo permanente, por um estudo da instabilidade global sempre em termos tridimensionais.

4.9. Sumário

Muitas questões se levantam quanto à fiabilidade deste tipo de estudo de instabilidade de estruturas, tanto mais que esta depende de muitos factores que não foram tomados em conta. Entre estes permanece pouco transparente o que fazer com eventuais problemas de instabilidade local. De facto, convém realçar que se falou em «perda generalizada» e «colapso global», dado esta análise envolver a estrutura como um todo, havendo que considerar a hipótese de poderem existir, antes que se atinja esta situação “colectiva” de esgotamento, vários tipos de instabilidade local ao nível da barra como elemento isolado⁸⁷.

Teoricamente, e no caso de terem lugar, estas formas pontuais de encurvadura não deverão comprometer a estabilidade global, pois, de outro modo, corresponderiam elas próprias a um modo de instabilidade e correspondente carga crítica e, como tal, deveriam ter sido despistadas no estudo global efectuado.

Será prudente, de toda a maneira, supor que muito provavelmente secções do elemento visado já entraram em não linearidade material, arrastando consigo configurações de rotura

⁸⁷ Vejam-se os exemplos apresentados por Alvarez em [1] e [2].

que podem ter muito pouco a ver com os valores de carga crítica encontrados por esta análise, sendo-lhe, certamente, manifestamente inferiores. Este caso configura um dos perigos de uma análise não linear geométrica isolada, sobretudo quando aplicada numa estrutura fortemente contraventada (ou de nós “muito” fixos⁸⁸) que poderá, em princípio, resistir numa análise deste tipo, muito para além do que é a realidade.

Tendo em consideração o parágrafo anterior e, muito embora não se consiga com isso ultrapassar todas as dificuldades enunciadas, recomenda-se como medida preventiva no caso de estruturas com tipologia irregular ou variações acentuadas de rigidez entre os seus membros a divisão da barra em vários elementos. Dever-se-á ainda fazer regra, de no caso dos resultados na análise da instabilidade e mobilidade global mostrarem uma carga crítica elástica bastante folgada (igual ou superior a 10) e deslocamentos contidos, mas existirem elementos isolados que tenham ultrapassado o admissível para o seu estudo isolado, este ser sempre redimensionado para valores que não possibilitem uma incerteza local.

Quanto às formulações propriamente ditas, o método da bifurcação de equilíbrio mostrou-se convincentemente mais rápido. Sendo o modo de encurvadura fundamental⁸⁹ obtido por este processo muito mais próximo dos valores expectáveis para os deslocamentos aquando do colapso do que no caso dos seus concorrentes.

A vantagem que poderá provir dos métodos baseados na Iteração Matricial de Stodola é que permitem trabalhar com matrizes simétricas armazenadas em semibanda, com um custo computacional avaliado por, em cada iteração, ser necessário a resolução de um sistema de equações de dimensão igual ao das matrizes $[K_L]$ e $[K_G]$, não é suficiente para ultrapassar o método de bifurcação de equilíbrio. Isto porque o tempo de resolução de um sistema de equações é profundamente superior ao de umas simples operações algébricas de matrizes e vectores, ou seja: enquanto nos primeiros, como se viu, há que resolver o sistema de equações em cada iteração, no último apenas se inverte a matriz característica ($[K_G] \times [K_L]^{-1}$) uma vez, após o que o ciclo iterativo se reduz à multiplicação de um vector por uma matriz e ao produto interno de dois vectores. Acresce o facto de se ter trabalhado neste caso com a matriz tangente da estrutura na sua forma cheia, enquanto com os métodos da Iteração Matricial de

⁸⁸ O estudo de cargas críticas, tendo só em conta a não linearidade geométrica, terá a sua lógica e aplicação indiscutível em estruturas em que os fenómenos da encurvadura por modificação de geometria assumem papel condicionante no seu comportamento.

⁸⁹ Embora se refira somente o mais baixo, isso acontece não porque se saiba que o mesmo se deixa de verificar

Stodola ter sido aproveitado o facto da matriz ser simétrica e em banda, pelo que se tivéssemos utilizado um algoritmo que permitisse a inversão deste tipo de matrizes esparsas, essa diferença seria ainda mais acentuada.

Comentando, ainda, os métodos da Iteração Matricial de Stodola, aponta-se em [5,38] a sua validade como demonstrado nos estudos realizados por K.Aas-Jakobsen. Terá ficado provado que em estruturas cujos nós apresentam a possibilidade de importantes deslocamentos horizontais relativos (estruturas de nós móveis ou “sway frames”), os momentos obtidos com os pilares discretizados em apenas um elemento são equivalentes aos resultados teóricos. Contudo, para estruturas que apresentam deslocamentos horizontais desprezáveis (estruturas de nós fixos ou “no sway frames”) os momentos obtidos coincidem, praticamente, com os teóricos desde que os pilares sejam discretizados com dois elementos. Trata-se, pois, de notícias agradáveis, já que é quanto ao primeiro tipo de estruturas que os regulamentos se mostram mais conservativos e exigentes, ficando para as restantes também a solução encontrada.

Como observação sobre uma possível pista para a escolha de uma configuração inicial arbitrada, com vista a facilitar-se a convergência do processo, verificou-se neste trabalho que o emprego do vector de deslocamentos do próprio cálculo da estrutura não resultou muito eficaz. Quer isto dizer que a deformada devida às cargas aplicadas pode ter muito pouco de semelhante com o que se irá passar na situação de colapso geométrico. Isto pode parecer estranho, tanto mais que o carregamento que provoca essa falência não é mais que uma amplificação dessa carga, ou seja: uma combinação linear da mesma.

Por estas razões, muitas vezes, é preferível um vector inicial unitário ao emprego de outro “viciado” numa falsa solução aproximada, com eventuais custos de dificuldades em convergir.

A questão é que os mecanismos de cálculo são completamente diferentes, não existindo qualquer ligação teórica que conduza a resultados coniventes. Como exemplo desta falta de “cumplicidade” entre as duas abordagens, cite-se o flagrante caso do pórtico espacial simples do próximo capítulo e de que aqui apenas se apresentam as ilustrações suficientes para bem caracterizar o que pretendemos transmitir.

para os restantes, mas porque foi este o único estudado para este efeito.

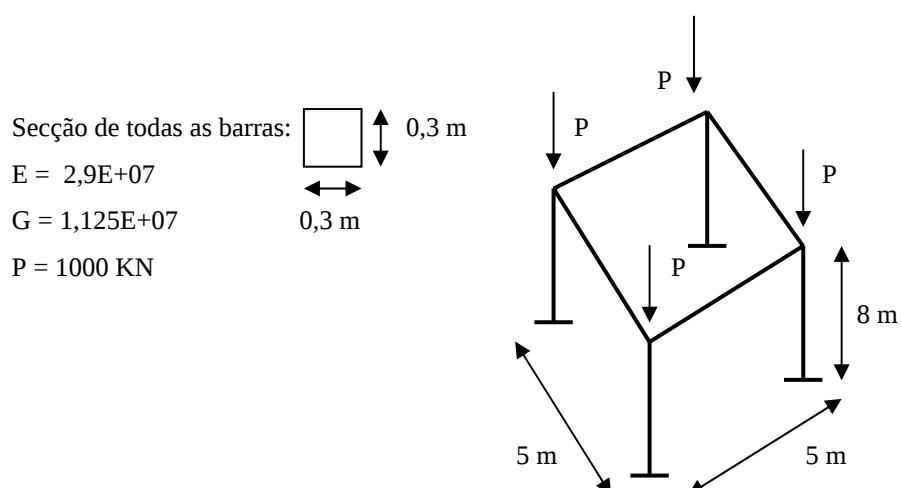


Figura 4.5: Pórtico espacial 1: geometria e solicitação vertical.

ESTRUTURA ESPACIAL SIMPLES
4 PILARES E 4 VIGAS
5 ELEMENTOS POR BARRA

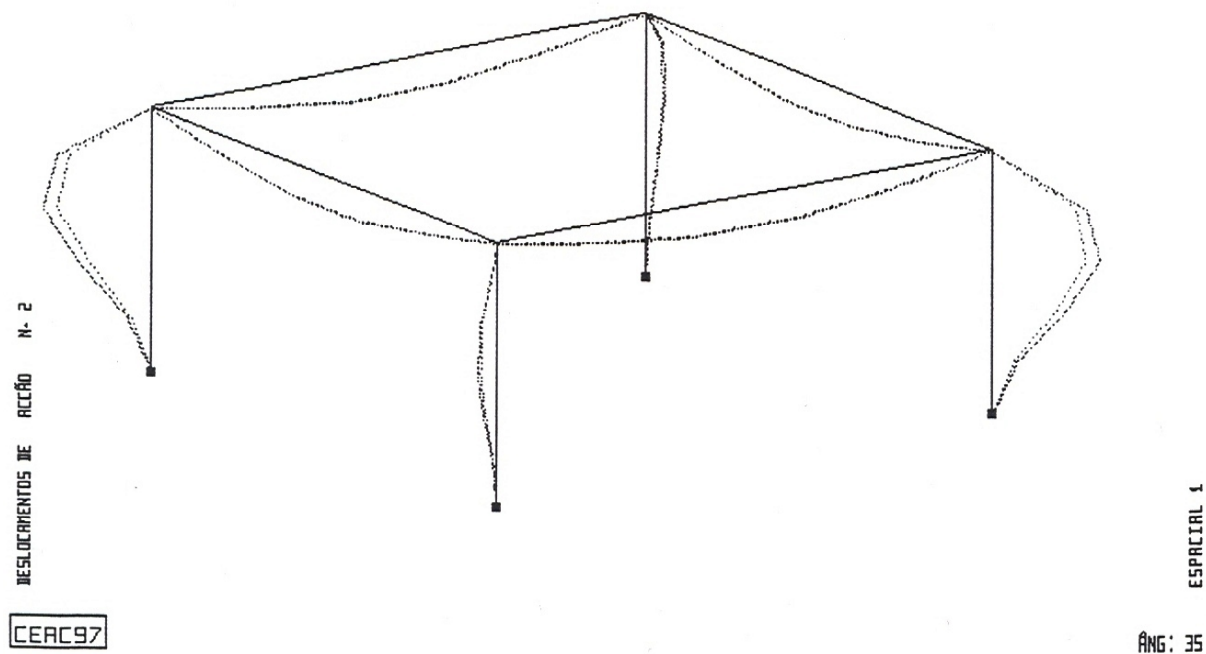


Figura 4.6: Pórtico espacial 1: deformada da solicitação vertical.

ESTRUTURA ESPACIAL SIMPLES
4 PILARES E 4 VIGAS
6 ELEMENTOS POR BARRA

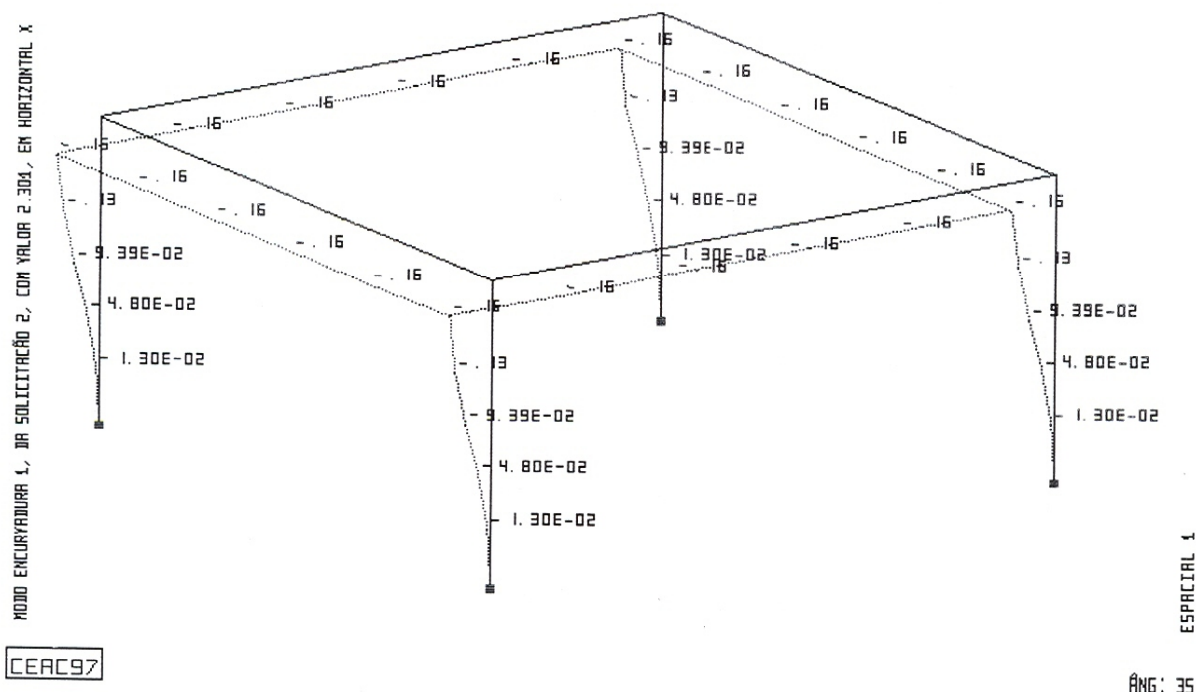


Figura 4.7: Pórtico espacial 1: 1ª carga crítica e modo de encurvadura associado.

Conforme poderemos apreciar, para uma situação de carga unicamente vertical, o modo de encurvadura pouco tem de relacionável com a deformada respectiva, já que será muito mais fácil a estrutura perder o seu equilíbrio global “fugindo” lateralmente do que os pilares permanecerem “corajosamente até se enterrarem no solo”. Pelo contrário, existindo, concomitantemente, uma solicitação horizontal, a deformada já estará muito mais próxima daquela que corresponde à perda de equilíbrio, ou seja: esta deformada de cálculo de deslocamentos e esforços só tem uma configuração idêntica à do modo de encurvadura mais baixo, quando as cargas aplicadas estão em concordância com o mais fácil caminho para a rotura de equilíbrio.

De facto, não podendo afirmar-se que os modos de encurvadura são totalmente independentes do carregamento em análise, a verdade é que estão de acordo com o princípio de garantir que se consuma a mínima energia necessária para provocar o colapso, muito embora contando, sempre e efectivamente, com a grandeza e sentido das cargas aplicadas que

lhe dão origem.

Outra importante utilidade do estudo de cargas críticas traduz-se no indicativo da classificação quanto à mobilidade da estrutura. Entre os documentos a citar que usam esse índice, aponte-se o EC3 o qual pela sua autoridade e notabilidade é revelador da importância do conhecimento deste valor.

Diga-se ainda que a classificação de estrutura contraventada ou não contraventada nunca advirá apenas da sua forma, da natureza dos elementos que a compõem e do tipo de suportes que a ligam ao exterior. De facto, tal categoria pode variar para um mesmo sistema-base, em função do padrão e do valor do carregamento que a solicita ou da dimensão de algumas peças presentes. A magnitude da rigidez contra movimentos laterais é, geralmente, da responsabilidade de duas componentes: a rigidez directa (ou linear) e a rigidez geométrica. Sendo esta última, por exemplo, função do comprimento, condições de ligação e esforços axiais nos membros de suporte, tornando-se difícil de obter em estruturas complexas [17].

Como importante desvantagem destas formulações de previsão de cargas críticas surge o facto destas serem praticamente insensíveis a forças horizontais. A razão desta penosa inconveniência advém da própria constituição da matriz geométrica que, de um modo geral, apenas joga com o esforço axial e com o comprimento da barra. Ora, em regra as forças horizontais provocam agravamentos nos momentos e nos efeitos de corte nos pilares, tornando-se estas acções dificilmente captáveis por estas teorias, mesmo usando matrizes geométricas mais completas (aquelas que atendem a momentos flectores e torsões⁹⁰).

Reafirme-se a recomendação do estudo espacial da instabilidade global em detrimento de várias e isoladas análises planas, dado só uma análise tridimensional possibilitar a aquisição das cargas críticas reais e a encurvadura por torção global da estrutura. Querendo dizer com “cargas críticas reais” que admitindo uma análise plana estamos a coarctar à estrutura a possibilidade da sua configuração de instabilidade poder deformar-se para fora do plano que a contém. Ademais, restringindo estes movimentos atribuímos ao sistema uma falsa rigidez infinita nessas direcções, ao que corresponde, obrigatoriamente, um aumento ilusório e perigoso do valor dessa carga crítica. Evidencia-se, assim, a exigência de um estudo espacial da encurvadura, reservando-se qualquer análise mais simplificada para um âmbito

⁹⁰ Isto passa-se muito em virtude de que o valor absoluto destes esforços ser normalmente bastante inferior ao das forças axiais, ainda e por outro lado, os próprios termos que possuem momentos na matriz geométrica são já

meramente informativo.

Apresenta-se, fechando este capítulo, aquilo que se pretende como uma súmula das formulações em quadro comparativo.

QUADRO 4.1

	Iteração Matricial de Stodola	Iteração Matricial de Stodola (modificado)	Bifurcação de Equilíbrio
Facilidade de implementação num programa de pórticos	Elevada	Elevada	Média
Tolerância necessária para assegurar a convergência para valores próprios correctos	Alta	Alta	Baixa
Velocidade de cálculo	Muito Baixa	Muito Baixa	Alta

em si numericamente mais pobres que os seus congéneres que respeitam aos esforço normais.

4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

5.1. Introdução

Com os exemplos numéricos que vão incluir-se não se pretende a apresentação e o confronto entre todas as formulações estudadas na sua múltipla diversidade. Tal tarefa além de hercúlea, já que trataria de centenas ou milhares de combinações possíveis⁹¹, implicaria a junção de vários e extensos anexos a este trabalho.

Assim, limitar-se-á este subcapítulo à resumida tentativa de ilustrar os seguintes pontos:

- Breve contraposição entre órgãos.
- Concisa oposição entre processos.
- Comparação directa da nitidez e grandeza da diferença que podem atingir os resultados entre a análise linear e não linear geométrica.
- Influência da divisão das barras em mais de um elemento, tanto para a análise não linear geométrica de deslocamentos e esforços como para o estudo da instabilidade de uma estrutura.
- Confrontação dos resultados obtidos com ou sem actualização de geometria.
- Aparecimento dos efeitos consequentes à sensibilidade da estrutura e do seu carregamento aos *momentos induzidos*.
- Realidade dos movimentos de corpo rígido nos deslocamentos não lineares e consequente eventual necessidade da sua eliminação na obtenção de esforços.
- Importância da análise espacial da instabilidade em detrimento da plana.

⁹¹ Com efeito, usando uma contabilização simplista e despreocupada de eventuais incompatibilidades, poderíamos antever para um único exemplo as seguintes alternativas de análise:

- 1) Tipos de matrizes tangentes: 13.
- 2) Tipos de técnicas incrementais: 7.
- 3) Tipos de técnicas iterativas: 4.
- 4) Actualização ou não de geometria: 2.

Ou seja: qualquer coisa como 728 possibilidades, sem contar com o eventual uso de diferentes matrizes de transformação (reduzido interesse), diversas formas de obter os esforços (bastante pertinente), recurso a técnicas complementares (pouco importante), inclusão de vários métodos de estudo de cargas críticas e modos de instabilidade (muito atinente) e adopção de distintos critérios de convergência. instabilidade (muito atinente) e adopção de distintos critérios de convergência.

- Utilidade no conhecimento dos coeficientes complementares de encurvadura.

Antes, porém, de nos debruçarmos sobre os exemplos seleccionados e a sua análise, vamos fazer breves comentários sobre o programa de cálculo que possibilitou a sua realização.

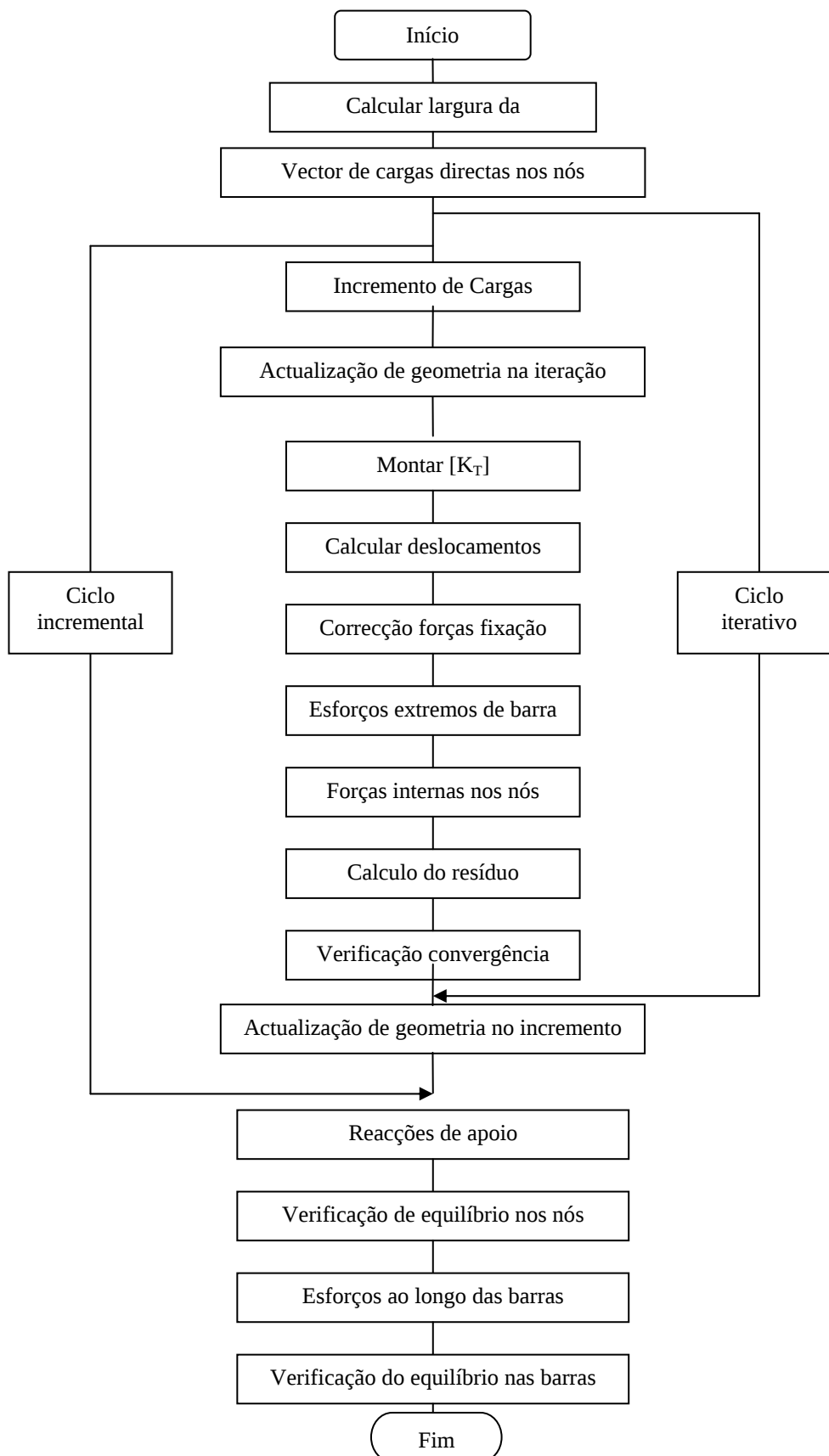
5.2. O programa de cálculo CEAC97

Este programa, que como se disse foi concebido de raiz, tem a sua organização orientada, prioritariamente, para a análise não linear geométrica, seguindo o que ficou estabelecido para este tipo de estudo, em termos gerais.

De facto, todas as formulações que aqui abordamos foram implementadas em cálculo automático, proporcionando a sua interessante comparação em termos de desempenho numérico.

Como informação complementar, refira-se que a parte estritamente dedicada ao cálculo foi desenvolvida na linguagem científica FORTRAN 90, dado tratar-se, salvo mais válida opinião, daquela que para o efeito melhor se adapta a operações numéricas. Na verdade, a linguagem FORTRAN nasceu para o processamento de computação iminentemente matemática, sendo a versão 90 uma melhoria significativa em termos de modernidade face à anterior (FORTRAN 77). Aliás, talvez este tenha sido o seu maior salto qualitativo desde a sua criação. Infelizmente, julgo que novas possibilidades se poderiam ainda acrescentar, sem que esta perdesse a sua identidade, tornando-se (em termos extranuméricos) bastante mais competitiva face a outras contemporâneas (como o C e o C++).

Julgando não se enriquecer a exposição pelo facto de efectuar uma descrição exaustiva de todas as rotinas do programa, face à extensão de texto proporcional necessária, vão-se apenas indicar no anexo III os tópicos que se consideram essenciais para a compreensão das suas missões principais. No que aos fluxogramas do programa se refere, será a sua apresentação ainda mais comedida, incluindo-se apenas o caso elementar correspondente ao tronco principal para análise não linear geométrica num processo incremental e iterativo recorrendo ao método de Newton-Raphson em controlo de cargas e que se passa a apresentar.



De uma forma um pouco mais completa e textual, essa organização de um modelo não linear de cálculo de estruturas (para qualquer número de graus de liberdade por nó e, portanto, do número de dimensões em análise), pode seguir o seguinte esquema⁹²:

- Cálculo da largura da semibanda.
- Inicia ficheiro auxiliar com possibilidade de actualização de coordenadas (matriz em memória magnética com coordenadas exclusivas para cada acção/combinacção).
- Matriz de solicitações directas nos nós.
- Matriz de solicitações nas barras⁹³.
- Forças de fixação das solicitações nas barras⁹⁴.
- **Ciclo para cada acção/combinacção.**
 - Reiniciação das variáveis de ciclo incremental.
 - **Ciclo incremental.**
 - Reiniciação da variável de ciclo iterativo.
 - **Ciclo iterativo.**
 - Matriz de solicitações nas barras, se estivermos na primeira iteração⁹⁵.
 - Forças de fixação, se estivermos na primeira iteração⁹⁶.
 - Matriz de solicitações parciais e processamento de incremento.
 - Verificação de possibilidade de passagem de controlo de carga para controlo de deslocamentos.
 - Limpeza dos deslocamentos incrementais.
 - Limpeza das forças incrementais.
 - Actualização eventual de coordenadas na iteração.
 - Não há ciclo iterativo (cálculo linear com ou sem actualização de coordenadas).
 - *Montagem da matriz de rigidez.*
 - *Cálculo de deslocamentos.*

⁹² Este modelo também servirá para um cálculo linear, obviamente.

⁹³ Se não seleccionarmos actualização de coordenadas.

⁹⁴ Se não seleccionarmos actualização de coordenadas.

⁹⁵ Se seleccionarmos actualização de coordenadas.

⁹⁶ Se seleccionarmos actualização de coordenadas.

- *Factor de correcção das forças de fixação.*
- *Cálculo de esforços nos extremos de barra.*
- Ciclo iterativo directo.
 - *Montagem da matriz de rigidez.*
 - *Cálculo de deslocamentos.*
 - *Factor de correcção das forças de fixação.*
 - *Cálculo de esforços nos extremos de barra.*
 - *Verificação da convergência.*
- Ciclo iterativo com base no método de Newton-Rapshon.
 - *Limpeza do ficheiro de forças nodais (internas) equivalentes.*
 - *Montagem da matriz de rigidez (que é recalculada em função de se ter seleccionado essa opção para todas as iterações, só a primeira ou a segunda de cada incremento).*
 - *Cálculo de deslocamentos.*
 - *Factor de correcção das forças de fixação.*
 - *Cálculo de esforços nos extremos de barra.*
 - *Cálculo do resíduo.*
 - *Cálculo de forças nodais (internas) equivalentes e resíduo.*
 - *Verificação da convergência.*
- *Actualização dos deslocamentos totais nos nós.*
- *Relação carga-deslocamento por iteração*
- *Registo do nº de iterações no incremento.*
- *Verificação de final do ciclo iterativo*
- **Fim do ciclo iterativo**
 - *Relação carga-deslocamento por incremento.*
 - *Se estamos num ciclo iterativo directo, realiza-se a actualização de esforços e deslocamentos para incremento convergido.*
 - *Verificação de final do ciclo incremental.*
 - *Actualização eventual de coordenadas no incremento.*
- **Fim do ciclo incremental.**

- Verificação de final de ciclo incremental
- **Fim do ciclo de acções/combinações.**
- projecção dos esforços de barra nos nós.
- Eleição dos maiores esforços de barra.
- Correção dos esforços em eixos locais para a convenção da resistência de materiais.
- Cálculo das reacções de apoio.
- Verificação geral de equilíbrio nos nós.
- Cálculo de esforços de barra por acção/combinação e verificação do seu equilíbrio.
- Cálculo de cargas críticas, modos de encurvadura e de valores de instabilidade de barra.

Apenas a título exemplificativo, apresentam-se no anexo II duas sub-rotinas de resolução de sistemas de equações em que a matriz dos coeficientes é simétrica e em banda (o normal nas matrizes de rigidez das estruturas de Engenharia Civil).

A primeira sub-rotina refere-se ao caso mais habitual em que a matriz de rigidez é, perfeitamente, simétrica face à sua diagonal, sendo o segundo um caso especial e no qual ao nível da contribuição de cada elemento a sua submatriz K_{ii} não possui simetria.

Como vimos, esta última situação é aquela em que caem algumas matrizes complementares da matriz geométrica em formulações ditas de mais completas. Acrescente-se, muito embora e desde já, que, por propriedades algébricas de simetria e anti-simetria de matrizes este problema pode ultrapassar-se, não sendo necessária a utilização de processos de resolução de sistemas de equações lineares adaptados para estes casos. Fica, em todo o caso, elaborado e disponível um código de programação.

5.3. Williams Toggle Frame

É esta, muito provavelmente, a estrutura mais utilizada para aferir dos modelos de análise não linear geométrica concebidos pelos diversos autores. Na verdade, encontramos-a profusamente divulgada em trabalhos dos mais diversos [8,9,10,30,40,46], estando na sua origem um protótipo experimental levado a efeito por F.W.Williams (1964).

Consiste num sistema de duas barras encastradas nos apoios e unidas por um vértice de

pequena flecha no qual é aplicada uma carga crescente. Dada a sua configuração, ocorre com facilidade um fenómeno de instabilidade por inversão de equilíbrio (snap-through), o que torna este conjunto bastante exigente na aferição de modelos não lineares.

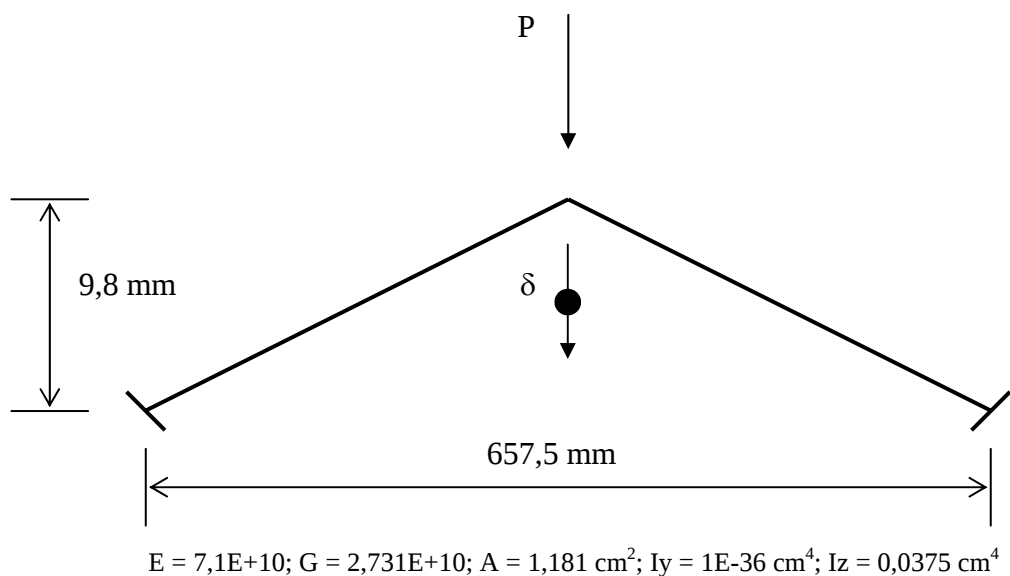


Figura 5.1: Williams toggle frame: geometria e solicitação.

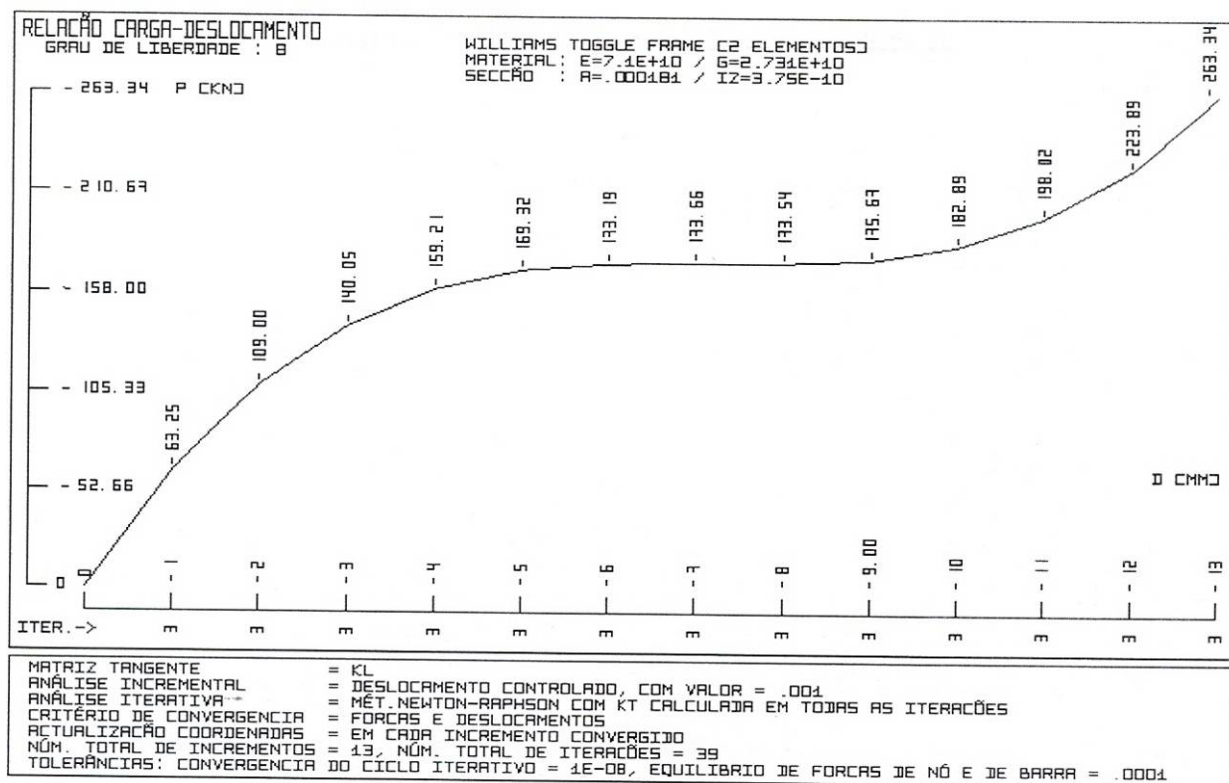


Figura 5.2: Williams toggle frame: $P-\delta \rightarrow$ com matriz linear.

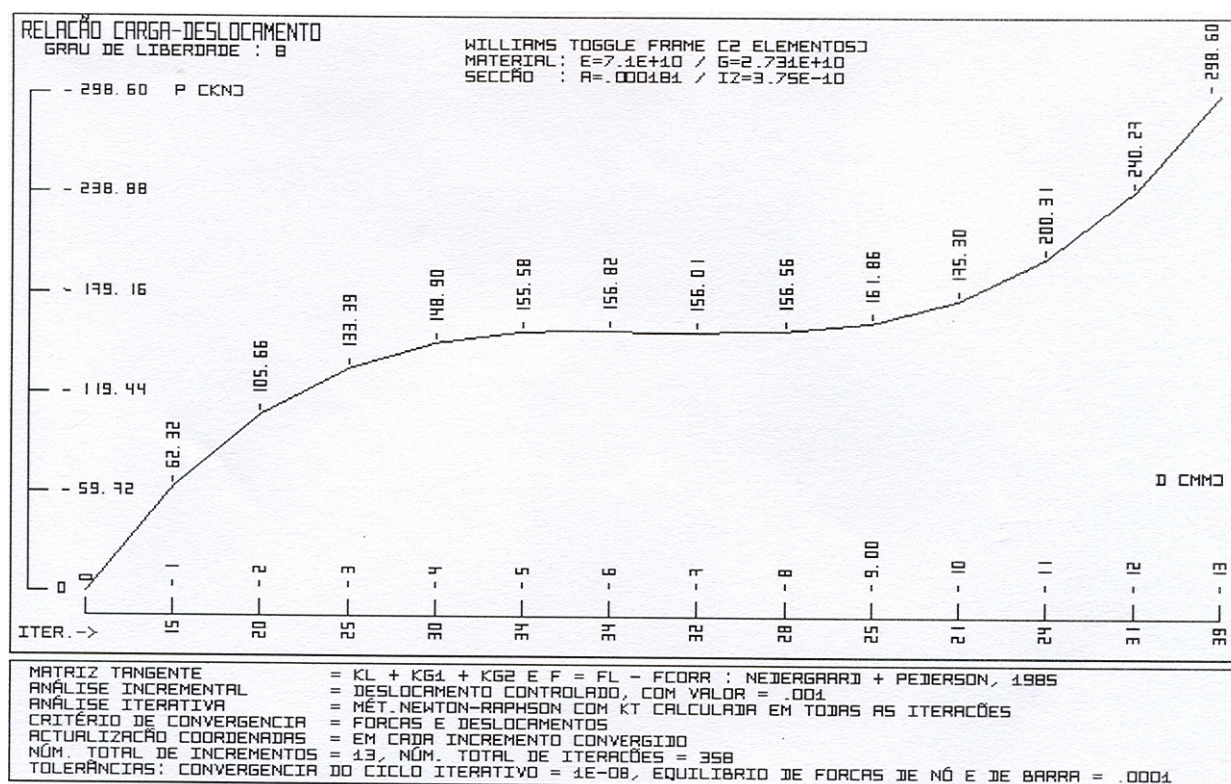


Figura 5.3: Williams toggle frame: $P-\delta \rightarrow$ matriz não linear e sem movimentos de corpo rígido.

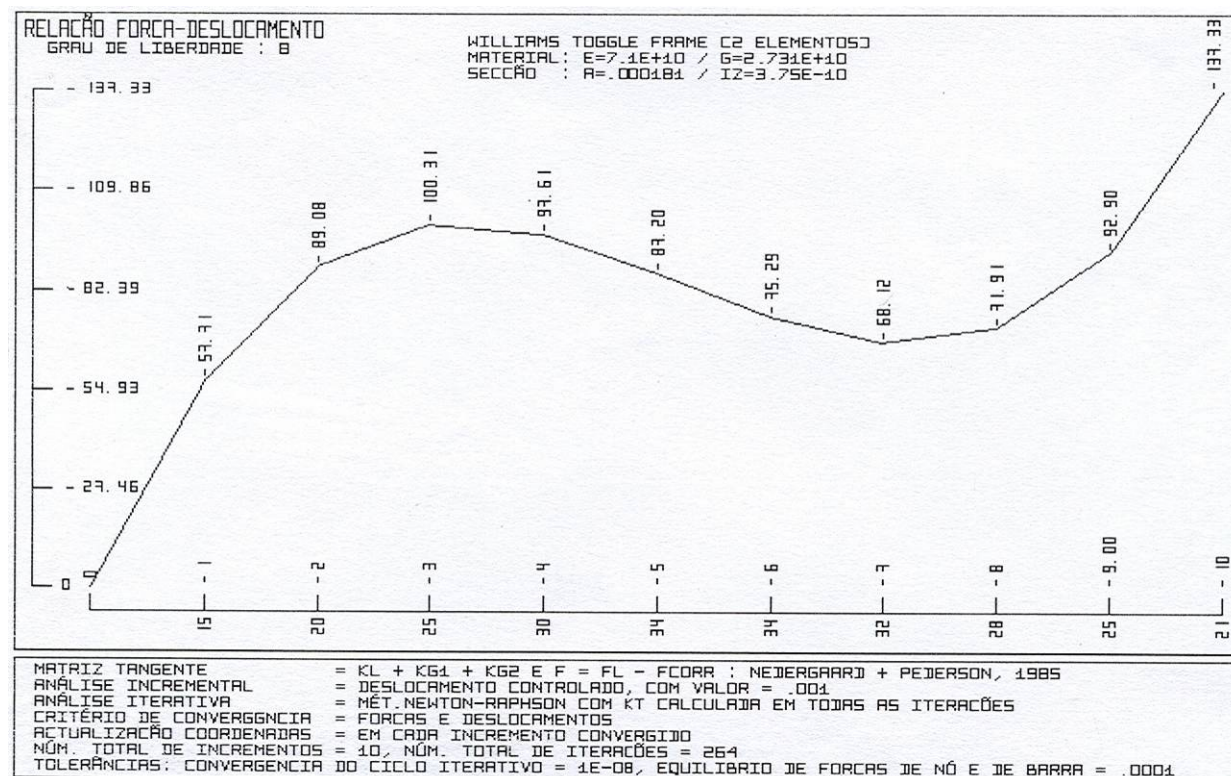


Figura 5.4: Williams toggle frame: $P-\delta \rightarrow$ matriz não linear e com movimentos de corpo rígido.

Como se poderá verificar por comparação directa, os resultados obtidos estão em perfeita sintonia com os das referências bibliográficas (muito embora exista aqui o óbice de não se conhecer a inércia segundo o eixo da secção que não figura numa análise plana, de onde sai este exemplo).

Considera-se, pelas razões apontadas e pelas figuras incluídas, que fica provado:

1. O programa estar em conformidade com a teoria que materializa;
2. A necessidade de subtrair os movimentos de corpo rígido aos deslocamentos totais (leia-se deste 2.6.2 e 2.6.3 trabalho). Conforme se poderá ver na figura 5.4, estes movimentos são erradamente contabilizados como bons pela matriz geométrica que, na sua função redutora, retira rigidez global ao sistema. Deste modo, provoca a entrada precoce da estrutura em instabilidade por inversão de equilíbrio, sendo ainda a trajectória $P-\delta$ muito mais acentuada do que seria expectável.
3. Que a ultrapassagem de pontos-limite está muito mais associada à actualização de geometria do que ao valor da formulação matricial não linear, pois, com o simples uso da matriz linear conseguiram-se resultados muito próximos dos verdadeiros, sendo tal completamente impossível com a melhor matriz tangente, mas sem actualização de coordenadas e um método baseado no controlo de deslocamentos ou energia (o que confirma a asserção que se tinha arriscado na página 63: *«é preferível dispor de um “sofável” ciclo incremental e iterativo associado com o mais simples conjunto que se possa realizar entre a matriz linear e a matriz geométrica, do que trabalharmos com uma completíssima e soberba matriz tangente inserida num método directo.»*)

Dentro deste caso, incluem-se, apenas a título ilustrativo, os três primeiros modos de encurvadura do seu estudo de instabilidade elástica para uma divisão da estrutura em 10 elementos, nos quais se notam configurações coerentes com o que seria empiricamente previsível.

Realce-se, ainda, que ao valor do coeficiente de carga crítica encontrado ($\cong 2,1$)⁹⁷ não se poderá atribuir muita valia, já que foi encontrado na posição final deformada da estrutura, ou seja, é uma análise realizada no pós-instabilidade (tem aqui particular relevância e interesse a introdução da curva de cargas críticas).

⁹⁷ Pelo que, teoricamente, teria-se que multiplicar a solicitação 2,1 vezes para se atingir a carga de colapso



Figura 5.5: Williams toggle frame: 1º modo de instabilidade.

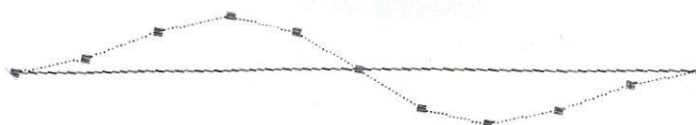


Figura 5.6: Williams toggle frame: 2º modo de instabilidade.



Figura 5.7: Williams toggle frame: 3º modo de instabilidade.

No sentido de oferecer alguma percepção do andamento, para este caso, de vários tipos de procedimentos incrementais, vão-se ilustrar alguns desses métodos não repetindo aquele que já foi utilizado nos exemplos comentados antecedentes.

Pelos valores obtidos nas várias formulações e que se vão observar, fica a ideia que variações sensíveis podem registrar-se, muito embora num intervalo razoavelmente circunscrito.

Por outro lado, a divisão das barras num número superior de elementos conduz a melhores e mais constantes resultados entre as formulações, o que seria de esperar.

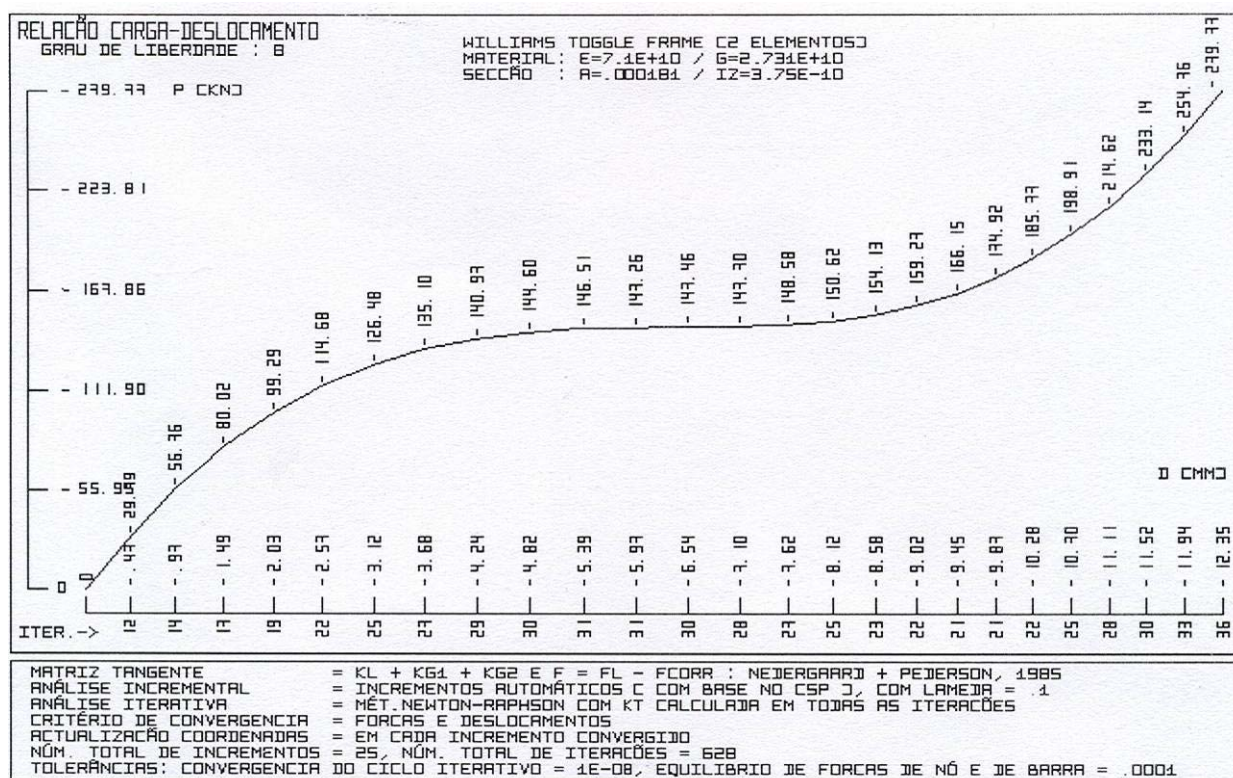


Figura 5.8: Williams toggle frame (2 elementos): P- δ $\rightarrow$ CSP.

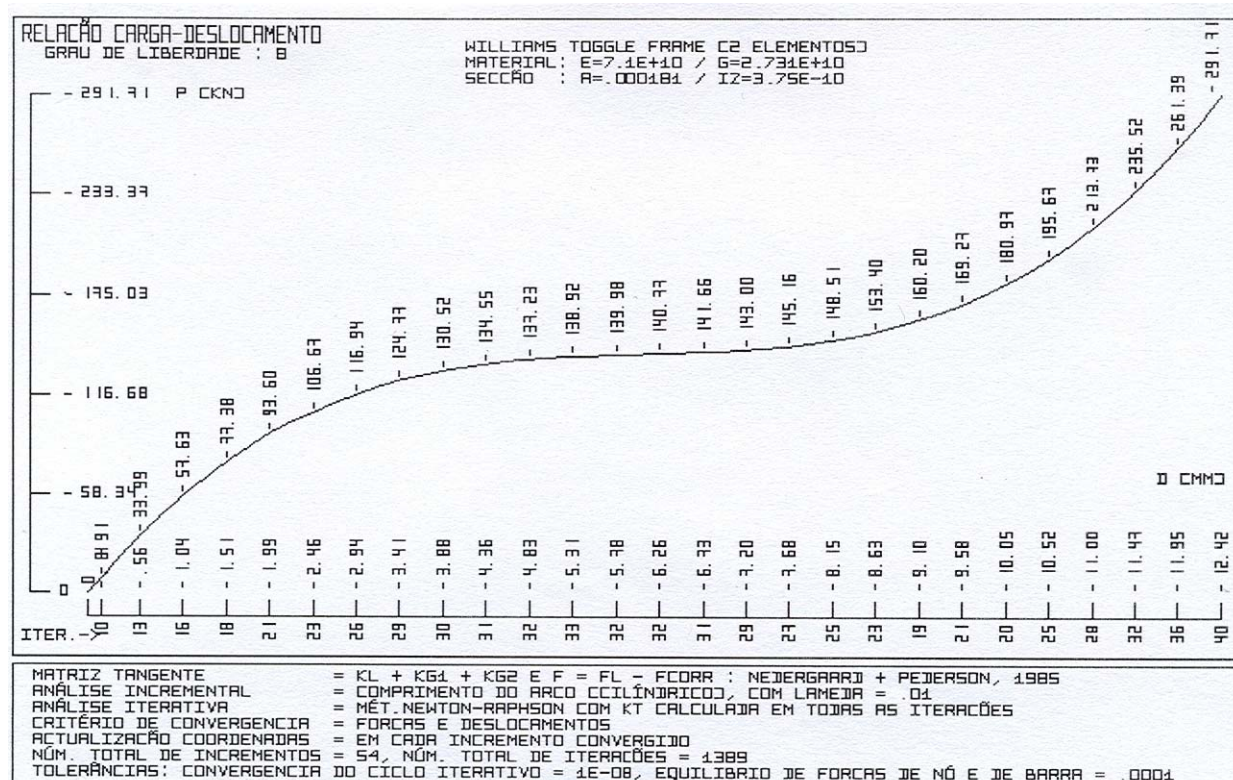


Figura 5.9: Williams toggle frame (2 elementos): P- δ $\rightarrow$ comprimento do arco.

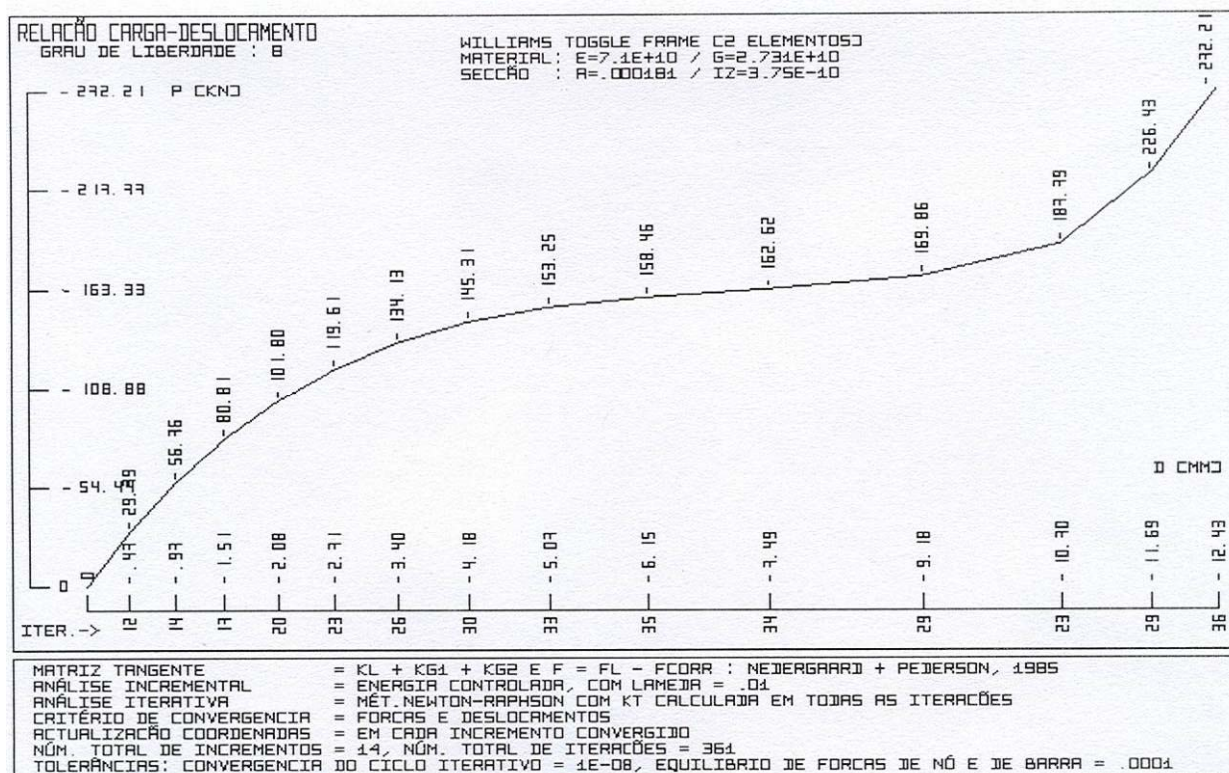


Figura 5.10: Williams toggle frame (2 elementos): P-δ → controlo de energia.

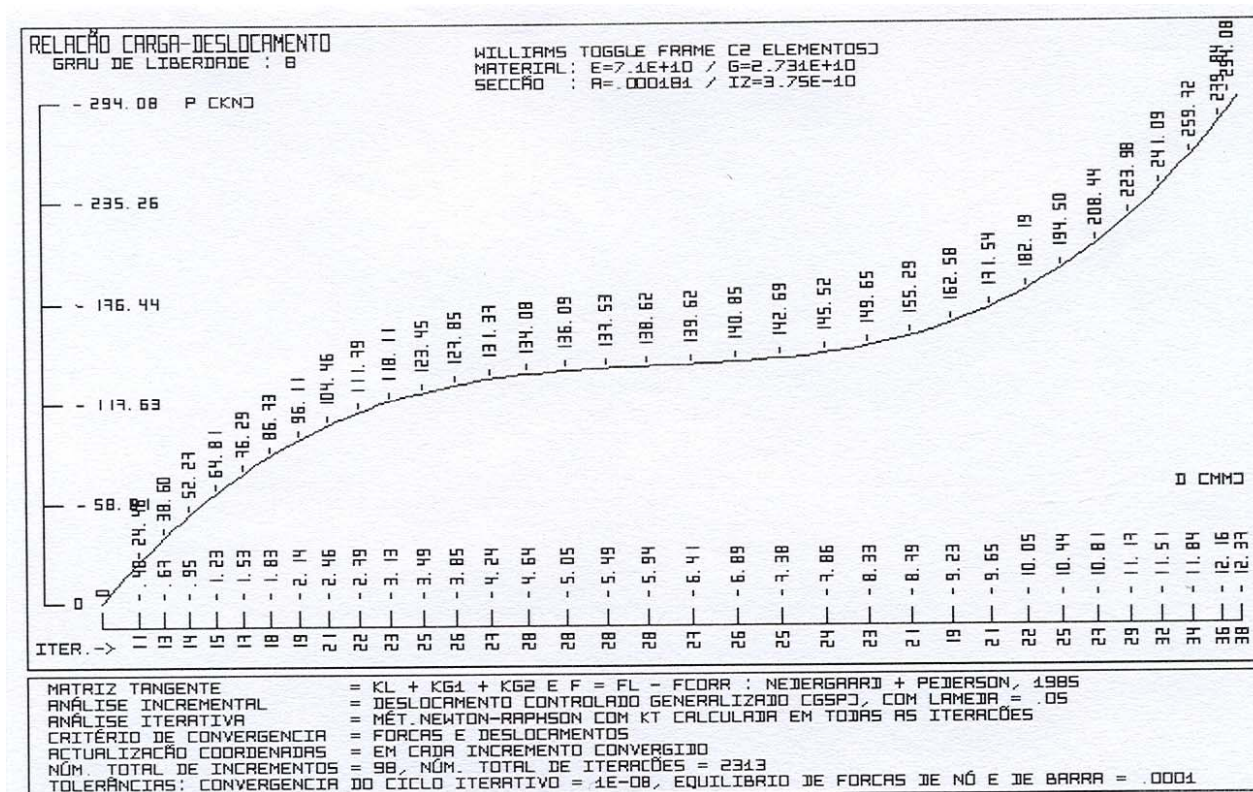


Figura 5.11: Williams toggle frame (2 elementos): P-δ → GSP.

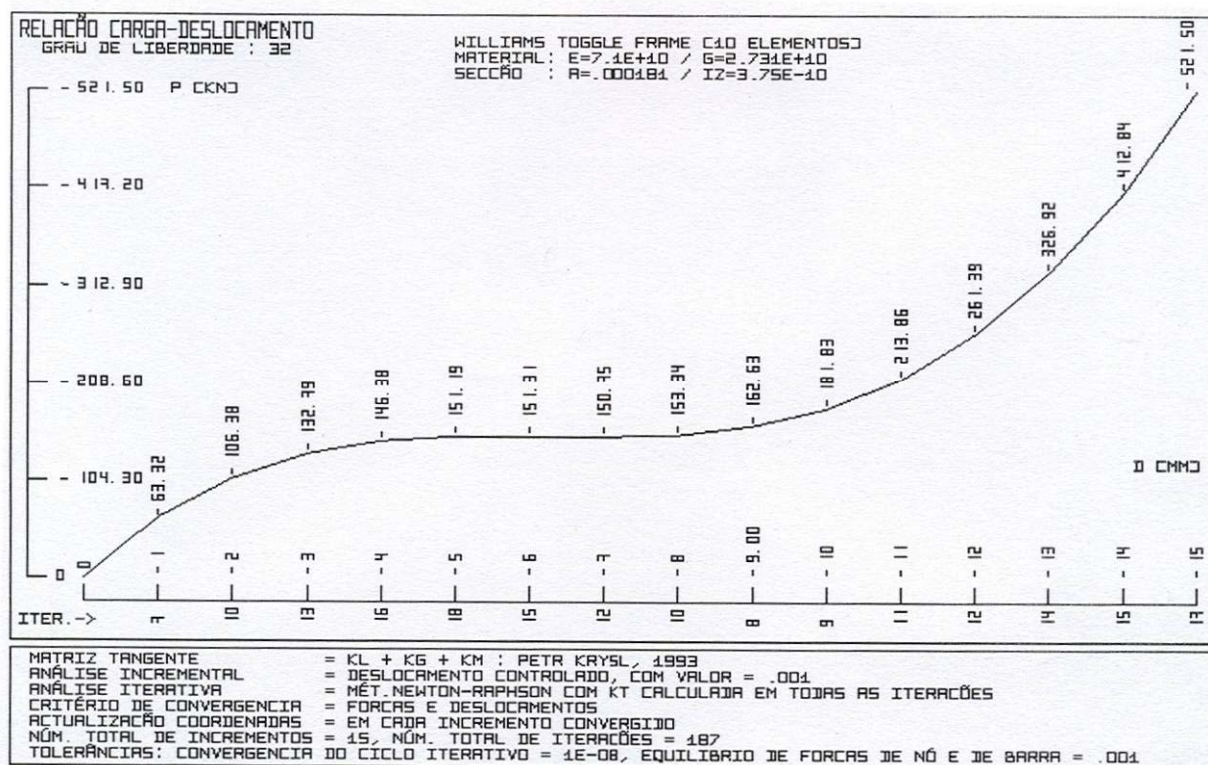


Figura 5.12: Williams toggle frame (10 elementos): P- δ (Petr Krysl).

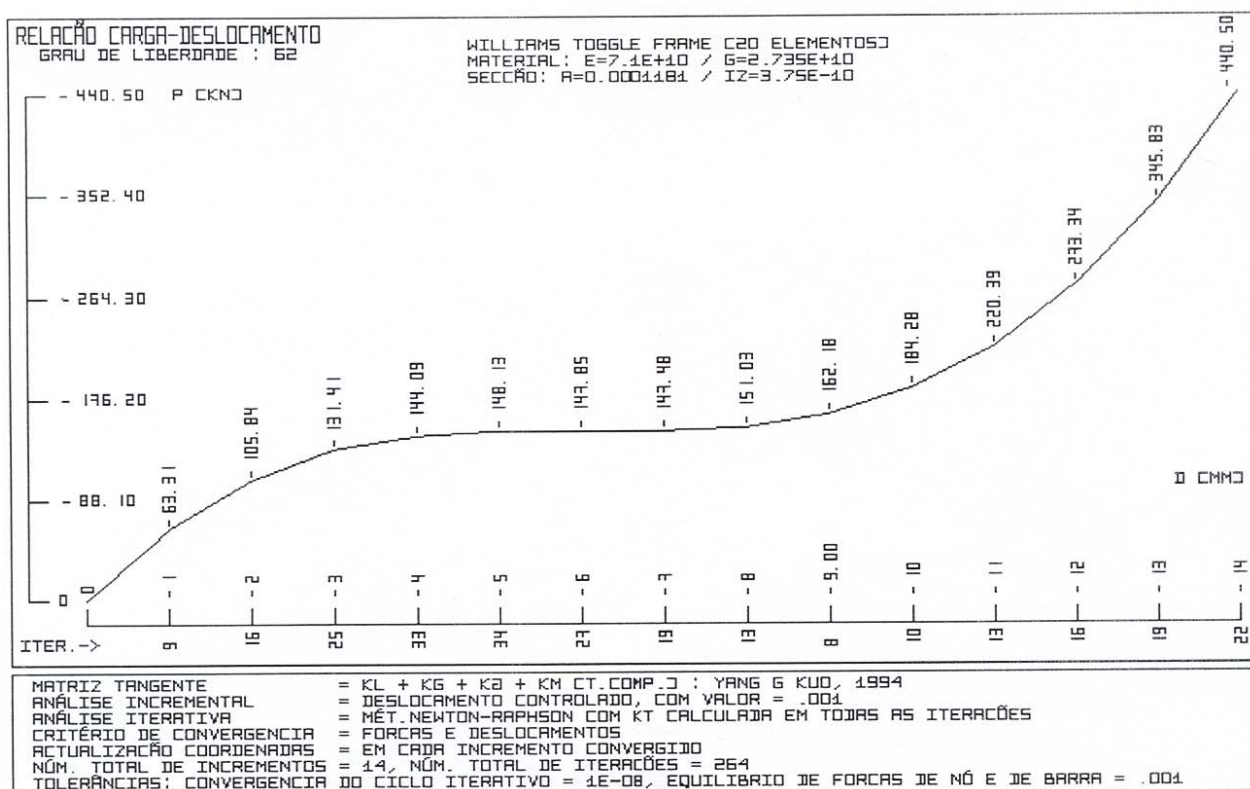


Figura 5.13: Williams toggle frame (20 elementos) : P- δ (Yang & Kuo).

5.4. Pórtico Plano

Outro modelo que se inclui com vista à validação do programa, aqui quanto ao cálculo de cargas críticas e modos de instabilidade associados, foi retirado de [1,2] e trata-se de um pórtico plano assimétrico sujeito apenas a cargas verticais também assimétricas.

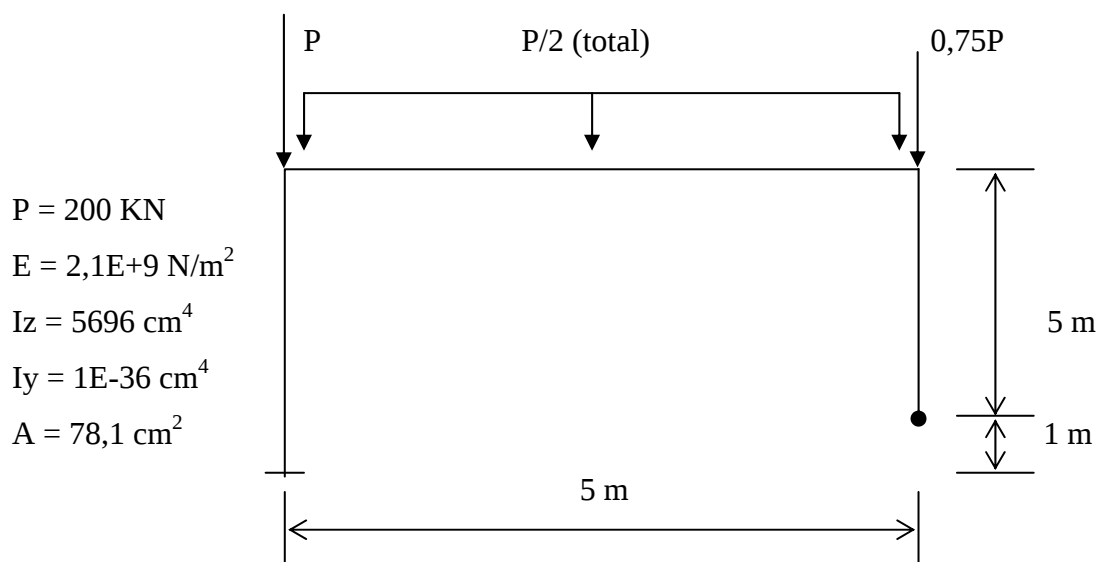


Figura 5.14: Pórtico plano: geometria e solicitação.

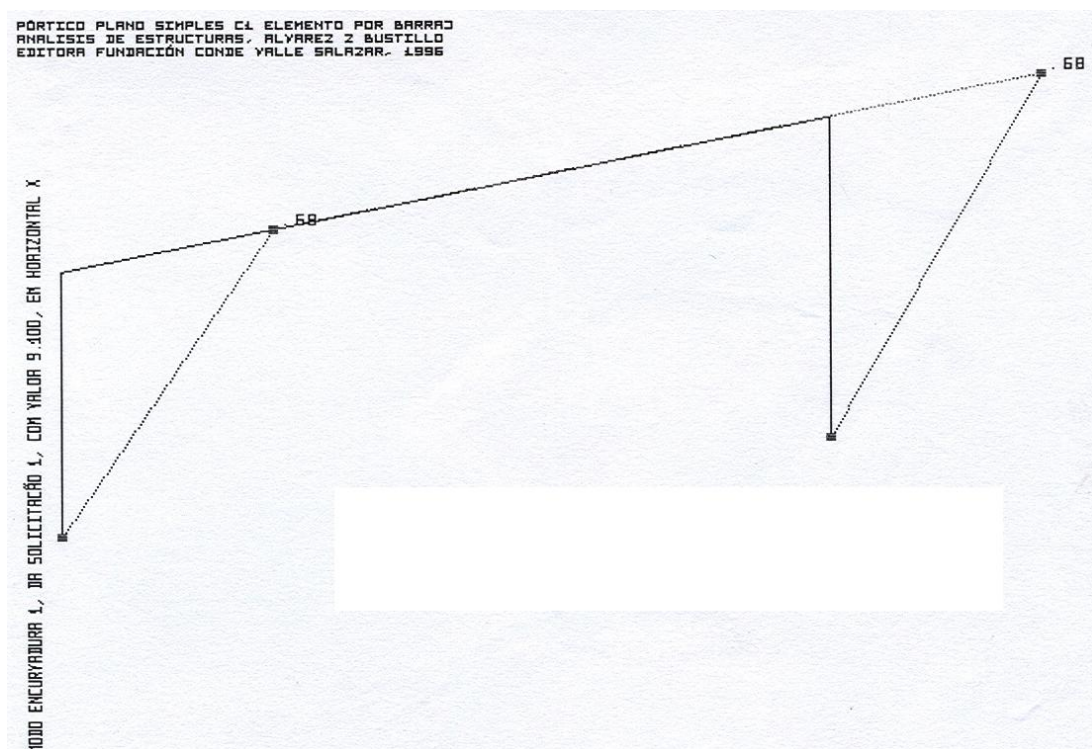


Figura 5.15: Pórtico plano: 1º modo de instabilidade para 3 elementos.

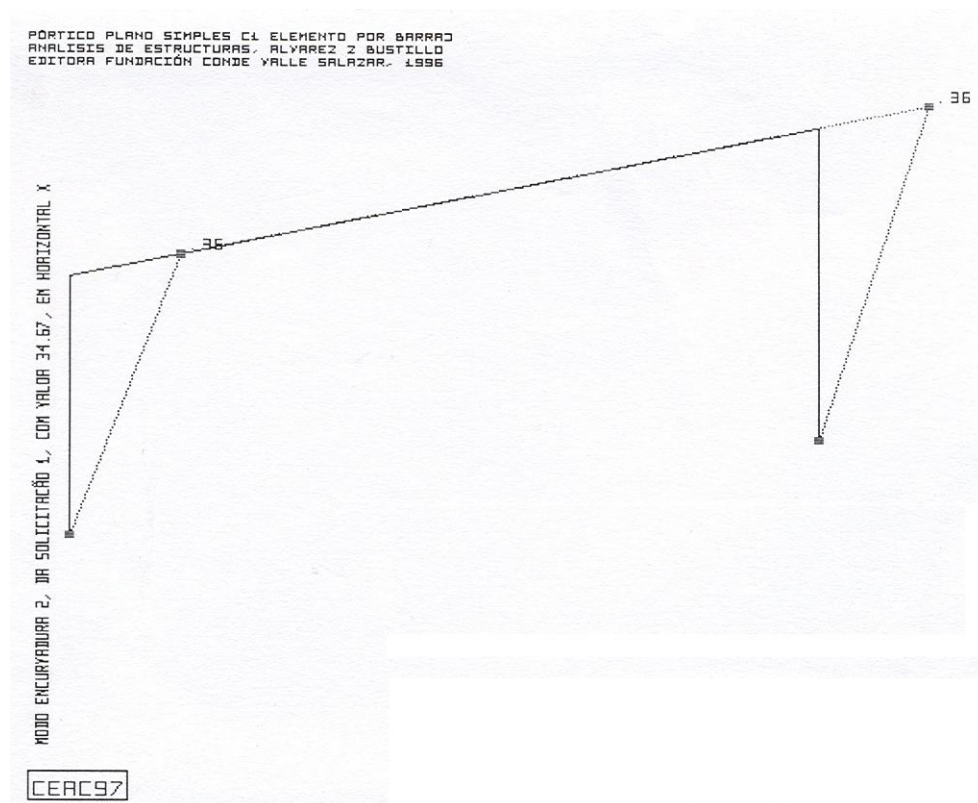


Figura 5.16: Pórtico plano: 2º modo de instabilidade para 3 elementos.

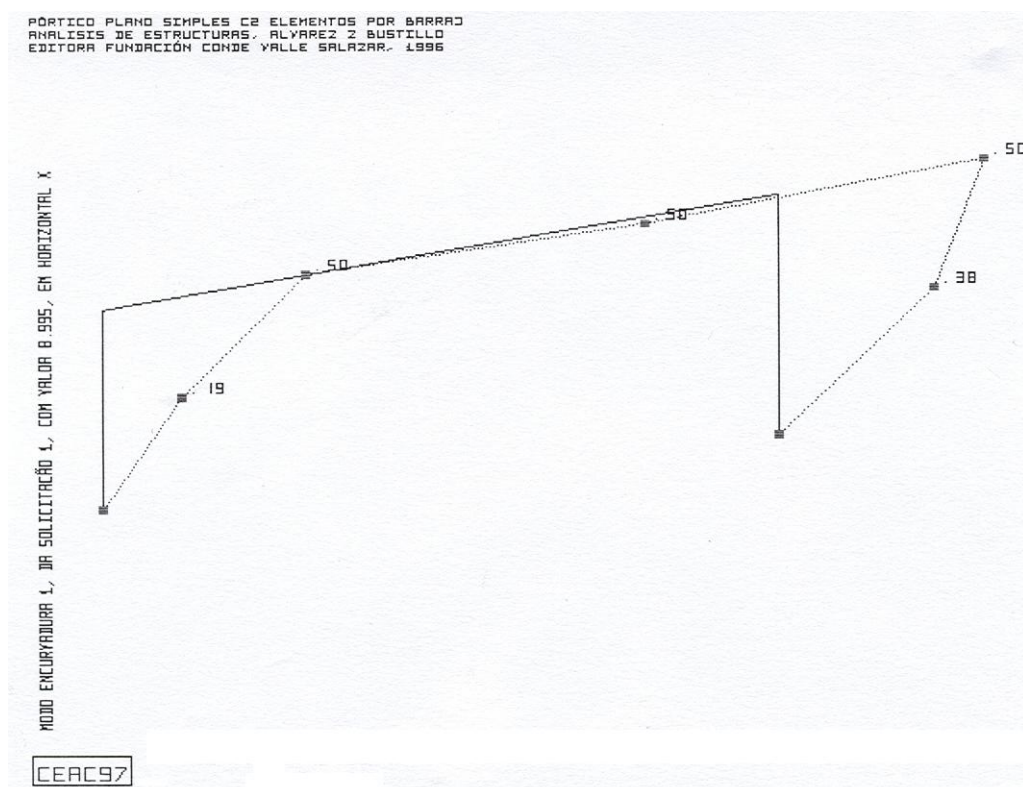


Figura 5.17: Pórtico plano: 1º modo de instabilidade para 6 elementos.

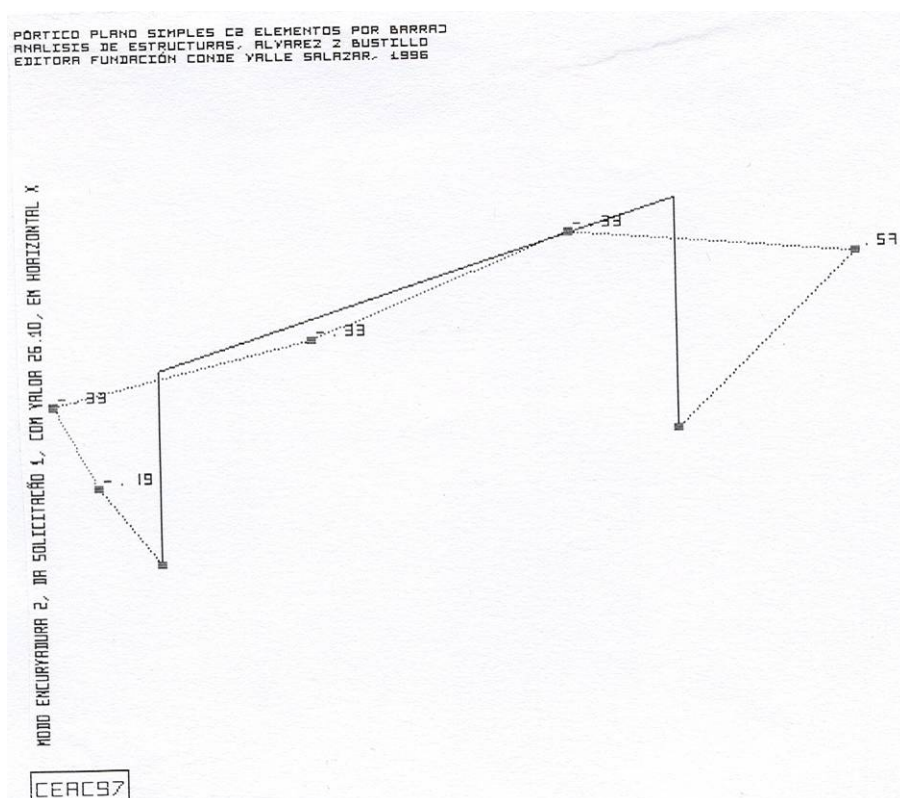


Figura 5.18: Pórtico plano: 2º modo de instabilidade para 6 elementos.

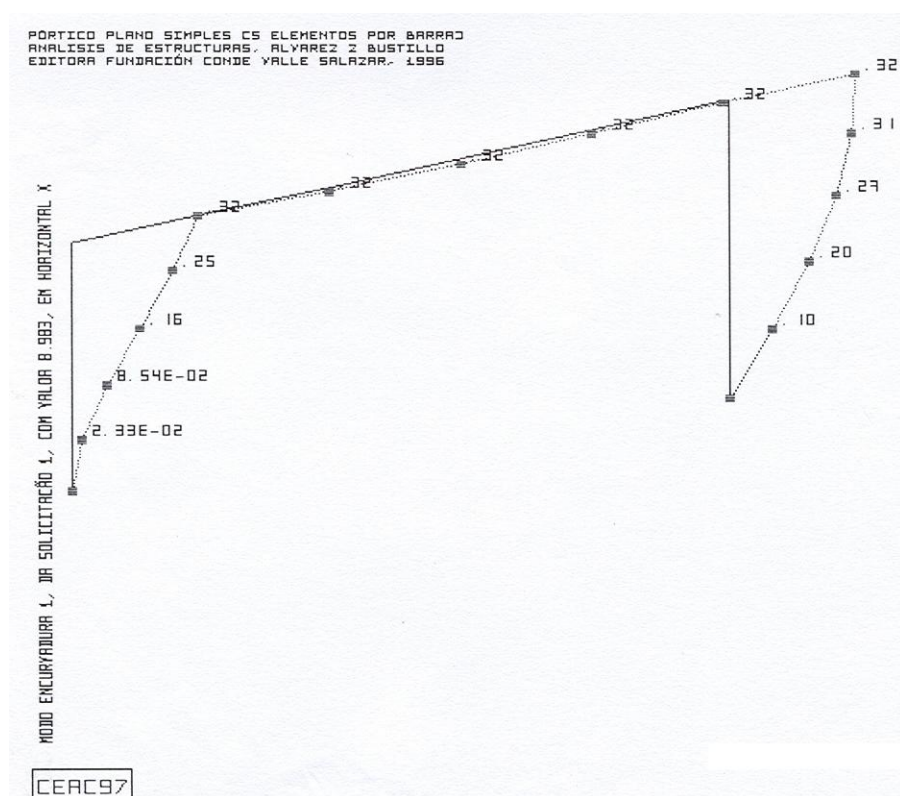


Figura 5.19: Pórtico plano: 1º modo de instabilidade para 15 elementos.

Mais uma vez os resultados obtidos estão em concordância absoluta com o exemplo original, autenticando a adequação do programa com a teoria que o sustenta.

Esclareça-se que à excepção da figura 5.21 (conforme é nesta indicado) a estrutura está restringida a deformar-se no plano que a contém, existindo em todos os nós apoios fictícios que a obrigam a tal. Por outro lado a rótula que possui o apoio esquerdo, só tem movimento livre em torno do eixo perpendicular ao plano da estrutura, daí a configuração de encurvadura que esta assume quando é permitido que o sistema se movimente para fora do seu plano.

Complementarmente, e embora aqui não se apresente, o facto de se introduzirem forças horizontais expressivas não provocou alterações proporcionais, tanto nos coeficientes de carga crítica como nas configurações de instabilidade.

Quanto às ilações que parece poderem extrair-se, refira-se:

1. Confirmação, pois, da legitimidade do programa;
2. O superior desempenho de uma análise espacial em detrimento da plana. Sem que a estrutura esteja limitada a deformar-se no plano que a inclui, a carga crítica cai para cerca de metade (de 9,1 para 4,45) do seu valor com restrições aos deslocamentos a três dimensões;
3. Uma melhor definição dos modos de encurvadura quando o modelo é mais refinado, embora, neste caso, para o 1º modo ou fundamental de encurvadura global este não sofra alterações significativas (pequenas reduções com o aumento do número de elementos);
4. A insensibilidade relativa destas formulações às acções horizontais.

5.5. Pórtico Espacial 1

Vejamos novamente o exemplo arbitrado introduzido em 4.9 e no qual se procura, de uma forma qualitativa, ilustrar as diferenças nítidas que podem surgir entre uma análise linear e não linear geométrica.

Ressalve-se que, muito embora, os valores das solicitações impostas são muito exagerados para o que esta estrutura alguma vez poderia suportar, contudo e como foi referido, trata-se de caricaturar uma situação académica sem preocupações de escala.

Dois tipos de solicitações foram seleccionados: um em que a aplicação de forças directas e verticais nos nós da periferia eram acompanhadas por acções horizontais, outro em que apenas cargas verticais uniformemente distribuídas ao longo das barras horizontais eram aplicadas. Por simplicidade e dada a maior e natural diferença dos resultados encontrados, apenas se apresentam figuras correspondentes ao primeiro caso de solicitação.

Nas figuras que se seguem, tanto para deslocamentos como para esforços, as linhas mais interiores ou de menor valor absoluto correspondem aos resultados lineares e as exteriores ou de maior valor absoluto aos não lineares.

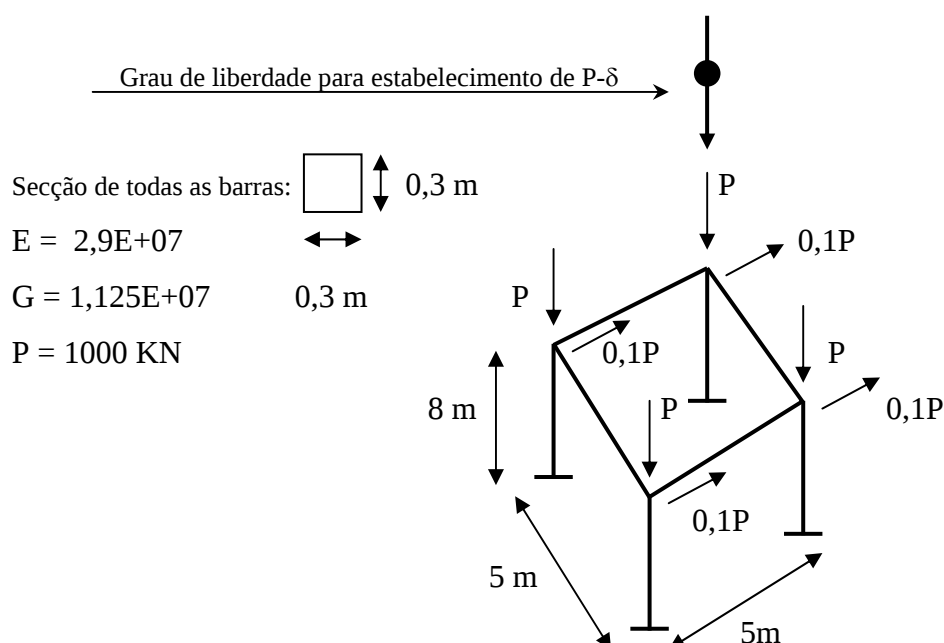


Figura 5.22: Pórtico espacial 1: geometria e solicitação mista vertical e horizontal.

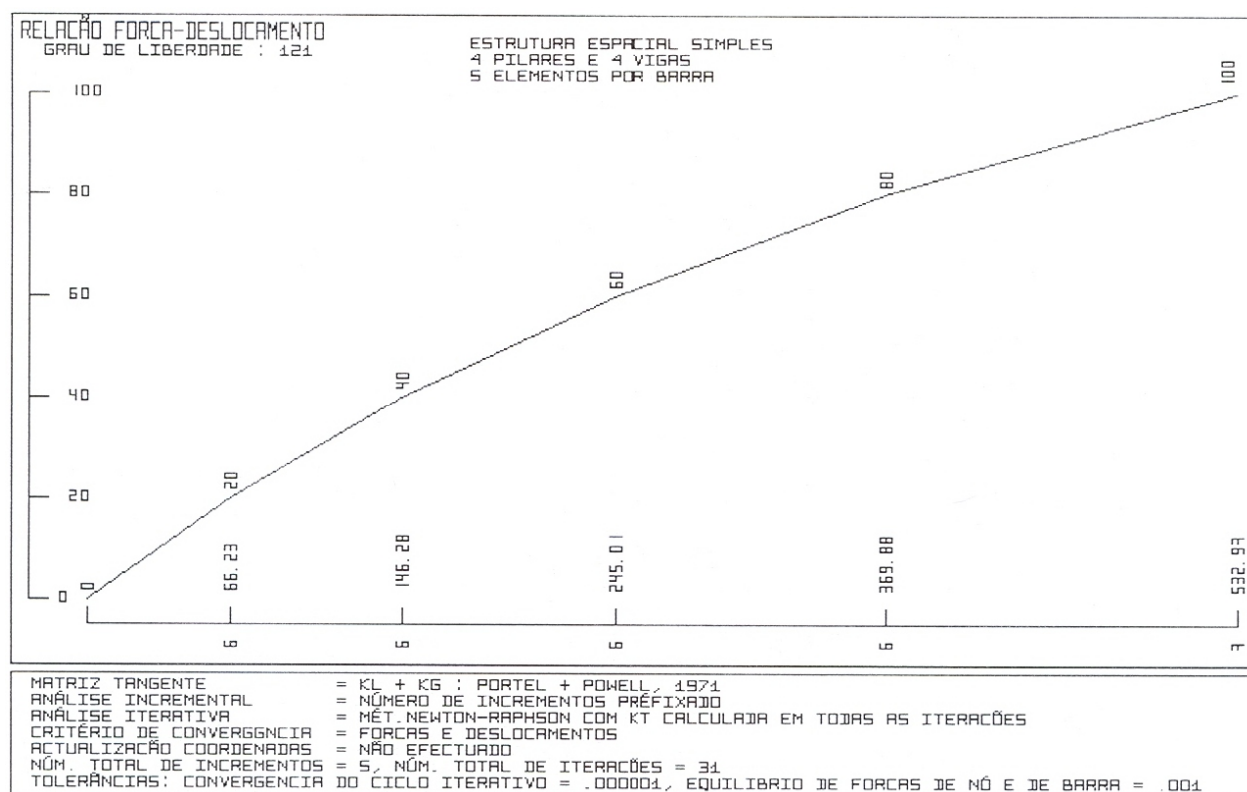


Figura 5.23: Pórtico espacial 1: P- δ para 5 elementos por barra sem actualização de geometria.

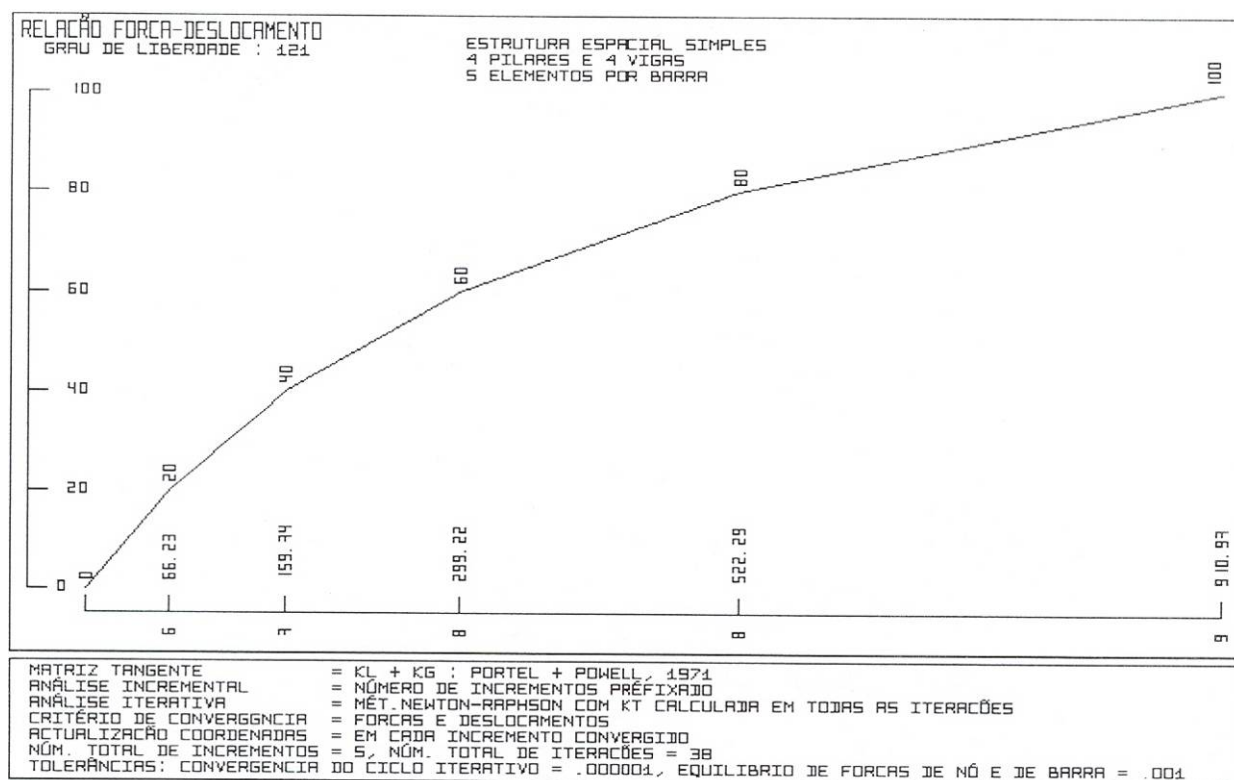
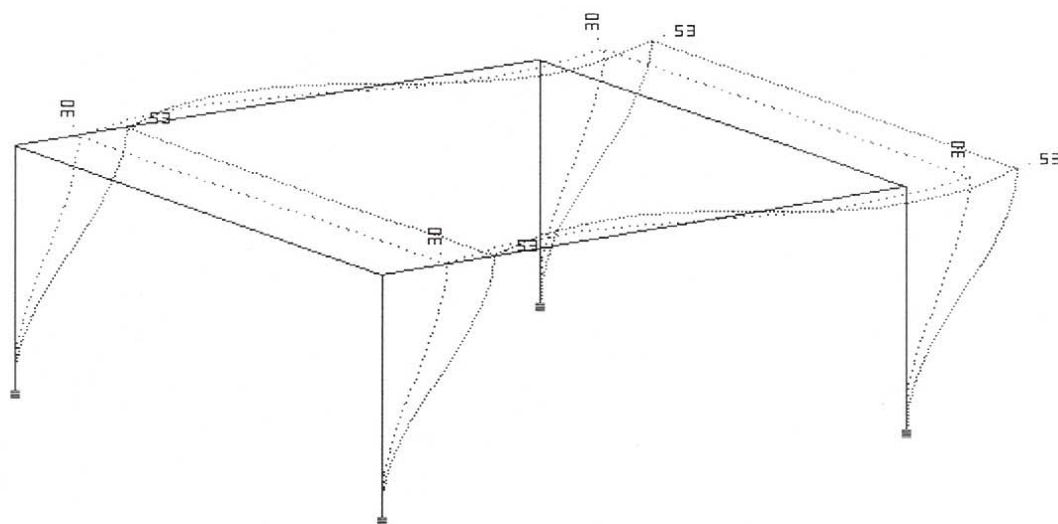


Figura 5.24: Pórtico espacial 1: P- δ para 5 elementos por barra com actualização de geometria.

ESTRUTURA ESPACIAL SIMPLES
4 PILARES E 4 VIGAS
1 ELEMENTO POR BARRA

DESLOCAMENTOS DE ACCÃO N.º 1

CEARC97



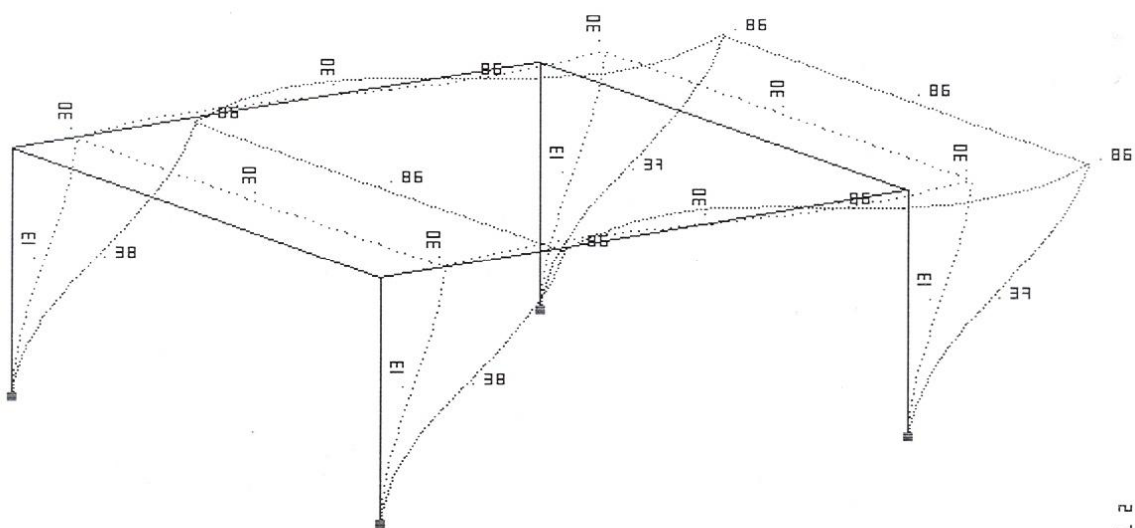
ÂNG: 35

Figura 5.25: Pórtico espacial 1: deformada linear e não linear sem actualização de geometria.

ESTRUTURA ESPACIAL SIMPLES
4 PILARES E 4 VIGAS
2 ELEMENTOS POR BARRA

DESLOCAMENTOS DE ACCÃO N.º 1

CEARC97



ÂNG: 35

Figura 5.26: Pórtico espacial 1: deformada linear e não linear com actualização de geometria.

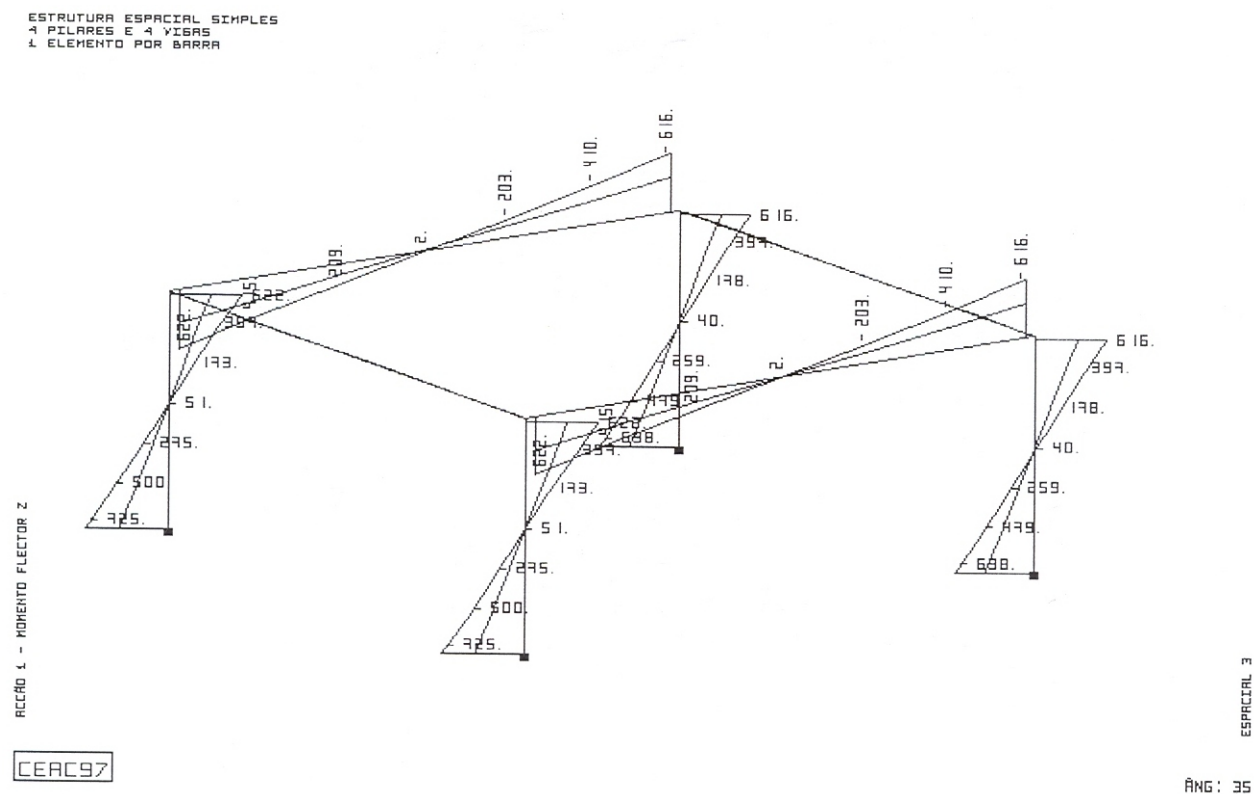


Figura 5.27: Pórtico espacial 1: momentos para 1 elemento por barra sem actualização de geometria.

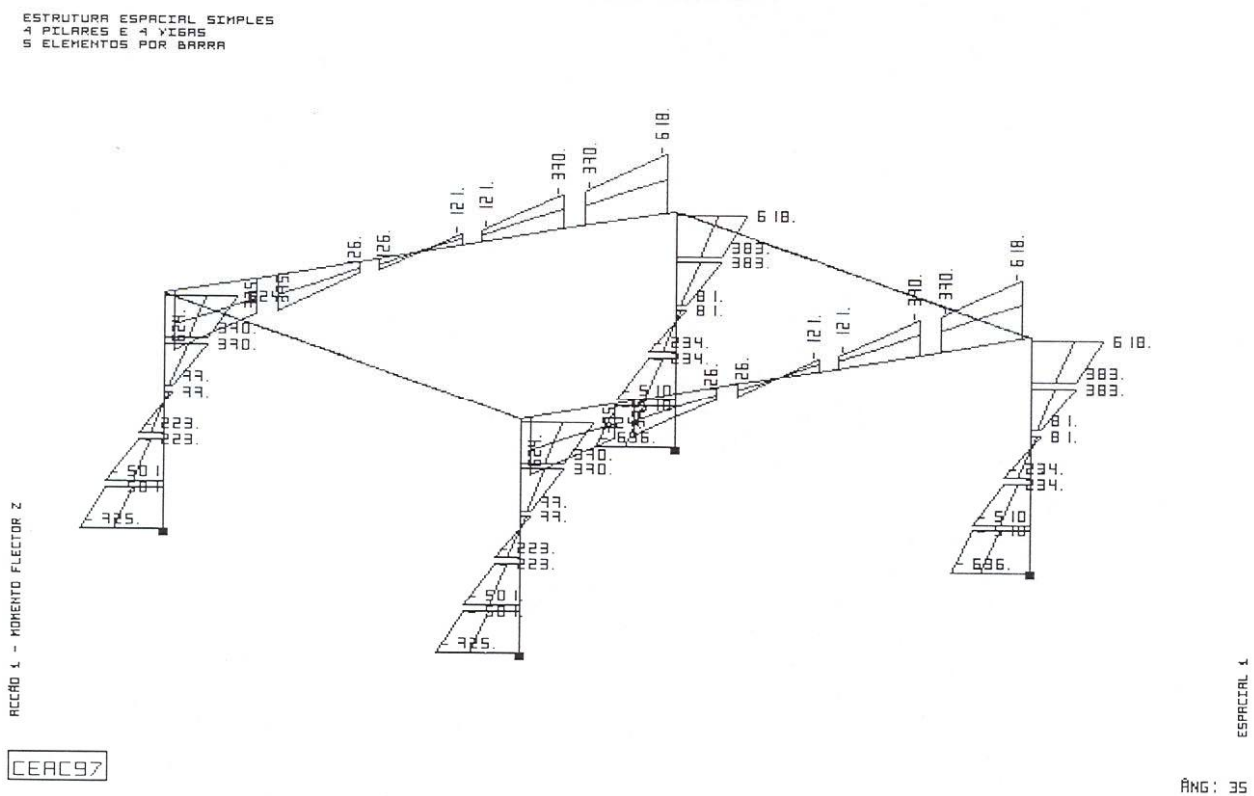


Figura 5.28: Pórtico espacial 1: momentos para 5 elementos por barra sem actualização de geometria.

ESTRUTURA ESPACIAL SIMPLES
4 PILARES E 4 VIGAS
1 ELEMENTO POR BARRA

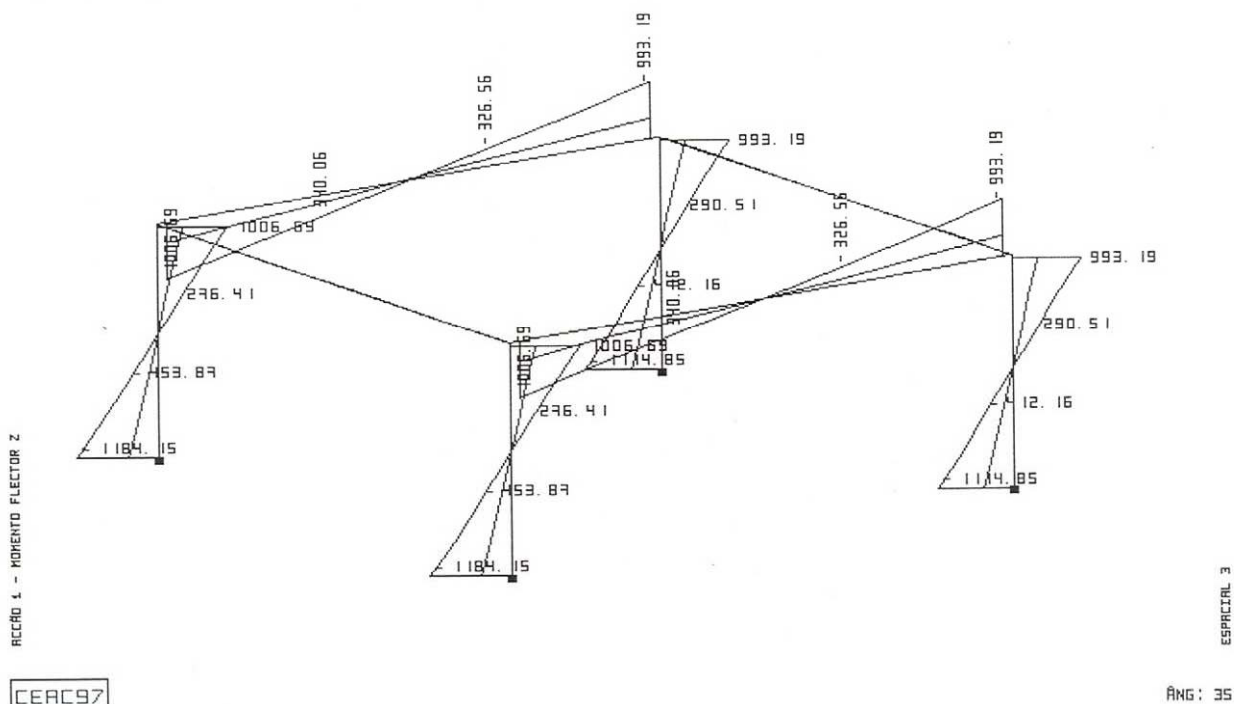


Figura 5.29: Pórtico espacial 1: momentos para 1 elemento por barra com actualização de geometria.

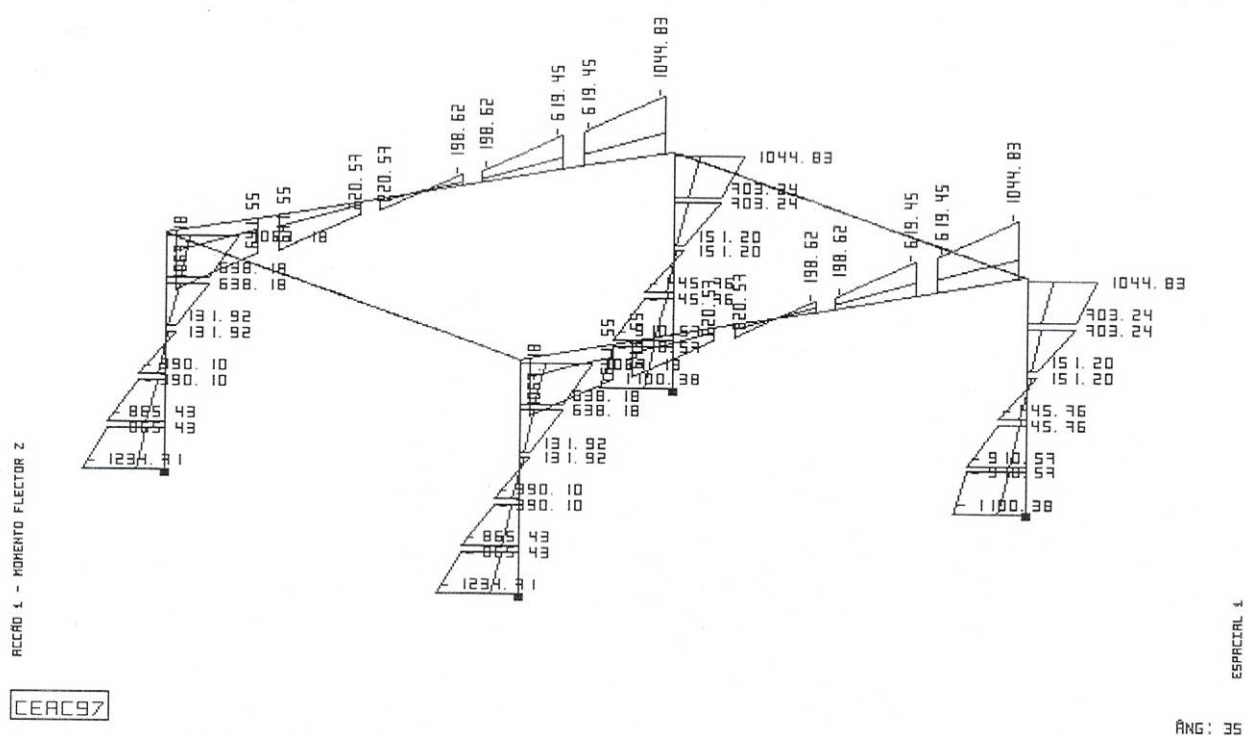
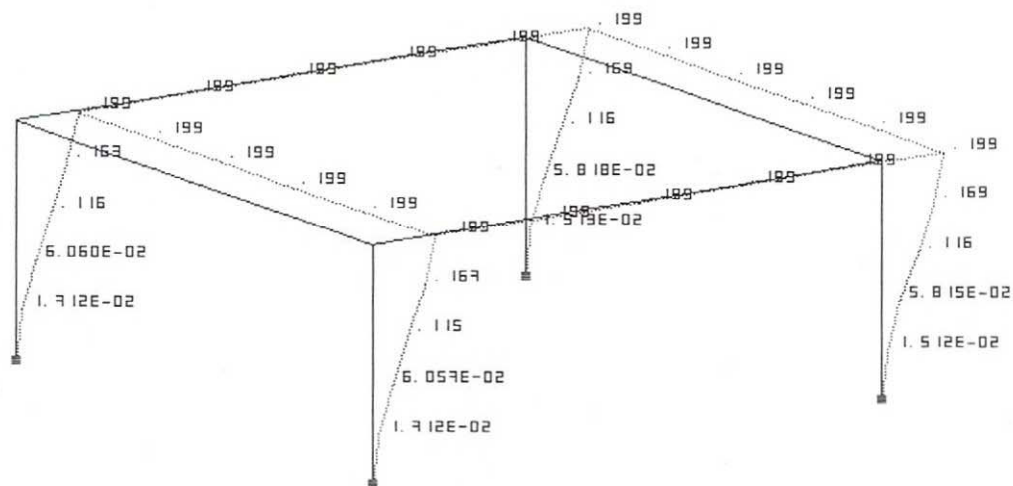


Figura 5.30: Pórtico espacial 1: momentos para 5 elementos por barra com actualização de geometria.

ESTRUTURA ESPACIAL SIMPLES
4 PILARES E 4 VIGAS
5 ELEMENTOS POR BARRA

MOD0 ENCURVADURA 2, DA SOLICITAÇÃO 1, COM VALOR 2.322, EM HORIZONTAL X

CEAC97



ESPAÇIAL 1

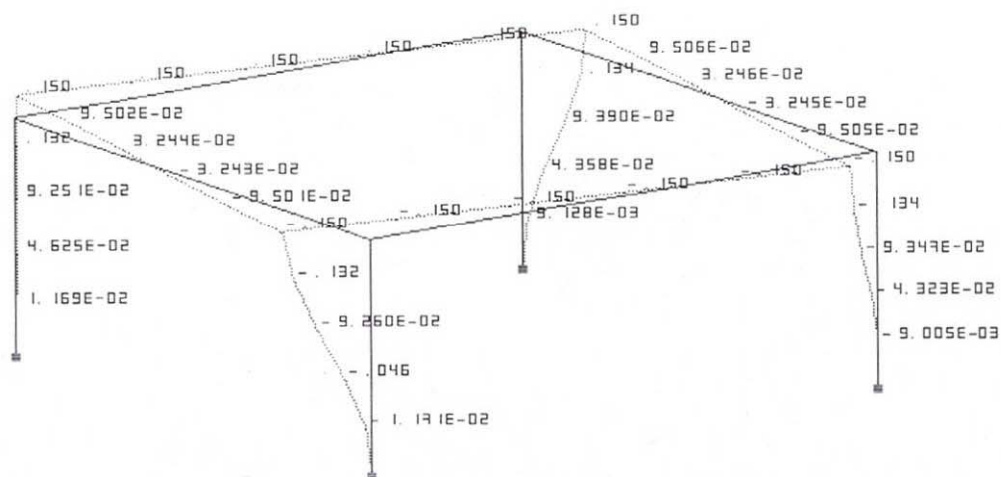
ÂNG: 35

Figura 5.31: Pórtico espacial 1: modo de encurvadura 2 para 5 elementos.

ESTRUTURA ESPACIAL SIMPLES
4 PILARES E 4 VIGAS
5 ELEMENTOS POR BARRA

MOD0 ENCURVADURA 3, DA SOLICITAÇÃO 1, COM VALOR 5.149, EM HORIZONTAL X

CEAC97



ESPAÇIAL 1

ÂNG: 35

Figura 5.32: Pórtico espacial 1: modo de encurvadura 3 para 5 elementos.

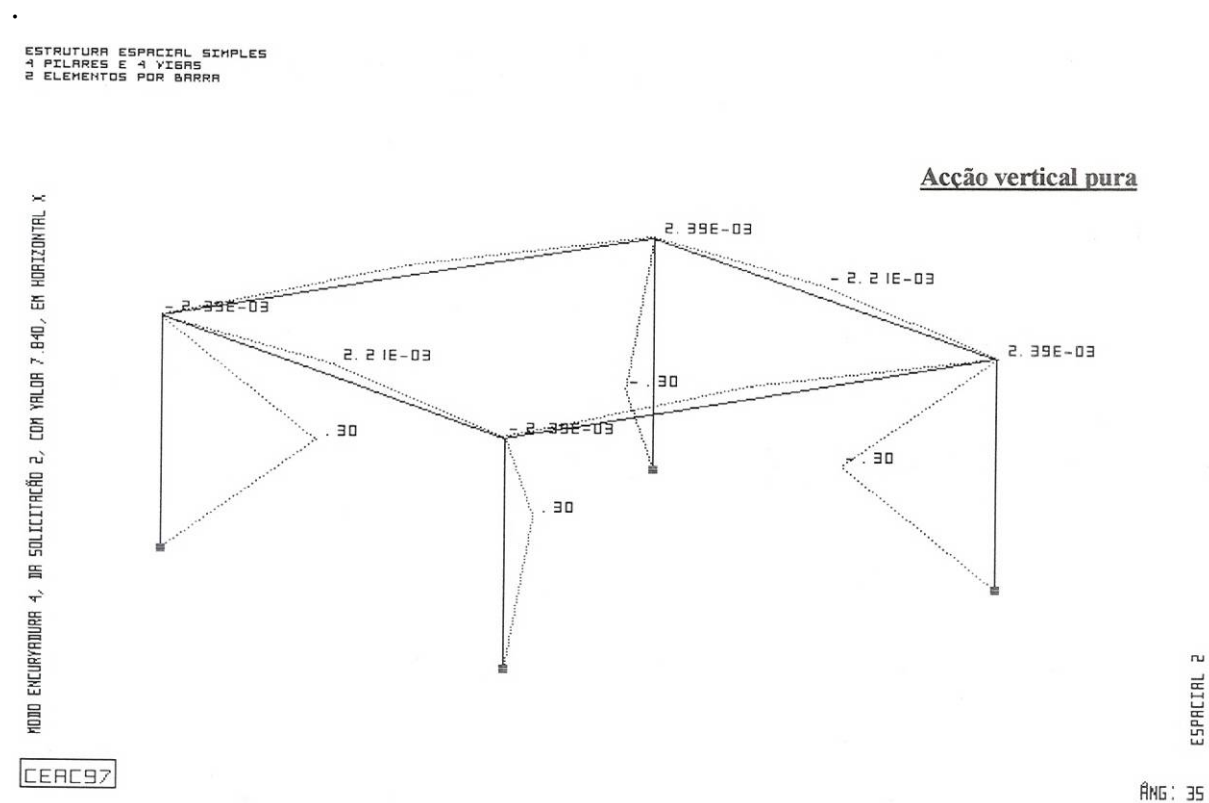


Figura 5.33: Pórtico espacial 1: modo de encurvadura 4 para 2 elementos (acção vertical pura).

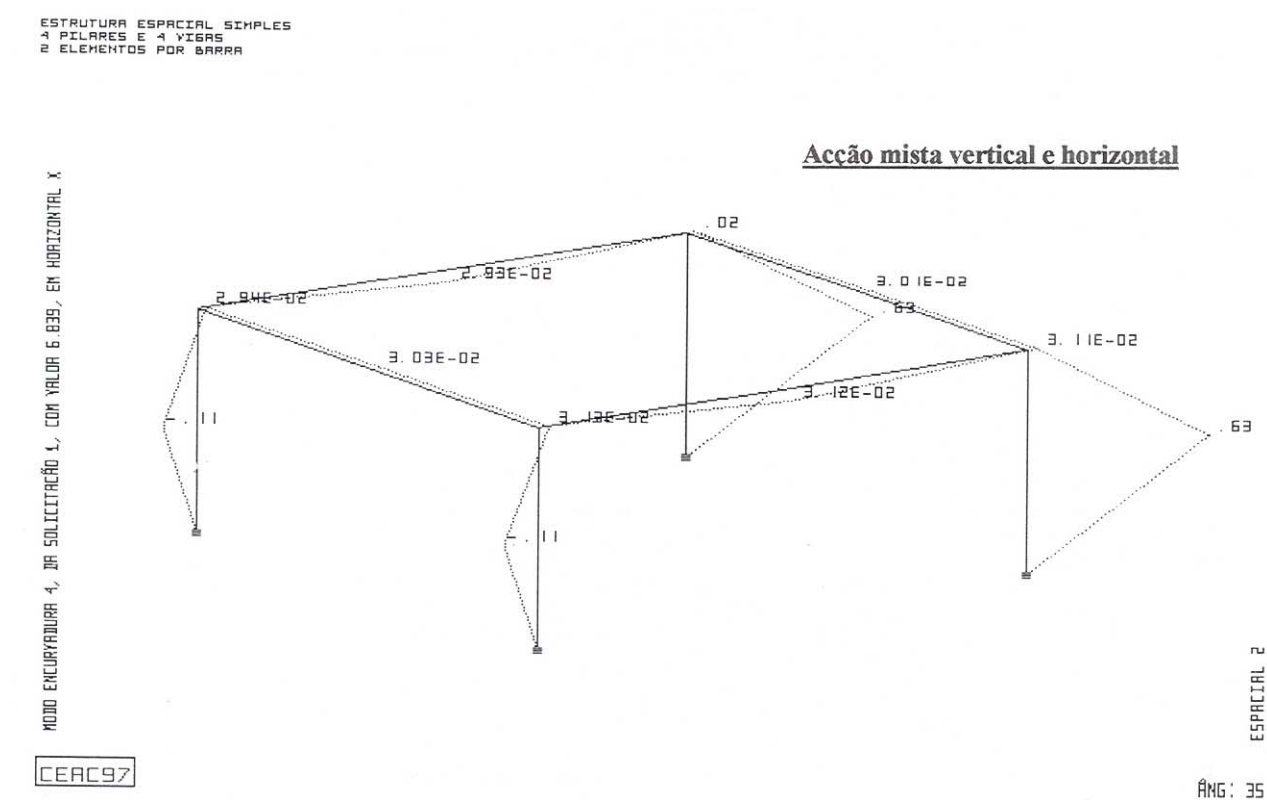
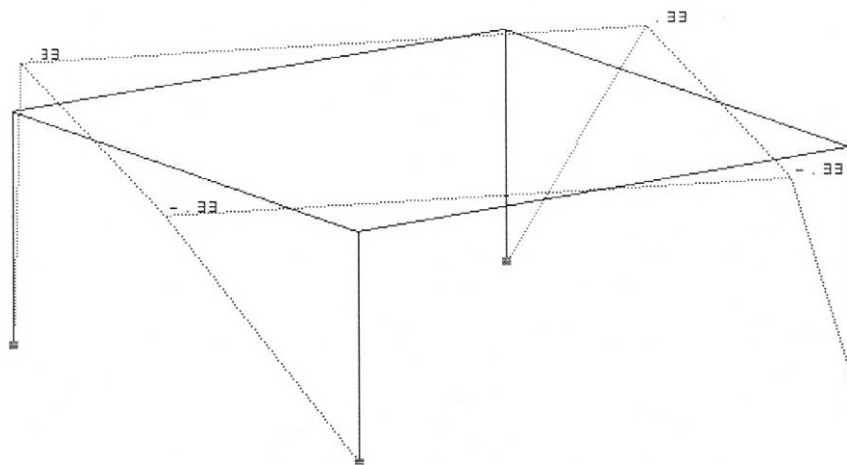


Figura 5.34: Pórtico espacial 1: modo de encurvadura 4 para 2 elementos (acção mista).

ESTRUTURA ESPACIAL SIMPLES
4 PILARES E 4 VIGAS
1 ELEMENTO POR BARRA

MOD0 ENCURVADURA 3, DA SOLICITAÇÃO 1, COM VALOR 6.339, EM HORIZONTAL X

CERC97



ESPACIAL 3

ÂNG: 35

Figura 5.35: Pórtico espacial 1: modo de encurvadura 3 com 1 elemento.

QUADRO 5.1

Estudo da instabilidade de pórtico espacial 1						
	Sem actualização de geometria			Com actualização de geometria		
Modo	1 elemento	2 elementos	5 elementos	1 elemento	2 elementos	5 elementos
1	2,274 (L)	2,259 (L)	2,250 (L)	2,213 (L)	2,200 (L)	2,189 (L)
2	2,319 (L)	2,308 (L)	2,298 (L)	2,389 (L)	2,356 (L)	2,322 (L)
3	6,612 (T)	6,253 (T)	6,148 (T)	6,339 (T)	6,127 (P)	5.993 (P)
4	11,62 (L)	7,840 (P)	6,717 (P)	10,21 (L)	6,839 (P)	6,880 (P)

Encurvadura por: (L) – deslocamentos linear, (T) – torção global, (P) – local nos pilares.

QUADRO 5.2

Estudo dos esforços no pórtico espacial 1						
Momento	Sem actualização de geometria			Com actualização de geometria		
M_z	1 elemento	2 elementos	5 elementos	1 elemento	2 elementos	5 elementos
Pilar-base	725	725	725	1184	1186	1235

Dos resultados obtidos, podem-se retirar as seguintes observações:

1. Para os primeiros modos de encurvadura e, portanto, para os primeiros coeficientes da carga crítica, os valores encontrados foram muito semelhantes, com ou sem actualização de geometria e independentemente do grau de refinamento do modelo (embora, com o aumento da discretização e com a actualização de geometria, o valor da carga crítica desça, sucessiva e ligeiramente);
2. Para os modos superiores esta diferença já é mais nítida, aparecendo modos de instabilidade que a estrutura menos refinada (menor número de elementos por barra) não consegue detectar por falta de graus de liberdade a estes sensíveis;
3. Ainda para estes modos superiores, verifica-se que quando se efectua actualização de geometria há uma troca na hierarquia entre modos, aparecendo numa primeira fase formas de encurvadura locais nos pilares e só depois por torção global.
4. As diferenças entre os valores e as configurações com e sem acções horizontais não são proporcionais a essas acções, tornando-se claro a pouca sensibilidade destes métodos a cargas não verticais (como foi discutido em 4.9).
5. O refinamento do modelo não teve qualquer resposta em termos de esforços sem que se fizesse uma actualização de geometria, constatando-se, mesmo nesse caso, só serem significativas as diferenças para a divisão das barras em 5 elementos (situação para a qual, naturalmente, a actualização dos movimentos da estrutura tem maior aproveitamento).
6. Com a presença das fortes solicitações horizontais, que provocam grandes deslocamentos, a actualização de geometria implica agravamentos muito expressivos (na ordem dos 60%).

Apresentam-se as deformadas linear e não linear para acção vertical única, sem e com actualização de geometria, a partir das quais de nota as poucas alterações entre as duas situações, ou seja: numa estrutura regular com carregamento apenas vertical a actualização de geometria não é determinante para os resultados.

Por último: resultados de uma formulação com base em funções de estabilidade e outra na matriz geométrica; a intervenção dos *momentos induzidos* na distribuição dos esforços em que se aplicam forças horizontais que provocam uma torção global uniforme no sistema.

ESTRUTURA ESPACIAL SIMPLES
4 PILARES E 4 VIGAS
5 ELEMENTOS POR BARRA

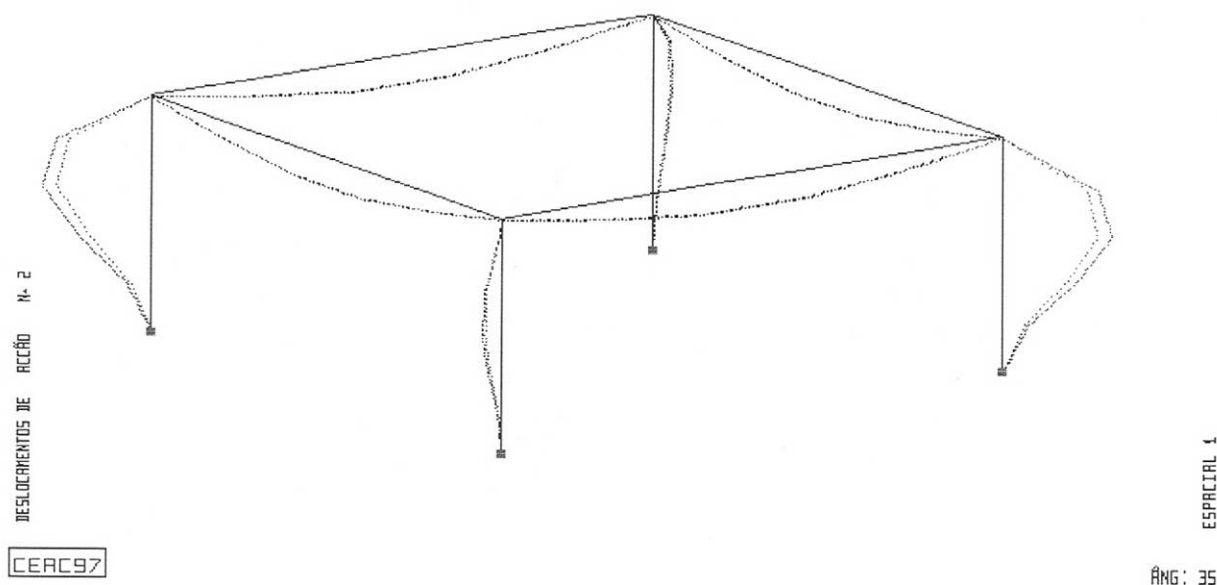


Figura 5.36: Pórtico espacial 1: deformadas sem actualização de geometria para acção vertical.

ESTRUTURA ESPACIAL SIMPLES
4 PILARES E 4 VIGAS
5 ELEMENTOS POR BARRA

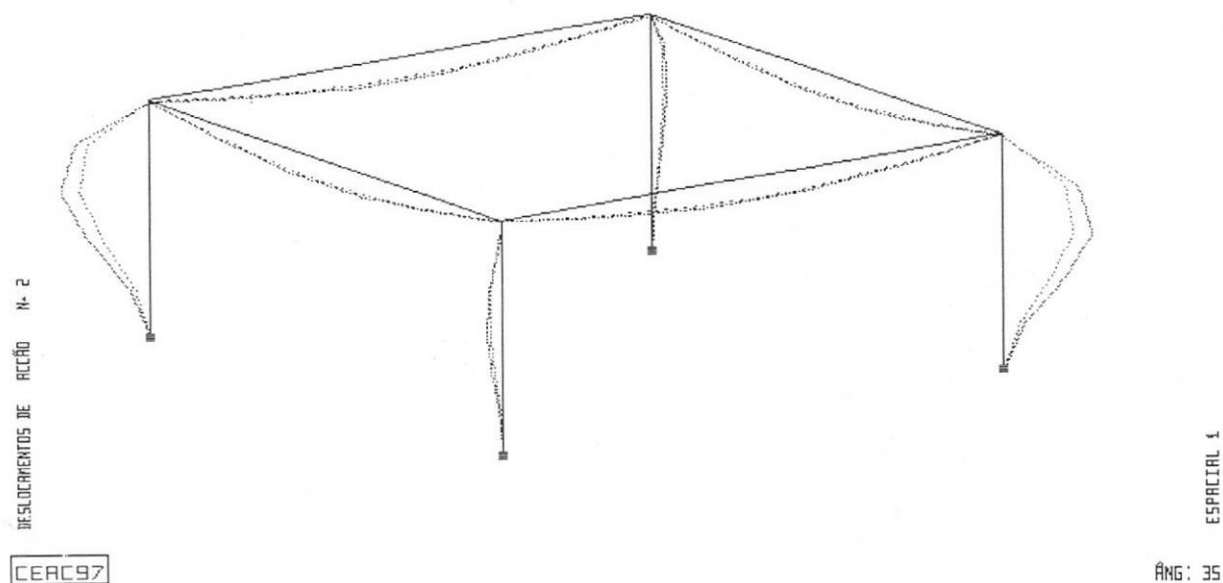


Figura 5.37: Pórtico espacial 1: deformadas com actualização de geometria para acção vertical.

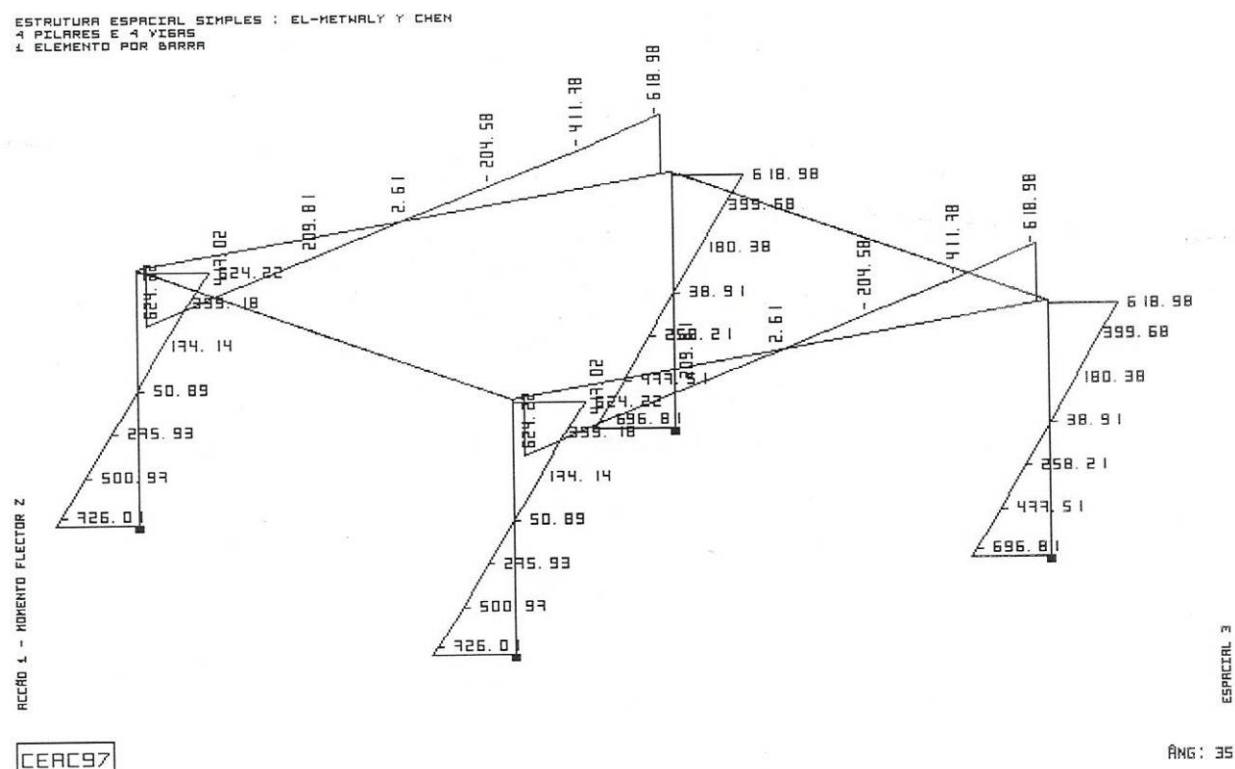


Figura 5.38: Pórtico espacial 1: solicitação mista com formulação de El-Metwally & Chen.

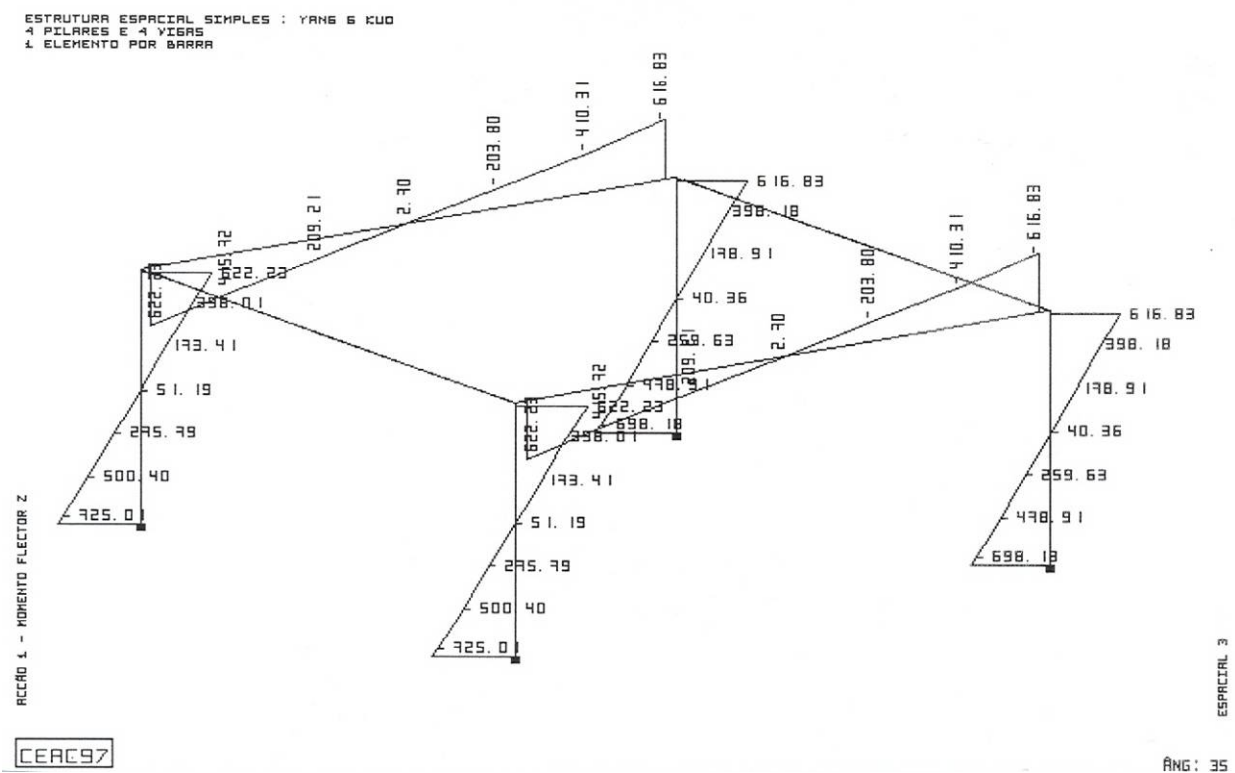


Figura 5.39: Pórtico espacial 1: solicitação mista com formulação de Yang & Kuo.

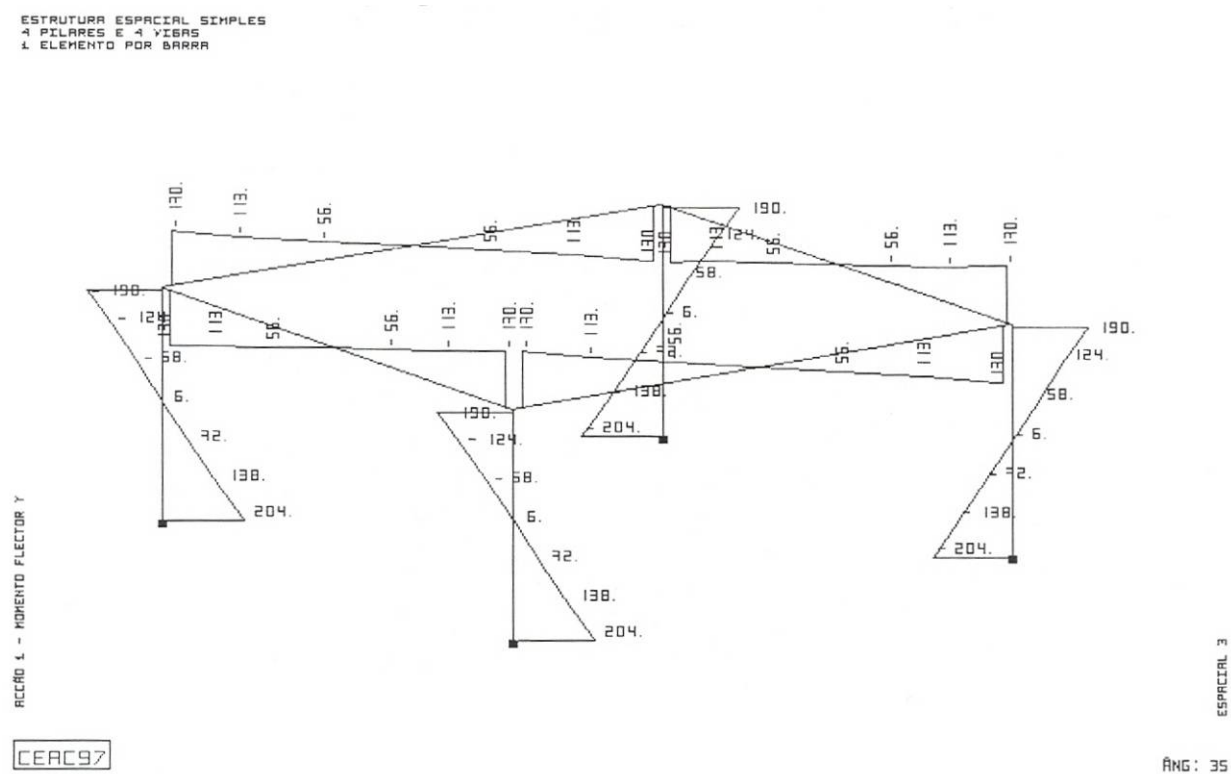


Figura 5.40: Pórtico espacial 1: distribuição de esforços sem participação de *momentos induzidos*.

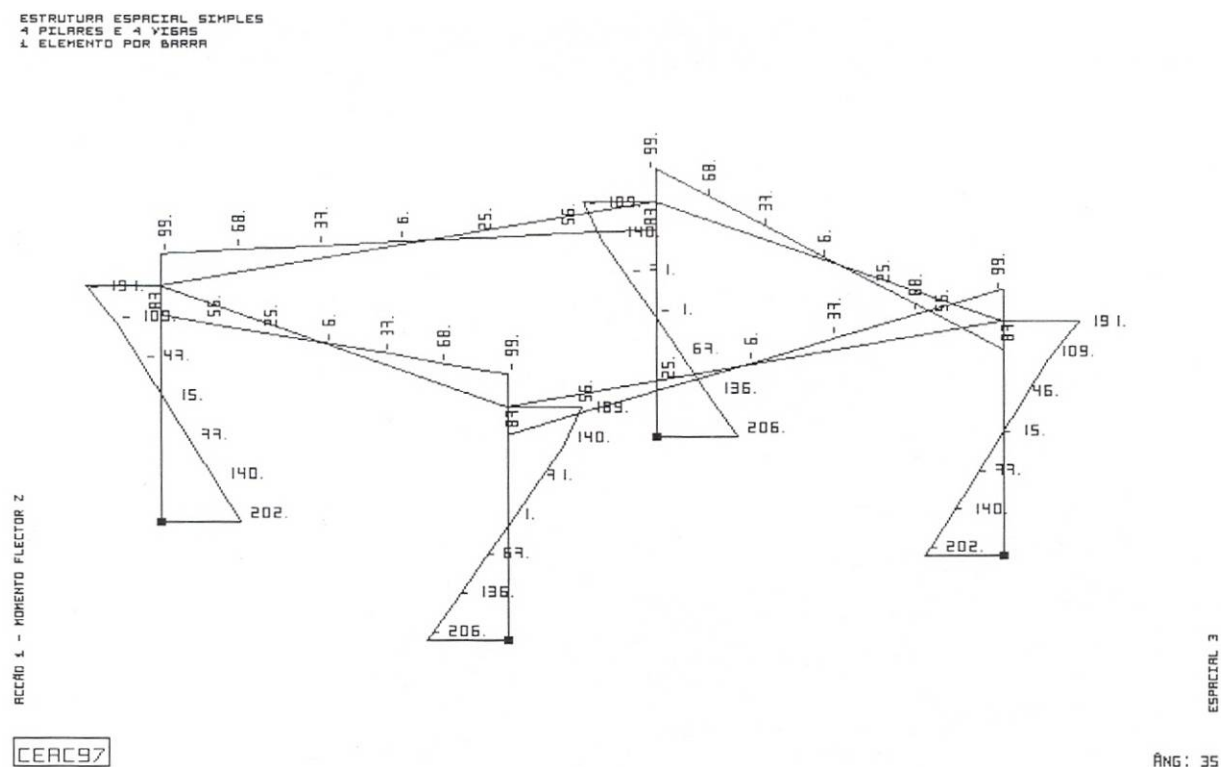


Figura 5.41: Pórtico espacial 1: distribuição de esforços com participação de *momentos induzidos*.

5.6. Pórtico Espacial 2

Tem por único objectivo este exemplo a demonstração da importância dos coeficientes complementares de encurvadura.

Consiste numa estrutura simétrica carregada simetricamente, em que na concepção da sua cobertura duas soluções são apontadas: escorar ou não a viga de cumeeira através de dois pilaretes.

Para além das tracções que se desenvolvem nas vigas da periferia devido ao efeito de compressão das vigas de cobertura, põe-se a questão destes últimos elementos, que no seu conjunto formam um vão com alguma dimensão, poderem sofrer instabilidades locais.

Conforme se vai poder observar, na ausência dos montantes auxiliares o comprimento de encurvadura destas vigas-coluna ultrapassa a sua própria extensão, mantendo-se, contudo, o coeficiente de carga crítica muito abaixo de qualquer valor preocupante ($\cong 34.3$).

Na verdade, embora a carga crítica diminua para metade, com a retirada dos pilaretes (dos seus 68.51 iniciais), não há qualquer sintoma no seu novo e folgado valor que faça supor qualquer tipo de instabilidade.

$$E = 2,75E+7, G = 1,16E+7$$

Barra tipo 1: 25 cm x 25 cm, Barra tipo 2: 30 cm x 25 cm (mas com inércia de torção nula)

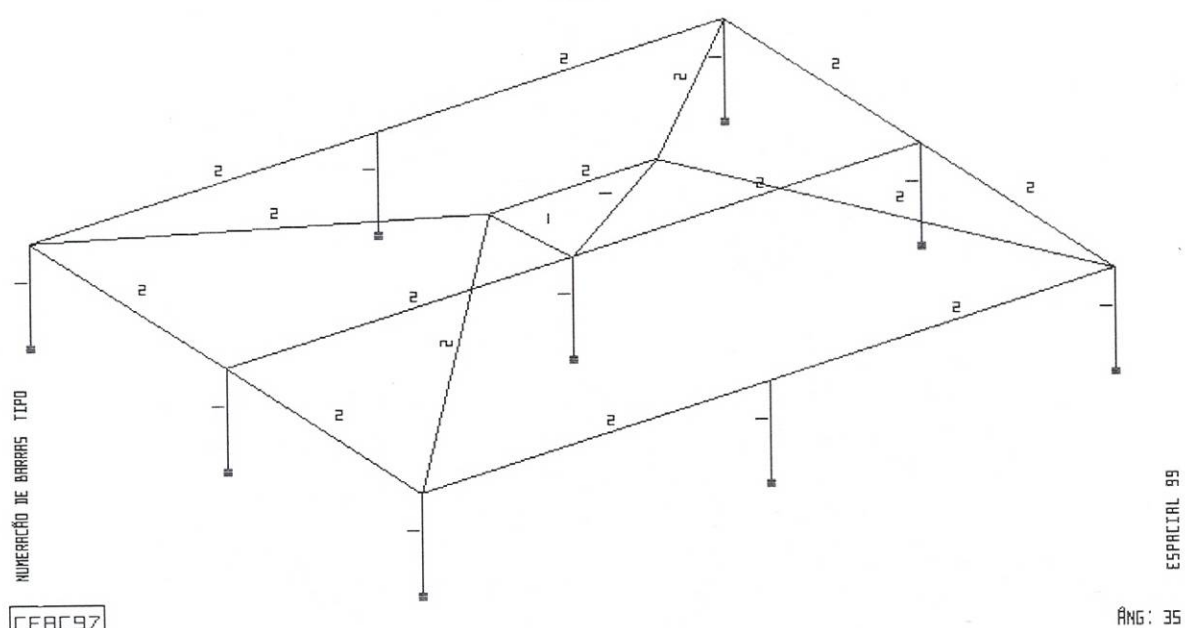


Figura 5.42: Pórtico espacial 2: geometria.

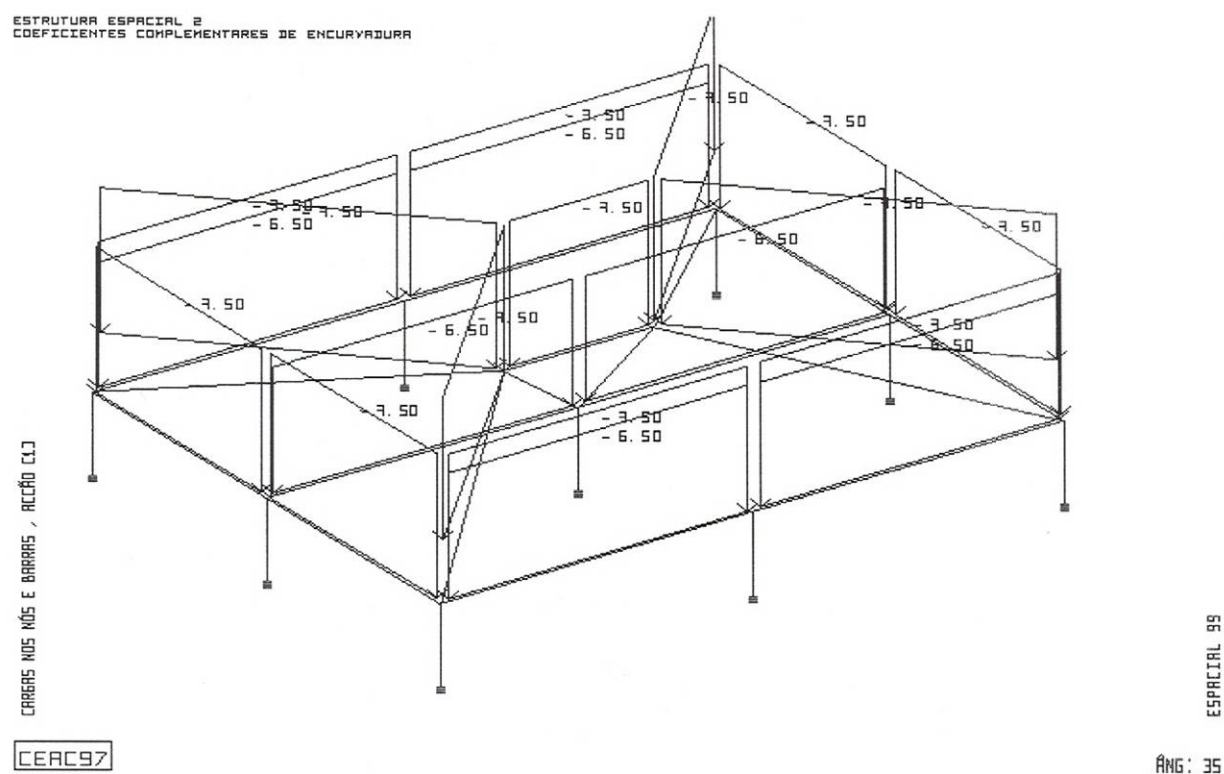


Figura 5.43: Pórtico espacial 2: solicitação.

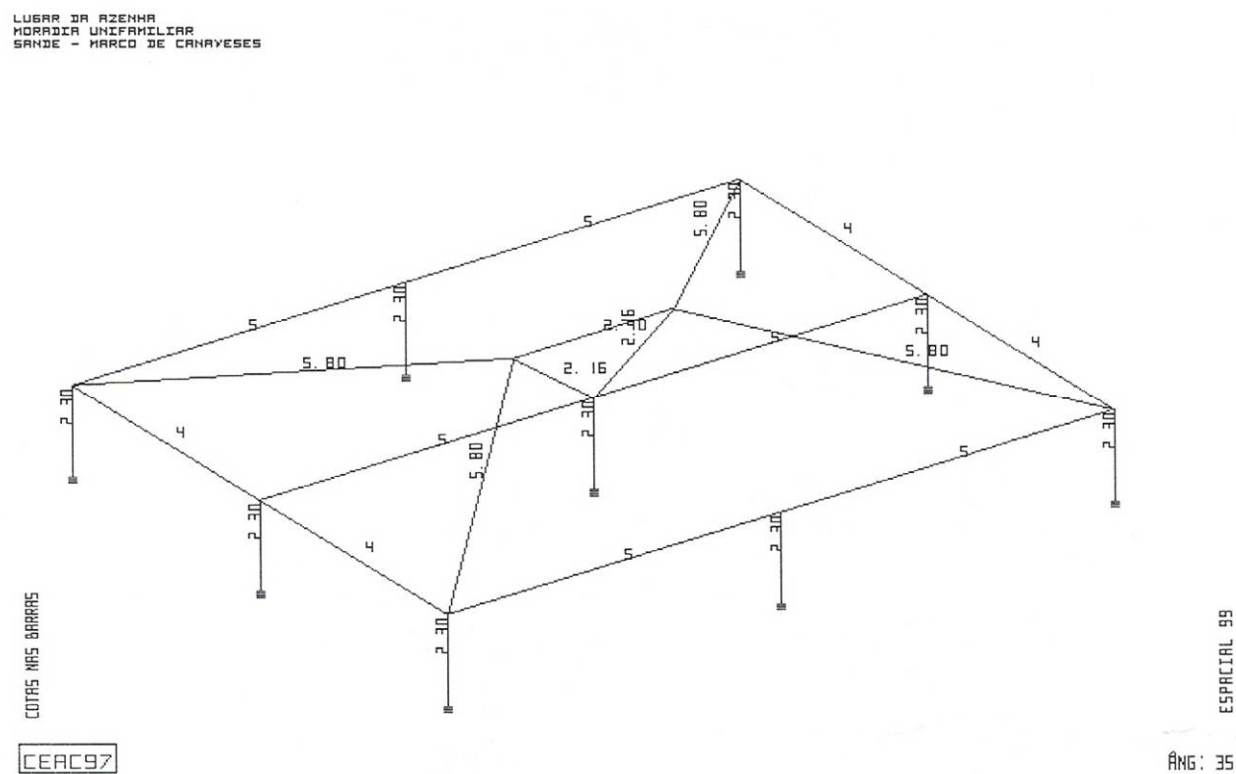


Figura 5.44: Pórtico espacial 2: comprimento das barras.

LUGAR DA AZENHA
MORADIA UNIFAMILIAR
SANDE - MARCO DE CANAVESES

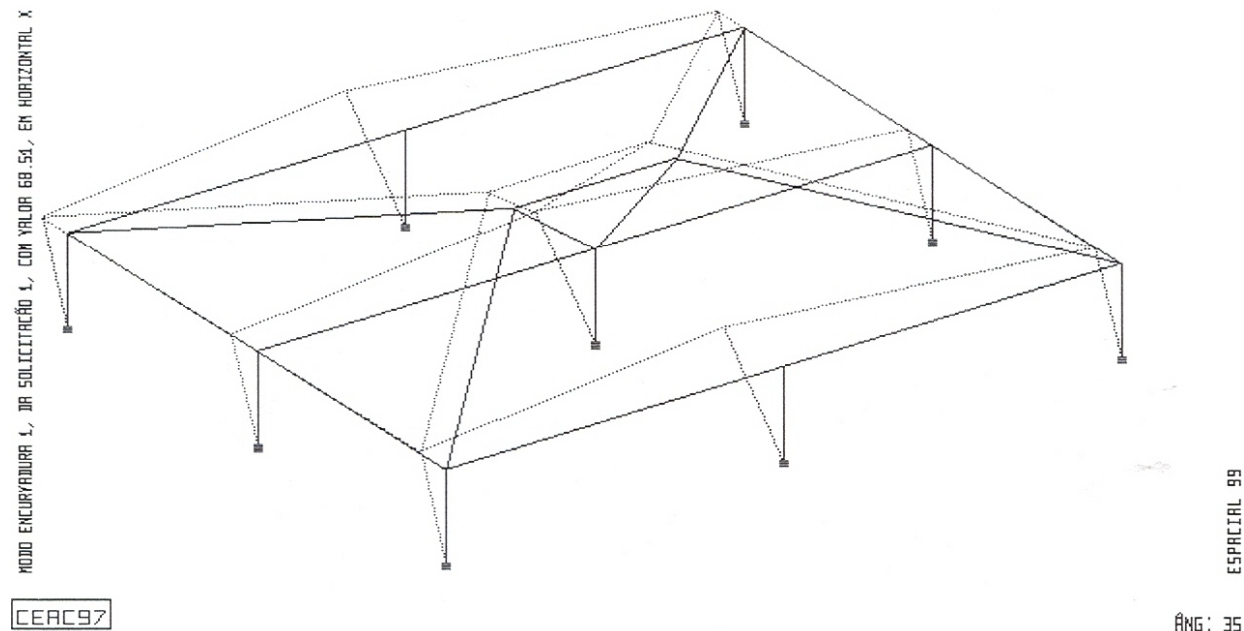


Figura 5.45: Pórtico espacial 2 (com pilaretes auxiliares): 1º modo de encurvadura e coeficiente crítico.

LUGAR DA AZENHA
MORADIA UNIFAMILIAR
SANDE - MARCO DE CANAVESES

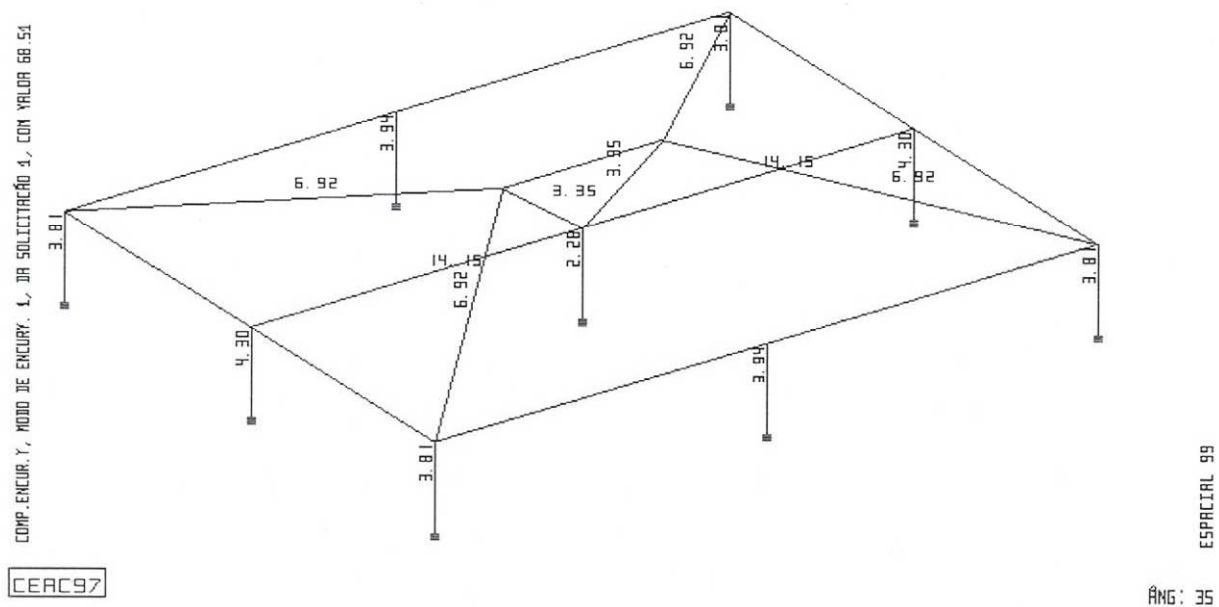


Figura 5.46: Pórtico espacial 2 (com pilaretes auxiliares): comprimentos de encurvadura das barras.

LUGAR DA AZENHA
MORADIA UNIFAMILIAR
SARDE - MARCO DE CANAVESES

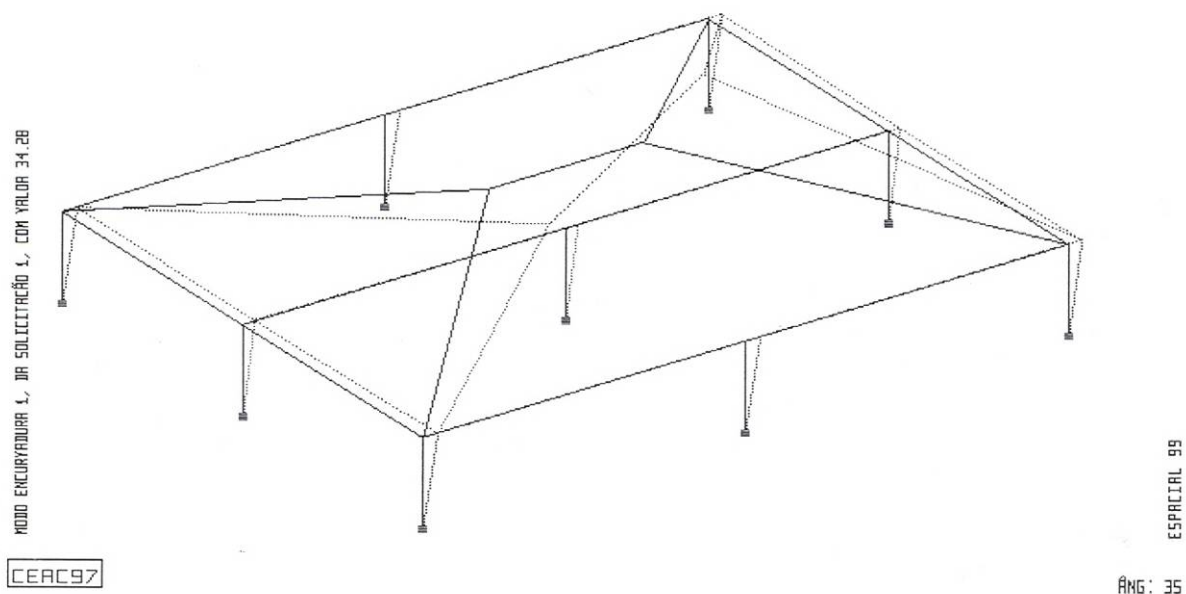


Figura 5.47: Pórtico espacial 2 (sem pilaretes auxiliares): 1º modo de encurvadura e coeficiente crítico.

LUGAR DA AZENHA
MORADIA UNIFAMILIAR
SARDE - MARCO DE CANAVESES

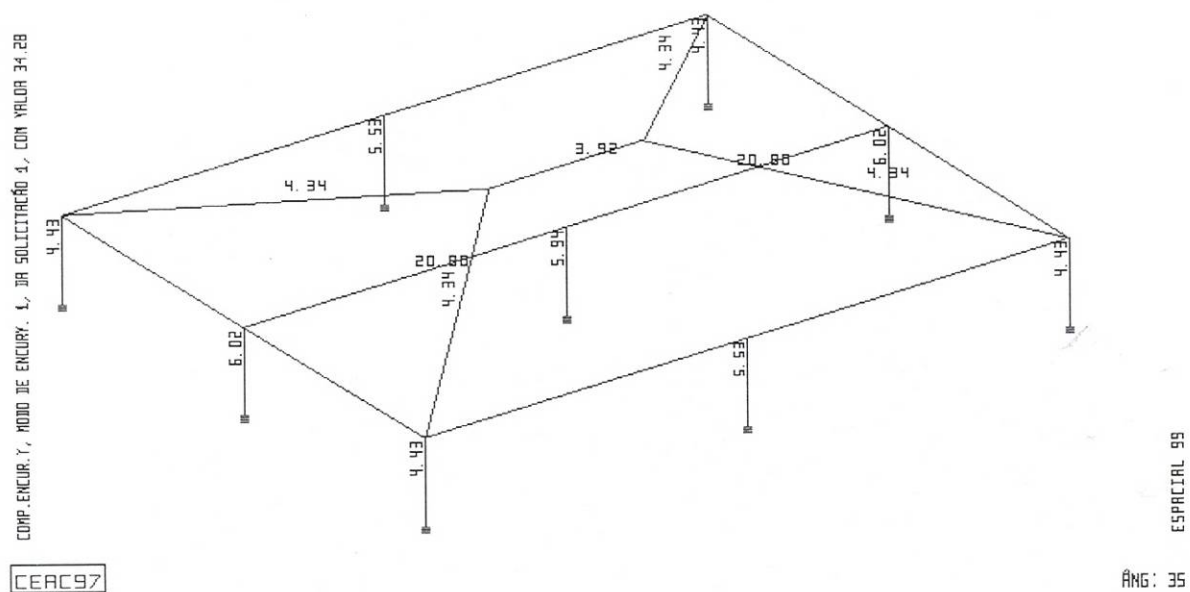


Figura 5.48: Pórtico espacial 2 (sem pilaretes auxiliares): comprimentos de encurvadura das barras.

6. Conclusões e futuros desenvolvimentos

Efectuam-se, como epílogo deste trabalho, as conclusões que se pensa serem as mais significativas e para as quais se julga existir a legitimidade bastante para a sua enunciação.

6.1. Análise não linear geométrica de estruturas reticuladas

- Tendo presente o testemunho das formulações apresentadas, de uma forma genérica, poderemos dizer que a análise não linear geométrica de estruturas reticuladas espaciais se divide em dois grandes sectores:
 1. Um em que se tem em consideração a actualização de geometria durante o processo de deformação da estrutura e o consequente aparecimento de excentricidades adicionais⁹⁸ que, de forma directa, conduzem a um agravamento dos momentos flectores nas peças deformadas, preponderantemente por acção dos esforços axiais a que estão sujeitas e que pode provocar a rotura brusca do equilíbrio completo da estrutura por instabilidade (efeito $P-\Delta$ ao nível da estabilidade do conjunto da estrutura – fenómeno de encurvadura global).
 2. Outro em que a perda de rigidez das barras da estrutura por acção dos esforços instalados é contabilizada recorrendo a funções de estabilidade ou matrizes geométricas e que reflecte a situação actualizada a que, num dado instante do processo, se encontra essa barra por efeito da tensão e deformação estabelecidas (efeito $P-\delta$ ao nível dos elementos – fenómeno de encurvadura local).
- Foi perceptível que estruturas mais flexíveis, como tal mais sujeitas a sofrerem deslocamentos significativos, são mais propensas a ver os seus esforços agravados em função das alterações na sua geometria do que pela perda de rigidez do seu sistema, pelo contrário, estruturas mais rígidas ou contraventadas vêm maioritariamente os seus efeitos de segunda ordem agravados na razão do valor das

⁹⁸ Designamos, aqui, estas excentricidades de adicionais dado ser sempre de ter em conta as iniciais, motivadas quer por motivos de fabrico, montagem ou outros.

suas forças internas.

De qualquer modo, e independentemente da importância relativa que cada um destes ramos poderá ter para cada situação específica, uma análise completa deverá conter ambos, bem como recorrer aos vários processos associados de controle e certificação da solução.

- A importância da análise não linear geométrica ficou visível nos exemplos apresentados, nomeadamente, na vertente de cálculo de deslocamentos e obtenção de esforços, se bem que as estruturas aí constantes estiveram sujeitas a violentas solicitações (com forte intervenção da desvantajosa componente horizontal). O que se pretendeu, e se julga ter atingido, foi oferecer um exemplo enfático das variações que se podem encontrar entre a análise linear e não linear geométrica.
- Viu-se ainda que, partindo do modelo anterior, quando a estrutura sofre deslocamentos acentuados, a actualização da sua geometria é essencial, já que um agravamento substancial dos esforços tem lugar.
- Também só é possível a ultrapassagem de pontos críticos ou limite (como os do tipo “snap-through” e “snap-back”), efectuando a actualização de geometria durante o processo de deformação da estrutura. Na verdade, estes pontos singulares podem mesmo ser visíveis utilizando unicamente a matriz linear de rigidez, desde que a geometria da estrutura vá sendo corrigida em função dos deslocamentos (ou seja: independentemente do conhecimento e utilização dos valores dos esforços instalados na estrutura).
- Efectuar uma análise não linear geométrica em que se reparte a carga por vários incrementos mas sem que se actualize a geometria, conduz, invariavelmente, aos mesmos resultados que utilizar apenas um incremento com a carga total. A única vantagem poderá apenas advir do facto de uma possível mais fácil convergência quando se recorre a passos mais contidos, ou seja: num processo baseado simplesmente na utilização única da matriz tangente ($[K_L] + [K_G]$) torna-se provavelmente desnecessário enveredar por um ciclo incremental.
- Por isso, embora os métodos de controlo de deslocamentos ou energia se mostrem, inequivocamente, insubstituíveis na presença de trajectórias não lineares com singularidades, em algumas situações correntes, sobretudo nas que seja dispensável

actualizar a geometria, o próprio método directo oferece bons resultados com grande economia.

- Contudo, e no sentido de não se atribuir uma alargada, mas errada, abrangência à limitada aplicação que pode ter o parágrafo anterior, bem como tentando ser precisos e correctos sob o ponto vista da doutrina elementar que impregna a própria análise não linear geométrica, diremos que é aconselhável, senão mesmo obrigatório, efectuar sempre a actualização da geometria após todos os passos convergidos no processo. Outra postura poderá levantar a questão de estarmos apenas a ter em atenção a perda de rigidez devida à presença de esforços significativos (como o axial), não satisfazendo as condições integrais a que deve obedecer a análise não linear geométrica que supõe, sempre, a actualização de geometria. Assim, e independentemente da maior ou menor intervenção que esta possa ter para certo tipo de casos, é teoricamente correcto e avisadamente seguro o seu uso sistemático.
- Sem prejuízo do que ficou dito no parágrafo anterior, a influência da divisão das barras em vários elementos, tanto para a análise não linear geométrica de deslocamentos e esforços como para o estudo da instabilidade, nunca sendo prejudicial na modelação da estrutura, nem sempre melhora o desempenho do modelo, pelo que se recomenda a sua adopção intensiva apenas quando o sistema sofra assinaláveis mudanças de geometria ou queremos conhecer modos superiores de encurvadura. Contudo, se nos referimos, simplesmente, à partição da barra em dois únicos elementos, mostra-se tal atitude interessante já que, entre outras informações, além de uma melhor caracterização do sistema estrutural e suas solicitações, dispomos de importante informação directa e exacta sobre dos deslocamentos a meio vão. Some-se a isto o facto de em circunstâncias em que existem variações acentuada na rigidez entre elementos contíguos ou próximos, ser sempre aconselhável esta prática.
- Querer fixar uma carga total, usando métodos de controlo de deslocamentos, tem como resultado frequente a perda da relação verdadeira entre carga e deslocamentos para o último incremento do processo. Isto deverá suceder na medida em que sendo o ciclo iterativo a deslocamento (ou energia) constante, ao fixar um valor de carga para esse incremento (a diferença entre a carga total e a remanescente do último

incremento convergido) deixa esse deslocamento de ser orientado, dando lugar a imprecisões numéricas (haveria, pois, que encontrar um dispositivo de cálculo próprio para esta situação).

- Uma diferente distribuição dos esforços em virtude do aparecimento de efeitos provocados por *momentos induzidos* foi reconhecida, sendo a sua inclusão recomendável no caso de estruturas cujas secções suportem fortes momentos, quer flectores quer torsões.
- O peso dos movimentos de corpo rígido nos deslocamentos não lineares e consequente eventual necessidade da sua eliminação na obtenção de esforços foi verificada, sendo isto mais evidente na presença de estruturas que sofram significativos deslocamentos, facto que, aliás, seria sempre de esperar. Em muitos casos estes erros podem ser grosseiros e inadmissíveis, sendo a grandeza desse valor proporcional ao relevo da matriz geométrica na matriz tangente, dado não conseguir esta primeira matriz $[K_G]$ diferenciar entre os deslocamentos válidos e os totais (situação em que não caí a matriz linear $[K_L]$). Tal sucede porque a matriz de rigidez linear, sendo derivada à custa da energia de deformação, não gera outras forças que não de valor nulo quando sujeita a movimentos de corpo rígido. Pelo contrário, a matriz geométrica, enquanto entidade representativa do efeito das forças iniciais nos elementos devido às alterações geométricas, produzirá forças não nulas mesmo quando apenas suporta movimentos de corpo rígido
- O recurso a métodos como o corte de incremento não parece ser de grande utilidade, sobretudo quando nos encontramos em situação de controlo de carga, mostrando-se quase sempre ineficaz para ultrapassar situações de não convergência do processo. Nestes casos - controlo de carga – normalmente os problemas que se põem quando não se consegue a desejada convergência, pouco têm que ver com a grandeza do valor do incremento, estando ligados a factores como a inadequação geométrica, constitutiva e geométrica das secções da estrutura às solicitações exteriores com este tipo de análise (relembre-se que em controlo de cargas não é possível a ultrapassagem de pontos singulares).
- O critério de convergência em termos de forças não se adapta a uma análise linear com actualização de geometria, já que o resíduo será sempre muito baixo e desligado

dos deslocamentos.

- Desvanece-se a vantagem do cálculo linear em que todas as acções podem ser estudadas, simultaneamente, já que a matriz de rigidez é dependente das forças internas de cada acção e da actualização, eventual, da sua geometria.

6.2. Cargas Críticas e Modos de Encurvadura

- Parece indiscutível a utilidade prática da observação dos modos de encurvadura como indicativo valioso da forma presumível do deslocamento da estrutura no momento da perda global de estabilidade por encurvadura geométrica, podendo ser um auxiliar importante para o projectista na concepção das suas direcções principais de contraventamento (ou mesmo em conjunto com a carga crítica aquilatar da necessidade ou dispensa de tais sistemas);
- Da importância do valor da carga crítica, será suficiente dizer que hoje se utiliza como critério de classificação da mobilidade das estruturas (designadamente, de nós fixos ou de nós móveis) na nova regulamentação [23];
- Embora o valor das cargas críticas (valores próprios da estrutura) seja um precioso indicativo do estado de carregamento da estrutura face à carga de colapso geométrico, não parece existir legitimidade para concluir da segurança deste valor, se não adoptarmos ao mesmo tempo uma análise não linear material. Isto é tanto mais verdade quanto maiores forem os deslocamentos (modo de encurvadura) relativos a essa carga crítica, já que em função destes (e de forma implícita das deformações internas atingidas nas secções) os esforços correspondentes podem já ter originado vários pontos de plastificação com a inerente perda global e local de rigidez e alteração necessária do próprio valor dessa carga crítica. Parece poder extrapolar-se, portanto, da conveniência de uma análise simultânea em termos geométricos e materiais (na realidade, as teorias dos grandes deslocamentos pressupõem, contudo, pequenas deformações associadas, o que indicia a prevenção contra situações de significativa não linearidade material).
- Outra grave deficiência comum às formulações apresentadas, é que todas elas são praticamente insensíveis às forças horizontais, independentemente da sua grandeza, tornando muito pouco fiáveis os resultados alcançados quando forças expressivas desta

natureza estejam presentes. Aparentemente, esta conclusão manter-se-á válida, mesmo quando o cálculo tenha sido efectuado com actualização de geometria, o que por si só poderia parecer suficiente, dado colocar a estrutura numa posição deformada real, por conter, implicitamente, os deslocamentos impostos por estas forças⁹⁹. Ou seja: a carga crítica (valor próprio) multiplicadora das forças actuates na estrutura que se aproxima da carga de colapso por instabilidade geométrica só é, restritivamente, aplicável ao valor das cargas verticais.

- A importância da análise espacial da instabilidade ficou confirmada, sendo esta sempre preferível em substituição de uma plana.
- Poder dispor da informação vinculada, por aquilo a que chamamos «coeficientes complementares de encurvadura», parece ser uma vantagem acrescida no remate da análise dos resultados obtidos no estudo da instabilidade de uma estrutura, nomeadamente, no despiste da possibilidade de instabilidades locais. Contudo, algum cuidado na análise dessa informação é preciso, sobretudo no que ao significado numérico de β ($N_{\text{Euler}}/N_{\text{Barra}})^{(1/2)}$ concerne. De facto, se a carga crítica da barra é grande surge um valor baixo para este coeficiente, o que origina um pequeno comprimento de encurvadura e uma conseqüente diminuta esbelteza, embora estas últimas entidades devam ser mais avaliadas em função da geometria da peça e das condições de fronteira do que da relação atrás descrita. Ao contrário, se a carga crítica é baixa temos um β elevado e, como tal, um elevado comprimento de encurvadura e de esbelteza. Pelo exposto é de concluir que nem sempre, através da formulação enunciada, se pode chegar a um valor de β com um significado físico credível, sendo isto notório quando existe uma diferença expressiva entre N_{Euler} e N_{Barra} , devendo ser imposto um intervalo de bom senso entre, por exemplo, 0.5 e 2 (consola e barra biencastrada).
- Se a influência da divisão das barras em mais do que um elemento pode tornar-se determinante no caso de diferenças apreciáveis entre a rigidez dos elementos [1], sobretudo para que se encontrem na posição vertical ou próximo desta orientação, na determinação de modos de encurvadura superiores ao primeiro essa discretização pode

⁹⁹ Os exemplos mostram um agravamento do valor da carga crítica quando se actualiza a geometria, mas de modo algum estes se encontram proporcionados aos valores das forças horizontais (para mais informações leia-se o ponto 4.7. deste trabalho).

desempenhar papel importante.

- O método da bifurcação de equilíbrio mostrou-se, expressivamente, vantajoso face aos seus concorrentes (iteração matricial de Stodola puro e modificado), embora exija um elevado valor para tolerância na convergência (aconselha-se 1E-25).

6.3. Futuros desenvolvimentos

- A inclusão da não linearidade material poderá ser um próximo passo na valorização e complemento do trabalho já realizado, quer pela inclusão de formulações tendo por base modelos de rótulas plásticas ou molas equivalentes (com leis de deformação-tensão associadas), quer por processos de correcção das características físicas dos materiais, quer ainda por métodos mistos;
- Outro enriquecimento, possível e complementar, será o melhor estudo de fenómenos de instabilidade local como a encurvadura de pilares, entendidos como elementos isolados, o bambeamento de vigas e o empenamento, em geral, das secções das barras¹⁰⁰;
- A inclusão das imperfeições geométricas iniciais, que hoje é já obrigatório considerar, como no Eurocódigo 3, e sobre as quais já vários autores se debruçaram [8,32];
- Estudo de um tratamento independente entre eixos locais dos extremos dos elementos, efectuando-se a actualização da posição angular dos mesmos em função da rotação dos nós, tentando dar uma resposta completa à actualização de geometria mesmo no domínio dos “muito” grandes deslocamentos.
- Possibilidade de correcção do modo como se considera a acção resultante do peso próprio, já que, actualmente, é aplicado por acréscimos como as restantes solicitações. Também, neste caso, para o estudo da instabilidade se poderia adoptar [15]:

$$[([K_L] + [K_G^{PP}]) + \lambda_c [K_G]] \{u\} = 0$$

¹⁰⁰ Esta matéria continua a ser alvo de frequentes desenvolvimentos, tendo sido recentemente apresentados dois interessantes trabalhos (“Non-linear FE solution for Thin-Walled Open-Section Composite Beams, Omidvar & Ghorbanpoor, ASCE, Journal of Structural Engineering, Novembro de 1996” e “Elastic and Inelastic Buckling Analysis of Thin-Walled Tapered Members, ASCE, Journal of Structural Engineering, Julho de 1997”) em que a simplicidade dessas formulações e a riqueza da sua exposição as tornam aplicáveis ao cálculo automático. Saliente-se a importante presença nesses estudos de algumas das ideias aqui incluídas. Refira-se, por último, que estas teorias assentam numa definição de eixos locais do elemento com um número superior de graus de liberdade face ao normal e que também aqui foi adoptado. Nestes casos, existem 7 graus de liberdade, sendo o grau

Refira-se, contudo, que o EC3 no seu ponto 5.2.1.1 (5) dispensa tal cuidado para uma análise global incremental, considerando suficiente aumentos proporcionais de todas as cargas, simultaneamente.

7. Bibliografia

1. Alvarez & Bustillo Analisis de Estructuras – teoria, problemas y programas, Fundacion Conde del Valle de Salazar, Madrid, 1996.
2. Alvarez, Ramon La Estructura Metalica hoy – Programacion (Tomo III), Libreria Tecnica Bellisco, Madrid, 1987.
3. Anastasiadis, K. Méthode Simplifiée de Calcul du Second Ordre des Bâtiments à Étages, Construcion Métallique, nº 4 - 1986.
4. Barros, Joaquim Métodos Estruturas, Dissertação para a obtenção do grau de Mestre em Estruturas de Engenharia Civil, FEUP, 1991.
5. Camões de Azevedo, Aires Análise Tridimensional de Estruturas Metálicas incluindo Efeitos de Segunda Ordem, Dissertação para a obtenção do grau de Mestre em Estruturas de Engenharia Civil, FEUP, 1993.
6. Chajes & Churchill Nonlinear Frame Analysis by Finite Element Methods, ASCE - Journal of Structural Engineering, Junho 1987.
7. Chajes, Alexander Post-Buckling Behavior, ASCE - Journal of Structural Engineering, Outubro 1983.
8. Chan & Zhou Second-Order Elastic Analysis of Frames Using Single Imperfect Element per Member, ASCE - Journal of Structural Engineering, Junho 1995.
9. Chan & Zhou Pointwise Equilibrating Polynomial Element for Nonlinear Analysis of Frames, ASCE - Journal of Structural Engineering, Junho 1994.
10. Chaudhary, Anil Generalized Stiffness Matrix for Thin Walled Beams, ASCE - Journal of Structural Engineering, Março 1982.
11. Chen & Blandford Thin-Walled Space Frames. I - Large Deformation Analysis Theory, ASCE - Journal of Structural Engineering, Agosto 1991.
12. Chen & Blandford Thin-Walled Space Frames. II - Algorithmic, Details and Applications, ASCE - Journal of Structural Engineering, Agosto 1991.
13. Chen & Lui Columns with End Restraint and Bending in Load and Resistance

- Design Factor, American Institute of Steel Construction, Engineering Journal, Third Quarter, 1985.
14. Chu & Rampetsreiter Large Deflection Buckling of Space Frames, ASCE - Journal of Structural Engineering, Dezembro 1972.
 15. Costa, Ana Instabilidade linear e Não Linear de Estruturas do Tipo Casca, Dissertação para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Estrutural, FEUP, 1985.
 16. Cruz, Paulo Análise Não Linear de Estruturas Porticadas de Betão, Dissertação para a obtenção do grau de Mestre em Estruturas de Engenharia Civil, FEUP, 1991.
 17. Dario Ochoa Slenderness K Factor for Leaning Columns, ASCE - Journal of Structural Engineering, Outubro 1994.
 18. Delgado, Jorge Efeitos de 2ª Ordem em estruturas Tridimensionais, Dissertação para a obtenção do grau de Mestre em Estruturas de Engenharia Civil, FEUP, 1993.
 19. Ekhande, Selvappalam & Madugula Stability Functions for Three-Dimensional Beam-Columns, ASCE - Journal of Structural Engineering, Fevereiro 1989.
 20. El-Metwally & Chen Non-linear Behavior of R/C frames, School of Civil Engineering, Purdue University, 1987.
 21. Espada, Jose Cálculo Matricial de Estructuras formadas por piezas prismáticas, Fondo Editorial de Ingenieria Naval, Madrid, 1975.
 22. Eurocódigo 2
 23. Eurocódigo 3
 24. Figueiras, Joaquim Azevedo Textos da disciplina Análise Não Linear de Estruturas do Mestrado em Estruturas de Engenharia Civil, FEUP, 1994.
 25. Jennings, Alan Frame Analysis including change of geometry, ASCE - Journal of Structural Engineering, Março 1968.
 26. Johnston, Bruce Column Buckling Theory: Historic Highlights, ASCE - Journal of Structural Engineering, Setembro 1983.
 27. Kassimali & Abbasnia Large Deformation Analysis of Elastic Space Frames, ASCE - Journal of Structural Engineering, Julho 1991.

28. Kassimali, Aslam Large Deformation Analysis of Elastic-Plastic Frames, ASCE - Journal of Structural Engineering, Agosto 1983.
29. Krysl, Petr Complete Stiffness Matrices for Buckling Analysis of Frames, ASCE - Journal of Engineering Mechanics, Fevereiro 1994.
30. Lleonart, José Pórticos Metálicos: Critérios de Cálculo, IETCC/CSIC, Espanha, 1995.
31. Lui, Eric A Practical P-Delta Analysis Method for Type FR and PR Frames, American Institute of Steel Construction, Engineering Journal, Third Quarter, 1988.
32. Lui, Eric M. Geometrical Imperfections on Inelastic Frame Behavior, ASCE - Journal of Structural Engineering, Maio 1992.
33. Mimoso, Mary Mun Oliveira Encurvadura de Estruturas Porticadas de Betão Armado, Tese de Doutoramento, UTL/IST, Abril 1991.
34. Nedergaard & Pedersen Analysis Procedure for Space Frames with Material and Geometrical Nonlinearities, artigo extraído do livro Finite Element Methods for Non-linear Problems, edit by Bergan, Bathe & Wunderlich, 1985.
35. Neves, Póvoas e Figueiras Estudo de problemas não lineares apoiado numa formulação unidimensional, Relatório Técnico, FEUP, Dezembro 1993.
36. Oran, Cenap Tangent Stiffness in Space Frames, ASCE - Journal of Structural Engineering, Junho 1973.
37. Oran, Cenap Tangent Stiffness in Plane Frames, ASCE - Journal of Structural Engineering, Junho 1973.
38. Pouca, Nelson Vila Mobilidade das Estruturas de Betão Armado na Análise à Encurvadura, Dissertação para a obtenção do grau de Mestre em Estruturas de Engenharia Civil, FEUP, 1992.
39. Powell, Graham Theory of Nonlinear Elastic Structures, ASCE - Journal of Structural Engineering, Dezembro 1969.
40. Rajasekaran & Murray Coupled Local Buckling in Wide-Flange Beam-Columns, ASCE - Journal of Structural Engineering, Junho 1973.
41. Rente, Carlos Análise Estática e Dinâmica Geometricamente Não Linear de Estruturas Atirantadas, Dissertação para a obtenção do grau de Mestre em Estruturas de Engenharia Civil, FEUP, 1994.

42. Robertson, L.E. Le Phénomene P-Delta évalué sur la base de la Période Fondamentale d'Oscillation, Construcion Métallique, nº 3 - 1981.
43. Ross, C.T.F. Finite Element Methods in Engineering Science, Ellis Horwood, West Sussex, 1990.
44. Tebedge & Tall Linear Stability Analysis of Beam-Columns, ASCE - Journal of Structural Engineering, Dezembro 1973.
45. Torres, Pinheiro Textos da disciplina de Instabilidade de Estruturas, Mestrado em Estruturas de Engenharia Civil, FEUP, 1994.
46. Yang & Kuo Theory of Nonlinear Framed Structures, Prentice Hall, Singapore, 1994.
47. Yang & McGuire Joint Rotation and Geometric Nonlinear Analysis, ASCE - Journal of Structural Engineering, Abril 1986.
48. Yang & McGuire Stiffness Matrix for Geometric Nonlinear Analysis, ASCE - Journal of Structural Engineering, Abril 1986.
49. Yong-Lin & Trahair Nonlinear Elastic Behavior of I-Beams Curved in Plan, ASCE – Journal of Structural Engeneering, Setembro, 1997.

8. Índice Geral

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Tema	1
1.2. Breve referência histórica	3
1.3. Definição do problema	6
1.4. Objectivo	12
1.5. Organização	13
2. ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS RETICULADAS ESPACIAIS - ÓRGÃOS	16
2.1. Introdução	16
2.1.1. Formulação para a análise não linear	17
2.2. Matriz de Rigidez Linear	18
2.3. Matriz de Transformação ou Rotação	23
2.3.1. Matriz de Rotação por Ramon Alvarez	28
2.3.2. Matriz de Rotação por Yang & Kuo	32
2.3.3. Matriz de Rotação por Argyris & Petyt	35
2.3.4. Comparação entre Matrizes de Rotação	37
2.4. Matriz Tangente	37
2.4.1. Matriz Tangente com base em Funções de Estabilidade	39
2.4.1.1. Chu & Rampetsreiter, 1972	39
2.4.1.2. José Espada, 1975	41
2.4.1.3. El-Metwally & Chen, 1987	41
2.4.1.4. Ekhande & Selvappalam, 1989	43
2.4.1.5. Kassimali & Abbasnia, 1991	43
2.4.1.6. Matriz Tangente para Cabos	45
2.4.2. Matriz Tangente com base em Matriz Geométrica	47
2.4.2.1. Portel & Powell, 1971	48
2.4.2.2. Tebedge & Tall, 1973	49
2.4.2.3. Nedergaard & Pederson, 1985.	50
2.4.2.4. Chajes & Churchill, 1987	51

2.4.2.5. Cook et al, 1989	54
2.4.2.6. Petr Krysl, 1993	57
2.4.2.7. Yang & Kuo, 1994	60
2.5. Comparação entre Matrizes Tangentes	69
2.6. Equilíbrio da estrutura, do elemento e a obtenção de esforços	75
2.6.1. Equilíbrio global da estrutura	75
2.6.2. Equilíbrio da barra	76
2.6.3. Cálculo de Esforços	77
2.6.4. Cargas nos nós e nas barras e alterações com actualização de geometria	80
2.7. Sumário	81
3. ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS RETICULADAS ESPACIAIS - PROCESSOS	86
3.1. Introdução	86
3.2. Técnicas Incrementais	87
3.3. Técnicas Iterativas	91
3.3.2. Método Directo	92
3.3.3. Método de Newton-Raphson	94
3.3.4. Método de Newton-Raphson modificado	95
3.3.4.1. Matriz Tangente calculada na 1ª iteração do 1º incremento	96
3.3.4.2. Matriz Tangente calculada na 1ª iteração de todos os incrementos	96
3.3.4.3. Matriz Tangente calculada na 2ª iteração de todos os incrementos	97
3.4. Técnicas Mistas	97
3.4.1. Controlo de Carga	102
3.4.1.1. Número de incrementos pré-fixado e de igual valor	103
3.4.1.2. Incrementação automática com base no número de iterações do incremento anterior	103
3.4.2. Controlo de Deslocamentos	104
3.4.2.1. Incrementação automática com base no CSP	105
3.4.2.2. Deslocamento Controlado	107
3.4.2.3. Comprimento do Arco	109
3.4.2.4. Energia Controlada (ou Trabalho Controlado)	111
3.4.2.5. Deslocamento Controlado Generalizado (GSP)	113
3.5. Critérios de Convergência	115

3.5.1. Em termos de variação simples de Forças ou Deslocamentos	116
3.5.2. Em termos de variação de Forças	117
3.5.3. Em termos de variação de Deslocamentos	117
3.5.4. Em termos de variação de Forças e Deslocamentos	118
3.5.5. Em termos Energéticos	118
3.5.6. Discussão dos critérios	119
3.6. Actualização de Geometria	121
3.6.1. Introdução	121
3.6.2. Discussão	121
3.7. Técnicas complementares	128
3.7.1. Factor Inicial de Carga	128
3.7.2. Avaliação da Rigidez Corrente e Permuta de Algoritmo	129
3.7.3. Possibilidade de Recomeço e Corte de Incremento	130
3.8. Sumário	132
4. PREVISÃO DE CARGAS CRÍTICAS	138
4.1. Introdução	138
4.2. Método da Iteração Matricial de Stodola	140
4.3. Método da Iteração Matricial de Stodola modificado	142
4.4. Método da Bifurcação de Equilíbrio	143
4.5. Modos de Encurvadura superiores ao primeiro	144
4.6. Curva de Cargas Críticas	146
4.7. Coeficientes Complementares de Encurvadura	149
4.8. Análise Plana e Espacial da Instabilidade	151
4.9. Sumário	152
4. EXEMPLOS NUMÉRICOS	159
5.1. Introdução	159

5.2. O programa de cálculo CEAC97	160
5.3. Williams Toggle Frame	164
5.4. Pórtico Plano	172
5.5. Pórtico Espacial 1	177
5.6. Pórtico Espacial 2	189
6. CONCLUSÕES E FUTUROS DESENVOLVIMENTOS	193
6.1. Análise não linear geométrica de estruturas reticuladas	193
6.2. Cargas Críticas e Modos de Encurvadura	197
6.3. Futuros desenvolvimentos	199
7. BIBLIOGRAFIA	201
8. ÍNDICE GERAL	205
9. ÍNDICE DE FIGURAS	209
<u>ANEXO I</u> - MATRIZES DE RIGIDEZ LINEAR, DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA E FUNÇÕES DE ESTABILIDADE	212
<u>ANEXO II</u> - SUB-ROTINAS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES EM FORTRAN 90	243
<u>ANEXO III</u> - ROTINAS DO PROGRAMA CEAC97	248

9. Índice de Figuras

- Figura 1.1: Curva carga-deslocamento num caso normal. 7
- Figura 1.2: Exemplo de um caso normal. 7
- Figura 1.3: Curva carga-deslocamento num caso de inflexão da trajectória de equilíbrio. 8
- Figura 1.4: Exemplo de um caso de inflexão da trajectória de equilíbrio. 8
- Figura 1.5: Curva carga-deslocamento num caso de bifurcação de equilíbrio. 9
- Figura 1.6: Exemplo de um caso de bifurcação de equilíbrio. 9
- Figura 1.7: Carga-deslocamento com inversão de equilíbrio com descontinuidade tipo “snap-through”. 10
- Figura 1.8: Exemplo de inversão de equilíbrio com descontinuidade do tipo “snap-through”. 10
- Figura 1.9: Curva carga-deslocamento com inversão de equilíbrio com descontinuidade tipo “snap-back”. 11
- Figura 1.10: Exemplo de inversão de equilíbrio com descontinuidade do tipo “snap-back” (no ponto i). 11
- Figura 2.1: Formulação Lagrangeana Total. 17
- Figura 2.2: Formulação Lagrangeana Actualizada. 18
- Figura 2.3: Matriz de rigidez linear: grau de liberdade de rotação no nó i e reacções correspondentes. 19
- Figura 2.4: Sistema de eixos plano local condensado. 20
- Figura 2.6: Sistema de eixos espacial local. 21
- Figura 2.7: Sistema de eixos espacial local, eventualmente, sem continuidade para momentos. 23
- Figura 2.8: Transformação de eixos locais para gerais no plano. 24
- Figura 2.9: Eixos locais (x,y,z) e gerais (X,Y,Z) no espaço. 24
- Figura 2.10: Transformação de *eixos locais* da secção $(x$ e $y)$ para *eixos principais* da secção $(x'$ e $y')$. 28
- Figura 2.11: Variação da posição dos eixos locais em função da posição da barra (Alvarez – modificada). 32
- Figura 2.12: Eixos do elemento (element axes). 33
- Figura 2.13: Eixos nodais da secção (nodal section axes). 33
- Figura 2.14: Eixos de referência dos nós (reference axes of nodes). 33
- Figura 2.15: Eixos locais de barra por Argyris e Petyt. 35
- Figura 2.16: Eixos locais de barra por Argyris e Petyt (adaptados para viga). 36
- Figura 2.17: Eixos locais de barra por Argyris e Petyt (adaptados para pilar). 36
- Figura 2.18: Elemento de cabo/tirante. 47
- Figura 2.19: Sistema de eixos plano local condensado ou reduzido. 48
- Figura 2.20: Método não linear incremental (Chajes & Churchill). 52
- Figura 2.21: Método linear incremental (Chajes & Churchill). 53
- Figura 2.22: Método directo (Chajes & Churchill). 54
- Figura 2.23: Matriz de rigidez geométrica: grau de liberdade de rotação e reacções correspondentes. 55
- Figura 2.24: Momento: (1) Axial, (2) Tangencial, (3) Semitangencial. 63
- Figura 2.25: Momento: (4) Quasitangencial de 1ª ordem, (5) Quasitangencial de 2ª ordem. 63
- Figura 2.26: Momento externo M_0 aplicado directamente no nó (neste caso no nó j). 68
- Figura 2.27: Configuração-base de equilíbrio de barra em análise linear. 77

- Figura 2.28: Configuração-base de equilíbrio de barra em análise não linear. 77
- Figura 2.29: Movimentos de corpo rígido no plano e deformações naturais do elemento. 79
- Figura 3.1: Carga-deslocamento no método incremental com matriz linear e actualização de geometria. 89
- Figura 3.2: Carga-deslocamento no método incremental puro com $[K_G]$ e sem actualização de geometria. 90
- Figura 3.3: Carga-deslocamento no método incremental simples com $[K_G]$ e actualização de geometria. 91
- Figura 3.8: Diagrama carga-deslocamento do método directo. 93
- Figura 3.4: Diagrama carga-deslocamento para o método do controlo de carga. 102
- Figura 3.5: Diagrama carga-deslocamento para o método do controlo de deslocamento. 108
- Figura 3.6: Diagrama carga-deslocamento para o método do comprimento do arco. 111
- Figura 3.9: Sistema de eixos local com actualização de geometria indexada ao seu centro. 125
- Figura 3.10: Divergência do método de Newton-Raphson em controlo de carga. 133
- Figura 3.11: Características do GSP. 135
- Figura 4.1: Curva carga-deslocamento e cargas críticas num caso normal. 147
- Figura 4.2: Curva carga-deslocamento e cargas críticas num caso de inflexão da trajectória de equilíbrio. 148
- Figura 4.3: Curva carga-deslocamento e cargas críticas num caso de bifurcação de equilíbrio. 148
- Figura 4.4: Curva de cargas críticas com inversão de equilíbrio com descontinuidade tipo “snap-through”. 149
- Figura 4.5: Pórtico espacial 1: geometria e solicitação vertical. 155
- Figura 4.6: Pórtico espacial 1: deformada da solicitação vertical. 155
- Figura 4.7: Pórtico espacial 1: 1ª carga crítica e modo de encurvadura associado. 156
- Figura 5.1: Williams toggle frame: geometria e solicitação. 165
- Figura 5.2: Williams toggle frame: $P-\delta \rightarrow$ com matriz linear. 165
- Figura 5.3: Williams toggle frame: $P-\delta \rightarrow$ matriz não linear e sem movimentos de corpo rígido. 166
- Figura 5.4: Williams toggle frame: $P-\delta \rightarrow$ matriz não linear e com movimentos de corpo rígido. 166
- Figura 5.5: Williams toggle frame: 1º modo de instabilidade. **Erro! Marcador não definido.**
- Figura 5.6: Williams toggle frame: 2º modo de instabilidade. **Erro! Marcador não definido.**
- Figura 5.7: Williams toggle frame: 3º modo de instabilidade. **Erro! Marcador não definido.**
- Figura 5.8: Williams toggle frame (2 elementos): $P-\delta \rightarrow$ CSP. 169
- Figura 5.9: Williams toggle frame (2 elementos): $P-\delta \rightarrow$ comprimento do arco. 169
- Figura 5.10: Williams toggle frame (2 elementos): $P-\delta \rightarrow$ controlo de energia. 170
- Figura 5.11: Williams toggle frame (2 elementos): $P-\delta \rightarrow$ GSP. 170
- Figura 5.12: Williams toggle frame (10 elementos): $P-\delta$ (Petr Krysl). 171
- Figura 5.13: Williams toggle frame (20 elementos) : $P-\delta$ (Yang & Kuo). 171
- Figura 5.14: Pórtico plano: geometria e solicitação. 172
- Figura 5.15: Pórtico plano: 1º modo de instabilidade para 3 elementos. 172
- Figura 5.16: Pórtico plano: 2º modo de instabilidade para 3 elementos. 173
- Figura 5.17: Pórtico plano: 1º modo de instabilidade para 6 elementos. 173
- Figura 5.18: Pórtico plano: 2º modo de instabilidade para 6 elementos. 174

- Figura 5.19: Pórtico plano: 1º modo de instabilidade para 15 elementos. 174
- Figura 5.20: Pórtico plano: 2º modo de instabilidade para 15 elementos. 175
- Figura 5.21: Pórtico plano: 1º modo de instabilidade sem travamento para fora do plano. 175
- Figura 5.22: Pórtico espacial 1: geometria e solicitação mista vertical e horizontal. 177
- Figura 5.23: Pórtico espacial 1: $P-\delta$ para 5 elementos por barra sem actualização de geometria. 178
- Figura 5.24: Pórtico espacial 1: $P-\delta$ para 5 elementos por barra com actualização de geometria. 178
- Figura 5.25: Pórtico espacial 1: deformada linear e não linear sem actualização de geometria. 179
- Figura 5.26: Pórtico espacial 1: deformada linear e não linear com actualização de geometria. 179
- Figura 5.27: Pórtico espacial 1: momentos para 1 elemento por barra sem actualização de geometria. 180
- Figura 5.28: Pórtico espacial 1: momentos para 5 elementos por barra sem actualização de geometria. 180
- Figura 5.29: Pórtico espacial 1: momentos para 1 elemento por barra com actualização de geometria. 181
- Figura 5.30: Pórtico espacial 1: momentos para 5 elementos por barra com actualização de geometria. 181
- Figura 5.31: Pórtico espacial 1: modo de encurvadura 2 para 5 elementos. 182
- Figura 5.32: Pórtico espacial 1: modo de encurvadura 3 para 5 elementos. 182
- Figura 5.33: Pórtico espacial 1: modo de encurvadura 4 para 2 elementos (acção vertical pura). 183
- Figura 5.34: Pórtico espacial 1: modo de encurvadura 4 para 2 elementos (acção mista). 183
- Figura 5.35: Pórtico espacial 1: modo de encurvadura 3 com 1 elemento. 184
- Figura 5.36: Pórtico espacial 1: deformadas sem actualização de geometria para acção vertical. 186
- Figura 5.37: Pórtico espacial 1: deformadas com actualização de geometria para acção vertical. 186
- Figura 5.38: Pórtico espacial 1: solicitação mista com formulação de El-Metwally & Chen. 187
- Figura 5.39: Pórtico espacial 1: solicitação mista com formulação de Yang & Kuo. 187
- Figura 5.40: Pórtico espacial 1: distribuição de esforços sem participação de *momentos induzidos*. 188
- Figura 5.41: Pórtico espacial 1: distribuição de esforços com participação de *momentos induzidos*. 188
- Figura 5.42: Pórtico espacial 2: geometria. 189
- Figura 5.43: Pórtico espacial 2: solicitação. 190
- Figura 5.44: Pórtico espacial 2: comprimento das barras. 190
- Figura 5.45: Pórtico espacial 2 (com pilaretes auxiliares): 1º modo de encurvadura e coeficiente crítico. 191
- Figura 5.46: Pórtico espacial 2 (com pilaretes auxiliares): comprimentos de encurvadura das barras. 191
- Figura 5.47: Pórtico espacial 2 (sem pilaretes auxiliares): 1º modo de encurvadura e coeficiente crítico. 192
- Figura 5.48: Pórtico espacial 2 (sem pilaretes auxiliares): comprimentos de encurvadura das barras. 192

Anexo I - Matrizes de Rigidez Linear, de Rigidez Geométrica e Funções de Estabilidade

Matriz de rigidez linear em que não se considera o contributo do esforço transversal para a deformação da barra [1]:

$$\mathbf{K}_L^{ii} = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 \\ 0 & 0 & 12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 \\ 0 & 0 & 0 & GI_T/L & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 & 4EI_y/L \\ 0 & 6EI_z/L^2 & 0 & 0 & 4EI_z/L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_L^{jj} = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_z/L^3 & 0 & 0 & -6EI_z/L^2 \\ 0 & 0 & 12EI_y/L^3 & 0 & 6EI_y/L^2 \\ 0 & 0 & 0 & GI_T/L & 0 \\ 0 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 & 4EI_y/L \\ 0 & -6EI_z/L^2 & 0 & 0 & 4EI_z/L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_L^{ij} = \begin{bmatrix} -AE/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 \\ 0 & 0 & -12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 \\ 0 & 0 & 0 & -GI_T/L & 0 \\ 0 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 & 2EI_y/L \\ 0 & -6EI_z/L^2 & 0 & 0 & 2EI_z/L \end{bmatrix}$$

A matriz $\mathbf{K}_L^{ji}$ é a transposta da sua homóloga $\mathbf{K}_L^{ij}$, em virtude da simetria que caracteriza a matriz de rigidez: $\mathbf{K}_L^{ji} = (\mathbf{K}_L^{ij})^T$.

Matriz de rigidez linear em que se considera o contributo do esforço transversal para a deformação da barra [1]:

$$\mathbf{K}_L^{ii} = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_z/L^3 \eta_z & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 \eta_z \\ 0 & 0 & 12EI_y/L^3 \eta_y & 0 & -6EI_y/L^2 \eta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_T/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_y/L^2 \eta_y & 0 & 4EI_y/L \mu_y & 0 \\ 0 & 6EI_z/L^2 \eta_z & 0 & 0 & 0 & 4EI_z/L \mu_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_L^{jj} = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_z/L^3 \eta_z & 0 & 0 & 0 & -6EI_z/L^2 \eta_z \\ 0 & 0 & 12EI_y/L^3 \eta_y & 0 & 6EI_y/L^2 \eta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_T/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6EI_y/L^2 \eta_y & 0 & 4EI_y/L \mu_y & 0 \\ 0 & -6EI_z/L^2 \eta_z & 0 & 0 & 0 & 4EI_z/L \mu_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_L^{ij} = \begin{bmatrix} -AE/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12EI_z/L^3 \eta_z & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 \eta_z \\ 0 & 0 & -12EI_y/L^3 \eta_y & 0 & -6EI_y/L^2 \eta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -GI_T/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6EI_y/L^2 \eta_y & 0 & 2EI_y/L \rho_y & 0 \\ 0 & -6EI_z/L^2 \eta_z & 0 & 0 & 0 & 2EI_z/L \rho_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_L^{ji} = (\mathbf{K}_L^{ij})^T$$

Com: $\beta_y = 6 E I_y / (L^2 G A / X'_y)$, $\beta_z = 6 E I_z / (L^2 G A / X'_z)$

$$\eta_y = 1 / (2 \beta_y + 1), \eta_z = 1 / (2 \beta_z + 1)$$

$$\mu_y = \eta_y (1 + \beta_y / 2), \mu_z = \eta_z (1 + \beta_z / 2)$$

$$\rho_y = \eta_y (1 - \beta_y), \rho_z = \eta_z (1 - \beta_z)$$

Matriz de rigidez linear em que não se considera o contributo do esforço transversal para a deformação da barra e em que as condições de ligação dos graus de liberdade de rotação podem não ser de continuidade [1]:

$$\mathbf{K}_L^{ii} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline AE/L & & & & \\ \hline & 12EI_z/L^3 \alpha_{z1} & & & 6EI_z/L^2 \alpha_{z2} \\ \hline & & 12EI_y/L^3 \alpha_{y1} & & -6EI_y/L^2 \alpha_{y2} \\ \hline & & & GI_T/L \beta & \\ \hline & & -6EI_y/L^2 \alpha_{y2} & & 4EI_y/L \alpha_{y3} \\ \hline & 6EI_z/L^2 \alpha_{z2} & & & 4EI_z/L \alpha_{z3} \\ \hline \end{array}$$

Com:

- Descontinuidade em θ_y só para o extremo i : $\alpha_{y1} = 0.25$, $\alpha_{y2} = 0.00$, $\alpha_{y3} = 0.00$.
 - Descontinuidade em θ_z só para o extremo i : $\alpha_{z1} = 0.25$, $\alpha_{z2} = 0.00$, $\alpha_{z3} = 0.00$.
 - Descontinuidade em θ_y só para o extremo j : $\alpha_{y1} = 0.25$, $\alpha_{y2} = 0.50$, $\alpha_{y3} = 0.75$.
 - Descontinuidade em θ_z só para o extremo j : $\alpha_{z1} = 0.25$, $\alpha_{z2} = 0.50$, $\alpha_{z3} = 0.75$.
 - Descontinuidade em θ_y para o extremo i e j : $\alpha_{y1} = 0.00$, $\alpha_{y2} = 0.00$, $\alpha_{y3} = 0.00$.
 - Descontinuidade em θ_z para o extremo i e j : $\alpha_{z1} = 0.00$, $\alpha_{z2} = 0.00$, $\alpha_{z3} = 0.00$.
 - Descontinuidade em θ_x só para o extremo i ou para ambos os extremos : $\beta = 0.00$
 - Descontinuidade em θ_x só para o extremo j : $\beta = 1.00$
 - Sem qualquer descontinuidade :
- $\alpha_{y1} = 1.00$, $\alpha_{y2} = 1.00$, $\alpha_{y3} = 1.00$, $\alpha_{z1} = 1.00$, $\alpha_{z2} = 1.00$, $\alpha_{z3} = 1.00$, $\beta = 1.00$

$$\mathbf{K}_L^{jj} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline AE/L & & & & \\ \hline & 12EI_z/L^3 \alpha_{z1} & & & -6EI_z/L^2 \alpha_{z2} \\ \hline & & 12EI_y/L^3 \alpha_{y1} & & 6EI_y/L^2 \alpha_{y2} \\ \hline & & & GI_T/L \beta & \\ \hline & & 6EI_y/L^2 \alpha_{y2} & & 4EI_y/L \alpha_{y3} \\ \hline & -6EI_z/L^2 \alpha_{z2} & & & 4EI_z/L \alpha_{z3} \\ \hline \end{array}$$

Com:

- Descontinuidade em θ_Y só para o extremo i : $\alpha_{Y1} = 0.25$, $\alpha_{Y2} = 0.50$, $\alpha_{Y3} = 0.75$.
- Descontinuidade em θ_Z só para o extremo i : $\alpha_{Z1} = 0.25$, $\alpha_{Z2} = 0.50$, $\alpha_{Z3} = 0.75$.
- Descontinuidade em θ_Y só para o extremo j : $\alpha_{Y1} = 0.25$, $\alpha_{Y2} = 0.00$, $\alpha_{Y3} = 0.00$.
- Descontinuidade em θ_Z só para o extremo j : $\alpha_{Z1} = 0.25$, $\alpha_{Z2} = 0.00$, $\alpha_{Z3} = 0.00$.
- Descontinuidade em θ_Y para o extremo i e j : $\alpha_{Y1} = 0.00$, $\alpha_{Y2} = 0.00$, $\alpha_{Y3} = 0.00$.
- Descontinuidade em θ_Z para o extremo i e j : $\alpha_{Z1} = 0.00$, $\alpha_{Z2} = 0.00$, $\alpha_{Z3} = 0.00$.
- Descontinuidade em θ_X só para o extremo i : $\beta = 1.00$
- Descontinuidade em θ_X só para o extremo j ou para ambos os extremos : $\beta = 0.00$
- Sem qualquer descontinuidade :
 $\alpha_{Y1} = 1.00$, $\alpha_{Y2} = 1.00$, $\alpha_{Y3} = 1.00$, $\alpha_{Z1} = 1.00$, $\alpha_{Z2} = 1.00$, $\alpha_{Z3} = 1.00$, $\beta = 1.00$

$$\mathbf{K}_L^{ij} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline -AE/L & & & & & \\ \hline & -12EI_Z/L^3 \alpha_{Z1} & & & & 6EI_Z/L^2 \alpha_{Z2i} \\ \hline & & -12EI_Y/L^3 \alpha_{Y1} & & -6EI_Y/L^2 \alpha_{Y2i} & \\ \hline & & & GI_T/L \beta & & \\ \hline & & 6EI_Y/L^2 \alpha_{Y2j} & & 2EI_Y/L \alpha_{Y3} & \\ \hline & -6EI_Z/L^2 \alpha_{Z2j} & & & & 2EI_Z/L \alpha_{Z3} \\ \hline \end{array}$$

Com:

- Descontinuidade em θ_Y só para o extremo i : $\alpha_{Y1} = 0.25$, $\alpha_{Y2i} = 0.50$, $\alpha_{Y2j} = 0.00$, $\alpha_{Y3} = 0.00$.
- Descontinuidade em θ_Z só para o extremo i : $\alpha_{Z1} = 0.25$, $\alpha_{Z2i} = 0.50$, $\alpha_{Z2j} = 0.00$, $\alpha_{Z3} = 0.00$.
- Descontinuidade em θ_Y só para o extremo j : $\alpha_{Y1} = 0.25$, $\alpha_{Y2i} = 0.00$, $\alpha_{Y2j} = 0.50$, $\alpha_{Y3} = 0.00$.
- Descontinuidade em θ_Z só para o extremo j : $\alpha_{Z1} = 0.25$, $\alpha_{Z2i} = 0.00$, $\alpha_{Z2j} = 0.50$, $\alpha_{Z3} = 0.00$.
- Descontinuidade em θ_Y para o extremo i e j : $\alpha_{Y1} = 0.00$, $\alpha_{Y2i} = 0.00$, $\alpha_{Y2j} = 0.00$, $\alpha_{Y3} = 0.00$.
- Descontinuidade em θ_Z para o extremo i e j : $\alpha_{Z1} = 0.00$, $\alpha_{Z2i} = 0.00$, $\alpha_{Z2j} = 0.00$, $\alpha_{Z3} = 0.00$.
- Descontinuidade em θ_X para um ou ambos os extremos : $\beta = 0.00$
- Sem qualquer descontinuidade :
 $\alpha_{Y1} = 1.00$, $\alpha_{Y2i} = 1.00$, $\alpha_{Y2j} = 1.00$, $\alpha_{Y3} = 1.00$.
 $\alpha_{Z1} = 1.00$, $\alpha_{Z2i} = 1.00$, $\alpha_{Z2j} = 1.00$, $\alpha_{Z3} = 1.00$.
 $\beta = 1.00$.

$$\mathbf{K}_L^{ji} = (\mathbf{K}_L^{ij})^T$$

Matriz de rigidez linear com factor de correcção ao esforço transversal e constante de torção para barra, por Petr Krysl [29]:

$$\mathbf{K}_L^{ii} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline AE/L & & & & & \\ \hline & GA/X_z'/L & & & & GA/X_z'/L/2 \\ \hline & & GA/X_y'/L & & -GA/X_y'/L/2 & \\ \hline & & & GI_T/L & & \\ \hline & & -GA/X_y'/L/2 & & EI_y/L + \tau_y & \\ \hline & GA/X_y'/L/2 & & & & EI_z/L + \tau_z \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{K}_L^{jj} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline AE/L & & & & & \\ \hline & GA/X_z'/L & & & & -GA/X_z'/L/2 \\ \hline & & GA/X_y'/L & & GA/X_y'/L/2 & \\ \hline & & & GI_T/L & & \\ \hline & & GA/X_y'/L/2 & & EI_y/L + \tau_y & \\ \hline & -GA/X_y'/L/2 & & & & EI_z/L + \tau_z \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{K}_L^{ij} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline -AE/L & & & & & \\ \hline & -GA/X_z'/L & & & & GA/X_z'/L/2 \\ \hline & & -GA/X_y'/L & & -GA/X_y'/L/2 & \\ \hline & & & -GI_T/L & & \\ \hline & & GA/X_y'/L/2 & & -EI_y/L + \tau_y & \\ \hline & -GA/X_y'/L/2 & & & & -EI_z/L + \tau_z \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{K}_L^{ji} = (\mathbf{K}_L^{ij})^T$$

Com: $\tau_y = GA/X_y'L/4$, $\tau_z = GA/X_z'L/4$.

Matriz de rigidez tangente com base em funções de forma e contribuindo para a sua não linearidade geométrica a acção dos esforços axiais e de flexão por torção (Chu & Rampetsreiter) [14]:

Para esta formulação a tracção é negativa e a compressão positiva, sendo:

P – Esforço axial.

Γ – Constante de empenamento (“warping constant”).

r_0 – Raio polar de giração da secção.

x_0, y_0 – Coordenadas do centro de corte com respeito ao centróide da secção.

Se $(ABS(P) > 0.0)$ então:

Se $(\Gamma = 0)$ então:

$$U_x = 0.0$$

$$Cot_x = 0.0$$

Se não:

$$U_x = \text{dsqrt}((G \cdot I_t - P \cdot r_0^2) / (E \cdot \Gamma))$$

Compressão:

$$Cot_x = (U_x \cdot L / 2) \cdot d\cos(U_x \cdot L / 2) / d\sin(U_x \cdot L / 2)$$

Tracção:

$$Cot_x = (U_x \cdot L / 2) \cdot dcosh(U_x \cdot L / 2) / dsinh(U_x \cdot L / 2)$$

$$U_q = \text{dsqrt}(dabs(P) / (E \cdot I_z) \cdot (1 + P \cdot x_0^2 / (G \cdot I_t - P \cdot r_0^2)))$$

$$U_y = \text{dsqrt}(dabs(P) / (E \cdot I_y))$$

Compressão:

$$Coty = (U_y \cdot L / 2) / dtan(U_y \cdot L / 2) \text{ e } Cotq = (U_q \cdot L / 2) / dtan(U_q \cdot L / 2)$$

Tracção:

$$Coty = (U_y \cdot L / 2) / dtanh(U_y \cdot L / 2) \text{ e } Cotq = (U_q \cdot L / 2) / dtanh(U_q \cdot L / 2)$$

Se $(abs(U_q \cdot L) < .09)$ então:

$$k_1 = 1 - (U_q \cdot L)^2 / 30. - 11 \cdot (U_q \cdot L)^4 / 25200. - 7 \cdot (U_q \cdot L)^6 / 756000.$$

$$k_2 = 1 - (U_q \cdot L)^2 / 60. - (U_q \cdot L)^4 / 8400. - (U_q \cdot L)^6 / 756000.$$

$$k_3 = 1 + (U_q \cdot L)^2 / 60. + 13 \cdot (U_q \cdot L)^4 / 25200. + 11 \cdot (U_q \cdot L)^6 / 756000.$$

$$k_9 = 1 - (U_q \cdot L)^2 / 10. - (U_q \cdot L)^4 / 8400. - (U_q \cdot L)^6 / 756000.$$

Se não:

$$k_1 = 0.25 \cdot ((U_q \cdot L / 2) \cdot (U_q \cdot L / 2) / (1 - Cotq) + Cotq)$$

$$k_2 = (U_q * L/2) * (U_q * L/2) / 3.0 / (1 - \cot q)$$

$$k_3 = 0.50 * ((U_q * L/2) * (U_q * L/2) / (1 - \cot q) - \cot q)$$

$$k_9 = (U_q * L) * (U_q * L) / 12.0 / (1 - \cot q) * \cot q$$

Se $(\text{abs}(U_y * L) < .09)$ então:

$$k_4 = 1 - (U_y * L)^{**2} / 30. - 11 * (U_y * L)^{**4} / 25200. - 7 * (U_y * L)^{**6} / 756000.$$

$$k_5 = 1 - (U_y * L)^{**2} / 60. - (U_y * L)^{**4} / 8400. - (U_y * L)^{**6} / 756000.$$

$$k_6 = 1 + (U_y * L)^{**2} / 60. + 13 * (U_y * L)^{**4} / 25200. + 11 * (U_y * L)^{**6} / 756000.$$

$$k_8 = 1 - (U_y * L)^{**2} / 10. - (U_y * L)^{**4} / 8400. - (U_y * L)^{**6} / 756000.$$

Se não:

$$k_4 = 0.25 * ((U_y * L/2) * (U_y * L/2) / (1 - \cot y) + \cot y)$$

$$k_5 = (U_y * L/2) * (U_y * L/2) / 3.0 / (1 - \cot y)$$

$$k_6 = 0.50 * ((U_y * L/2) * (U_y * L/2) / (1 - \cot y) - \cot y)$$

$$k_8 = (U_y * L) * (U_y * L) / 12.0 / (1 - \cot y) * \cot y$$

Se $(\Gamma = 0 \text{ ou } U_x = 0.0)$ então:

$$k_7 = (G * I_t - P * r_0^2) / L + (k_9 + 2 * P / L) * x_0 * x_0$$

Se não:

$$k_7 = (G * I_t - P * r_0^2) / L / (1 - 2 / (U_x * L) * \tanh(U_x * L/2)) + (k_9 + 2 * P / L) * x_0 * x_0$$

Se não (esforço axial nulo ou estando em análise linear) :

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = k_8 = k_9 = 1.0, k_7 = G * I_x / L$$

$$K_T^{ii} =$$

AE/L					
	$12EI_z/L^3 k_9$				$6EI_z/L^2 k_2$
		$12EI_y/L^3 k_8$		$-6EI_y/L^2 k_5$	
			K_7		
		$-6EI_y/L^2 k_5$		$4EI_y/L k_4$	
	$6EI_z/L^2 k_2$				$4EI_z/L k_1$

$$\mathbf{K}_T^{ij} =$$

AE/L				
	$12EI_z/L^3 k_9$			$-6EI_z/L^2 k_2$
		$12EI_y/L^3 k_8$		$6EI_y/L^2 k_5$
			K7	
		$6EI_y/L^2 k_5$		$4EI_y/L k_4$
	$-6EI_z/L^2 k_2$			$4EI_z/L k_1$

$$\mathbf{K}_T^{ij} =$$

-AE/L				
	$-12EI_z/L^3 k_9$			$6EI_z/L^2 k_2$
		$-12EI_y/L^3 k_8$		$-6EI_y/L^2 k_5$
			K7	
		$6EI_y/L^2 k_5$		$2EI_y/L k_6$
	$-6EI_z/L^2 k_2$			$2EI_z/L k_3$

$$\mathbf{K}_T^{ji} = (\mathbf{K}_T^{ij})^T$$

Em todas as submatrizes se $(\text{abs}(P) > 0.0)$ então:

$$K(2,4) = x_0 * (K(2,2) + P/L)$$

$$K(4,2) = x_0 * (K(2,2) + P/L)$$

$$K(4,6) = -x_0 * K(2,6)$$

$$K(6,4) = -x_0 * K(6,2)$$

Matriz de rigidez tangente com base em funções de estabilidade com contributo exclusivo do esforço axial (José Espada) [21]:

Se (ABS(P)>0.0) então :

$$roY = -P/(\pi^2 \pi^* E^* I_y / L^2), roZ = -P/(\pi^2 \pi^* E^* I_z / L^2)$$

Se (V≠0.0) então:

$$niuY = E^* I_y / (G^* A^* L^2), niuZ = E^* I_z / (G^* A^* L^2)$$

$$roY_ = roY / (1 - niuY * \pi^2 \pi^* roY), roZ_ = roZ / (1 - niuZ * \pi^2 \pi^* roZ)$$

Se não:

$$niuY = 0.0, niuZ = 0.$$

$$roY_ = roY, roZ_ = roZ$$

Se (roY_>0.0 ou roZ_>0.0) então:

$$alfaY = \pi/2 * \text{SQRT}(roY_), alfaZ = \pi/2 * \text{SQRT}(roZ_)$$

Se (V≠0.0) então:

$$alfaY_ = alfaY / (1 + 4 * niuY * alfaY * alfaY), alfaZ_ = alfaZ / (1 + 4 * niuZ * alfaZ * alfaZ)$$

Se não:

$$alfaY_ = alfaY, alfaZ_ = alfaZ$$

$$sY_ = (1 - 2 * alfaY_ * \text{DCOS}(2 * alfaY) / \text{DSIN}(2 * alfaY)) / (\text{DSIN}(alfaY) / \text{DCOS}(alfaY) - alfaY_ * (alfaY * alfaY) / alfaY_)$$

$$sY = sY_ * roY / roY_$$

$$tY = (2 * alfaY_ - \text{DSIN}(2 * alfaY)) / (\text{DSIN}(2 * alfaY) - 2 * alfaY_ * \text{DCOS}(2 * alfaY))$$

$$T1y_ = sY_ * (1 + tY) / 6 - alfaY * alfaY / 3.$$

$$T2y_ = sY_ * (1 + tY) / 6.$$

$$T3y_ = sY_ / 4.$$

$$T4y_ = sY_ * tY / 2.$$

$$sZ_ = (1 - 2 * alfaZ_ * \text{DCOS}(2 * alfaZ) / \text{DSIN}(2 * alfaZ)) / (\text{DSIN}(alfaZ) / \text{DCOS}(alfaZ) - alfaZ_ * (alfaZ * alfaZ) / alfaZ_)$$

$$sZ = sZ_ * roZ / roZ_$$

$$tZ = (2 * alfaZ_ - \text{DSIN}(2 * alfaZ)) / (\text{DSIN}(2 * alfaZ) - 2 * alfaZ_ * \text{DCOS}(2 * alfaZ))$$

$$T1z_ = sZ_ * (1 + tZ) / 6 - alfaZ * alfaZ / 3.$$

$$T2z_ = sZ_*(1+tZ)/6.$$

$$T3z_ = sZ_/4.$$

$$T4z_ = sZ_*tZ/2.$$

Se (roY_<0 ou roZ_<0.) então:

$$gamaY = \pi/2*SQRT(-roY_)$$

$$gamaZ = \pi/2*SQRT(-roZ_)$$

Se (V≠0.) então

$$gamaY_ = gamaY/(1-4*niuY*gamaY*gamaY)$$

$$gamaZ_ = gamaZ/(1-4*niuZ*gamaZ*gamaZ)$$

Se não:

$$gamaY_ = gamaY$$

$$gamaZ_ = gamaZ$$

$$sY_ = (1-2*gamaY_*DCOSH(2*gamaY)/DSINH(2*gamaY))/ \& \\ (DSINH(gamaY)/DCOSH(gamaY)-gamaY_)*(gamaY*gamaY)/gamaY_$$

$$sY = sY_*roY/roY_$$

$$tY = (2*gamaY_ - DSINH(2*gamaY))/ \& \\ (DSINH(2*gamaY) - 2*gamaY_*DCOSH(2*gamaY))$$

$$T1y_ = sY_*(1+tY)/6.+gamaY*gamaY/3.$$

$$T2y_ = sY_*(1+tY)/6.$$

$$T3y_ = sY_/4.$$

$$T4y_ = sZ_*tY/2.$$

$$sZ_ = (1-2*gamaZ_*DCOSH(2*gamaZ)/DSINH(2*gamaZ))/ \& \\ (DSINH(gamaZ)/DCOSH(gamaZ)-gamaZ_)*(gamaZ*gamaZ)/gamaZ_$$

$$sZ = sZ_*roZ/roZ_$$

$$tZ = (2*gamaZ_ - DSINH(2*gamaZ))/ \& \\ (DSINH(2*gamaZ) - 2*gamaZ_*DCOSH(2*gamaZ))$$

$$T1z_ = sZ_*(1+tZ)/6.+gamaZ*gamaZ/3.$$

$$T2z_ = sZ_*(1+tZ)/6.$$

$$T3z_ = sZ_/4.$$

$$T4z_ = sZ_*tZ/2.$$

$$T1y = T1y_*roY/roY_ , T2y = T2y_*roY/roY_$$

$$T3y = T3y_*roY/roY_ , T4y = T4y_*roY/roY_$$

$$T1z = T1z_*roZ/roZ_ , T2z = T2z_*roZ/roZ_$$

$$T3z = T3z_roZ/roZ_ , T4z = T4z_roZ/roZ_$$

Se não (esforço axial nulo ou estando em análise linear) :

$$T1y = T2y = T3y = T4y = T1z = T2z = T3z = T4z = 1$$

$$\mathbf{K}_T^{ii} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline AE/L & & & & \\ \hline & 12EI_z/L^3 T1z & & & 6EI_z/L^2 T2z \\ \hline & & 12EI_y/L^3 T1y & & -6EI_y/L^2 T2y \\ \hline & & & GI_T/L & \\ \hline & & -6EI_y/L^2 T1y & & 4EI_y/L T3y \\ \hline & 6EI_z/L^2 T2z & & & 4EI_z/L T3z \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{K}_T^{jj} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline AE/L & & & & \\ \hline & 12EI_z/L^3 T1z & & & -6EI_z/L^2 T2z \\ \hline & & 12EI_y/L^3 T1y & & 6EI_y/L^2 T2y \\ \hline & & & GI_T/L & \\ \hline & & 6EI_y/L^2 T1y & & 4EI_y/L T3y \\ \hline & -6EI_z/L^2 T2z & & & 4EI_z/L T3z \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{K}_T^{ij} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -AE/L & & & & \\ \hline & -12EI_z/L^3 T1z & & & 6EI_z/L^2 T2z \\ \hline & & -12EI_y/L^3 T1y & & -6EI_y/L^2 T2y \\ \hline & & & GI_T/L & \\ \hline & & 6EI_y/L^2 T1y & & 2EI_y/L T4y \\ \hline & -6EI_z/L^2 T2z & & & 2EI_z/L T4z \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{K}_T^{ji} = (\mathbf{K}_T^{ij})^T$$

Matriz de rigidez linear e não linear geométrica em que não se considera o contributo do esforço transversal para a deformação da barra (El-Metwally & Chen) [20]:

$$\mathbf{K}_T^{ii} = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 \\ 0 & 0 & 12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_T/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 & 4EI_y/L & 0 \\ 0 & 6EI_z/L^2 & 0 & 0 & 0 & 4EI_z/L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_T^{jj} = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & -6EI_z/L^2 \\ 0 & 0 & 12EI_y/L^3 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_T/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 & 4EI_y/L & 0 \\ 0 & -6EI_z/L^2 & 0 & 0 & 0 & 4EI_z/L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_T^{ij} = \begin{bmatrix} -AE/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 \\ 0 & 0 & -12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -GI_T/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 & 2EI_y/L & 0 \\ 0 & -6EI_z/L^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_z/L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_T^{ji} = (\mathbf{K}_T^{ij})^T$$

Sendo:

Se $(ABS(P)>0.0)$ então :

Com esforço axial de tracção ($P>0$):

$$Ty1=(Ky*L)*(Ky*L)*(Ky*L)*DSINH(Ky*L)/(12*Ty)$$

$$Tz1=(Kz*L)*(Kz*L)*(Kz*L)*DSINH(Kz*L)/(12*Tz)$$

$$\begin{aligned}Ty2 &= (Ky^*L)*(Ky^*L)*(DCOSH(Ky^*L)-1)/(6*Ty) \\Tz2 &= (Kz^*L)*(Kz^*L)*(DCOSH(Kz^*L)-1)/(6*Tz) \\Ty3 &= (Ky^*L)*(Ky^*L*DCOSH(Ky^*L)-DSINH(Ky^*L))/(4*Ty) \\Tz3 &= (Kz^*L)*(Kz^*L*DCOSH(Kz^*L)-DSINH(Kz^*L))/(4*Tz) \\Ty4 &= (Ky^*L)*(DSINH(Ky^*L)-Ky^*L)/(2*Ty) \\Tz4 &= (Kz^*L)*(DSINH(Kz^*L)-Kz^*L)/(2*Tz)\end{aligned}$$

Com esforço axial de compressão ($P < 0$):

$$\begin{aligned}Ty1 &= (Ky^*L)*(Ky^*L)*(Ky^*L)*DSIN(Ky^*L)/(12*Cy) \\Tz1 &= (Kz^*L)*(Kz^*L)*(Kz^*L)*DSIN(Kz^*L)/(12*Cz) \\Ty2 &= (Ky^*L)*(Ky^*L)*(1-DCOS(Ky^*L))/(6*Cy) \\Tz2 &= (Kz^*L)*(Kz^*L)*(1-DCOS(Kz^*L))/(6*Cz) \\Ty3 &= (Ky^*L)*(DSIN(Ky^*L)-Ky^*L*DCOS(Ky^*L))/(4*Cy) \\Tz3 &= (Kz^*L)*(DSIN(Kz^*L)-Kz^*L*DCOS(Kz^*L))/(4*Cz) \\Ty4 &= (Ky^*L)*(Ky^*L-DSIN(Ky^*L))/(2*Cy) \\Tz4 &= (Kz^*L)*(Kz^*L-DSIN(Kz^*L))/(2*Cz)\end{aligned}$$

Sendo:

$$\begin{aligned}Ky &= DSQRT(DABS(P)/(E*Iy)) \\Kz &= DSQRT(DABS(P)/(E*Iz)) \\Cy &= 2-2*DCOS(Ky^*L)-Ky^*L*DSIN(Ky^*L) \\Cz &= 2-2*DCOS(Kz^*L)-Kz^*L*DSIN(Kz^*L) \\Ty &= 2-2*DCOSH(Ky^*L)+Ky^*L*DSINH(Ky^*L) \\Tz &= 2-2*DCOSH(Kz^*L)+Kz^*L*DSINH(Kz^*L)\end{aligned}$$

Se não (esforço axial nulo ou estando em análise linear) :

$$Ty1 = Tz1 = Ty2 = Tz2 = Ty3 = Tz3 = Ty4 = Tz4 = 1$$

Matriz de rigidez tangente de viga-coluna em que se considera o efeito da flexão na rigidez axial da barra, o efeito da força axial na rigidez de flexão e na rigidez de oposição à translação (Ekhande & Selvappalam) [19]:

$$\mathbf{K}_T^{ii} = \begin{bmatrix} AE/L & & & & \\ & 12EI_z/L^3 s1 & & & 6EI_z/L^2 s7 \\ & & 12EI_y/L^3 s6 & & -6EI_y/L^2 s9 \\ & & & GI_T/L & \\ & & -6EI_y/L^2 s8 & & 4EI_y/L s4 \\ & 6EI_z/L^2 s6 & & & 4EI_z/L s2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_T^{jj} = \begin{bmatrix} AE/L & & & & \\ & 12EI_z/L^3 s1 & & & -6EI_z/L^2 s7 \\ & & 12EI_y/L^3 s6 & & 6EI_y/L^2 s9 \\ & & & GI_T/L & \\ & & 6EI_y/L^2 s8 & & 4EI_y/L s4 \\ & -6EI_z/L^2 s6 & & & 4EI_z/L s2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_T^{ij} = \begin{bmatrix} -AE/L & & & & \\ & -12EI_z/L^3 s1 & & & 6EI_z/L^2 s7 \\ & & 12EI_y/L^3 s6 & -GI_T/L & -6EI_y/L^2 s9 \\ & & & & \\ & & 6EI_y/L^2 s8 & & 2EI_y/L s5 \\ & -6EI_z/L^2 s6 & & & 2EI_z/L s3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_T^{ji} = (\mathbf{K}_T^{ij})^T$$

Se $(ABS(P)>0.0)$ então :

$$\alpha = \sqrt{\text{abs}(P/(E \cdot I_z))}, \quad \beta = \sqrt{\text{abs}(P/(E \cdot I_y))}$$

Se $(P>0)$ então:

$$bL = \beta L$$

$$H_y = bL * (M_y A * M_y A + M_y B * M_y B) * (\cosh(bL) / \sinh(bL) + bL * (1 / \sinh(bL)) * (1 / \sinh(bL))) - & \\ 2 * (M_y A + M_y B) * (M_y A + M_y B) + 2 * bL * M_y A * M_y B * (1 / \sinh(bL)) * (1 + bL * \cosh(bL) / \sinh(bL))$$

$$aL = \alpha L$$

$$H_z = aL * (M_z A * M_z A + M_z B * M_z B) * (\cosh(aL) / \sinh(aL) + aL * (1 / \sinh(aL)) * (1 / \sinh(aL))) - & \\ 2 * (M_z A + M_z B) * (M_z A + M_z B) + 2 * aL * M_z A * M_z B * (1 / \sinh(aL)) * (1 + aL * \cosh(aL) / \sinh(aL))$$

$$s1 = 1 / (1.0 - E * A / (4.0 * P * P * P * L * L)) * (H_y + H_z)$$

$$s2 = 0.25 * aL * (-\sinh(aL) + aL * \cosh(aL)) / (2 * \cosh(aL) + aL * \sinh(aL))$$

$$s3 = 0.50 * aL * (-aL + \sinh(aL)) / (2 * \cosh(aL) + aL * \sinh(aL))$$

$$s4 = 0.25 * bL * (-\sinh(bL) + bL * \cosh(bL)) / (2 * \cosh(bL) + bL * \sinh(bL))$$

$$s5 = 0.50 * bL * (-bL + \sinh(bL)) / (2 * \cosh(bL) + bL * \sinh(bL))$$

$$s6 = (1/6.0) * aL * aL * (-1 + \cosh(aL)) / (2 * \cosh(aL) + aL * \sinh(aL))$$

$$s7 = s6 + aL * aL / 12.0$$

$$s8 = (1/6.0) * bL * bL * (-1 + \cosh(bL)) / (2 * \cosh(bL) + bL * \sinh(bL))$$

$$s9 = (2/3.0) * s4 + (1/3.0) * s5 + bL * bL / 12.0$$

Se (P<0) então:

$$bL = \beta L$$

$$H_y = bL * (M_y A * M_y A + M_y B * M_y B) * (\cosh(bL) / \sinh(bL) + bL * (1 / \sinh(bL)) * (1 / \sinh(bL))) - & \\ 2 * (M_y A + M_y B) * (M_y A + M_y B) + 2 * bL * M_y A * M_y B * (1 / \sinh(bL)) * (1 + bL * \cosh(bL) / \sinh(bL))$$

$$aL = \alpha L$$

$$H_z = aL * (M_z A * M_z A + M_z B * M_z B) * (\cosh(aL) / \sinh(aL) + aL * (1 / \sinh(aL)) * (1 / \sinh(aL))) - & \\ 2 * (M_z A + M_z B) * (M_z A + M_z B) + 2 * aL * M_z A * M_z B * (1 / \sinh(aL)) * (1 + aL * \cosh(aL) / \sinh(aL))$$

$$s1 = 1 / (1.0 + E * A / (-4.0 * P * P * P * L * L)) * (H_y + H_z)$$

$$s2 = 0.25 * aL * (\sinh(aL) - aL * \cosh(aL)) / (2 * \cosh(aL) - aL * \sinh(aL))$$

$$s3 = 0.50 * aL * (aL - \sinh(aL)) / (2 * \cosh(aL) - aL * \sinh(aL))$$

$$s4 = 0.25 * bL * (\sinh(bL) - bL * \cosh(bL)) / (2 * \cosh(bL) - bL * \sinh(bL))$$

$$s5 = 0.50 * bL * (bL - \sinh(bL)) / (2 * \cosh(bL) - bL * \sinh(bL))$$

$$s6 = (1/6.0) * aL * aL * (1 - \cosh(aL)) / (2 * \cosh(aL) - aL * \sinh(aL))$$

$$s7 = s6 - aL * aL / 12.0$$

$$s8 = (1/6.0) * bL * bL * (1 - \cosh(bL)) / (2 * \cosh(bL) - bL * \sinh(bL))$$

$$s9 = (2/3.0) * s4 + (1/3.0) * s5 - bL * bL / 12.0$$

Se não (esforço axial nulo ou estando em análise linear):

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = s_7 = s_8 = s_9 = 1.0$$

Matriz constituintes da matriz de rigidez, formulação Euleriana, (Kassimali & Abbasnia) [27] (não se vão definir aqui todas as variáveis empregues, podendo as mesmas ser recolhidas na referência dada):

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} & & & & & 1 \\ -1/(1+\delta) & 1/(1+\delta) & & & & \\ & & -1/(1+\delta) & -1/(1+\delta) & & \\ & & & & -1 & \\ & & 1 & & & \\ 1 & & & & & \\ & & & & & -1 \\ -1/(1+\delta) & 1/(1+\delta) & & & & \\ & & 1/(1+\delta) & 1/(1+\delta) & & \\ & & & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & 1 & & & & \end{bmatrix}$$

δ - variação do comprimento da barra;

$$\mathbf{K}_G = EI_n/L \begin{bmatrix} \varepsilon_3 c_{13} + G_{13}^2/\pi^2 H & \varepsilon_3 c_{23} + G_{13} G_{23}/\pi^2 H & G_{13} G_{12}/\pi^2 H & G_{23} G_{22}/\pi^2 H & 0 & G_{13}/H \\ \varepsilon_3 c_{23} + G_{13} G_{23}/\pi^2 H & \varepsilon_3 c_{13} + G_{23}^2/\pi^2 H & G_{23} G_{12}/\pi^2 H & G_{23} G_{22}/\pi^2 H & 0 & G_{23}/H \\ G_{13} G_{12}/\pi^2 H & G_{23} G_{12}/\pi^2 H & \varepsilon_3 c_{13} + G_{23}^2/\pi^2 H & \varepsilon_3 c_{13} + G_{23}^2/\pi^2 H & 0 & G_{12}/H \\ G_{13} G_{22}/\pi^2 H & G_{23} G_{22}/\pi^2 H & \varepsilon_2 c_{22} + G_{12} G_{22}/\pi^2 H & \varepsilon_2 c_{12} + G_{22}^2/\pi^2 H & 0 & G_{22}/H \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_t/EI_n & 0 \\ G_{13}/H & G_{23}/H & G_{12}/H & G_{22}/H & 0 & \pi^2/H \end{bmatrix}$$

Matriz geométrica em que se considera apenas o contributo do esforço axial para a sua construção (Portel & Powell) [46]:

$$\mathbf{K}_G^{ii} = N$$

1/L				
	1.2/L			0.1
		1.2/L		-0.1
		-0.1		0.4L/3
	0.1			0.4L/3

$$\mathbf{K}_G^{ij} = N$$

1/L				
	1.2/L			-0.1
		1.2/L		0.1
		0.1		0.4L/3
	-0.1			0.4L/3

$$\mathbf{K}_G^{ji} = N$$

-1/L				
	-1.2/L			0.1
		-1.2/L		-0.1
		0.1		-0.1L/3
	-0.1			-0.1L/3

$$\mathbf{K}_G^{ji} = (\mathbf{K}_G^{ij})^T$$

Sendo:

N - Esforço axial instalado na barra.

Matriz geométrica, para o plano em versão condensada, em que se considera apenas o contributo do esforço axial para a sua construção tendo em vista a instabilidade axial (Tebedge & Tall) [44]:

$$\mathbf{K}_G = N/L$$

	6/5	L/10		-6/5	L/10
	L/10	$2L^2/15$		-L/10	$-L^2/30$
	-6/5	-L/10		6/5	-L/10
	L/10	$-L^2/30$		-L/10	$2L^2/15$

Matriz geométrica, para o plano em versão condensada, em que se considera apenas o contributo do esforço axial para a sua construção tendo em vista a instabilidade à torção (Tebedge & Tall) [44]:

$$\mathbf{K}_G = NI_0/LA$$

	6/5	-L/10		-6/5	-L/10
	-L/10	$2L^2/15$		L/10	$L^2/30$
	-6/5	L/10		6/5	L/10
	-L/10	$L^2/30$		L/10	$2L^2/15$

Matriz geométrica, para o plano em versão condensada, em que se considera apenas o contributo do esforço axial para a sua construção tendo em vista a instabilidade torcional-lateral (Tebedge & Tall) [44]:

Sendo I_0 o momento polar de inércia e M_{oz} o momento torsor no centro de torção da secção, V o esforço transversal e M_x o momento torsor.

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{M}_{oz}/30L$$

		-36	3L			36	3L
		-33L	$4L^2$			33L	$-L^2$
-36	-33L			36	-3L		
3L	$4L^2$			-3L	$-L^2$		
		36	-3L			-36	-3L
		-3L	$-L^2$			33L	$4L^2$
36	3L			-36	33L		
3L	$-L^2$			-3L	$4L^2$		

$$+ \mathbf{V}/60$$

		30	-3L			30	3L
		21L	$-2L^2$			9L	L^2
30	21L			-30	9L		
-3L	$-2L^2$			3L	$-L^2$		
		-30	3L			-30	-3L
		9L	$-L^2$			21L	$2L^2$
30	9L			-30	21L		
3L	L^2			-3L	$2L^2$		

Matriz geométrica, para o plano em versão condensada, em que se considera apenas o contributo do esforço axial para a sua construção tendo em vista a instabilidade lateral-torcional (Tebedge & Tall) [44]:

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{M}_X/L$$

			-1				1
		1				-1	$L/2$
	1				-1		
-1					$-L/2$		
							-1
		-1	$-L/2$			1	
	-1				1		
1	$L/2$			-1			

Matriz geométrica suplementar $[K_{G2}]$ que é função da deformação do elemento na configuração corrente e em que se considera o contributo do esforço transversal para a deformação da barra (Nedergaard & Pederson) [34]:

Submatriz K_{ii} :

$$\begin{aligned} K_{ii}(1,2) &= -D^{**}(-1)*ROZ^{**2}*E*A*(Q(6)+Q(12))*(1/10.) \\ K_{ii}(1,3) &= D^{**}(-1)*ROY^{**2}*E*A*(Q(5)+Q(11))*(1/10.) \\ K_{ii}(1,5) &= -ROY^{**2}*E*A*(ETY^{**2}*Q(5)*12-ETY^{**2}*Q(11)*12+ETY*Q(5)*2- \\ & \quad ETY*Q(11)*2+Q(5)*(2/15.)-Q(11)*(1/30.)) \\ K_{ii}(1,6) &= -ROZ^{**2}*E*A*(ETZ^{**2}*Q(6)*12-ETZ^{**2}*Q(12)*12+ETZ*Q(6)*2- \\ & \quad ETZ*Q(12)*2+Q(6)*(2/15.)-Q(12)*(1/30.)) \\ K_{ii}(2,1) &= -D^{**}(-1)*ROZ^{**2}*E*A*(Q(6)+Q(12))*(1/10.) \\ K_{ii}(3,1) &= D^{**}(-1)*ROY^{**2}*E*A*(Q(5)+Q(11))*(1/10.) \\ K_{ii}(5,1) &= -ROY^{**2}*E*A*(ETY^{**2}*Q(5)*12-ETY^{**2}*Q(11)*12+ETY*Q(5)*2- \\ & \quad ETY*Q(11)*2+Q(5)*(2/15.)-Q(11)*(1/30.)) \\ K_{ii}(6,1) &= -ROZ^{**2}*E*A*(ETZ^{**2}*Q(6)*12-ETZ^{**2}*Q(12)*12+ETZ*Q(6)*2-ETZ* \\ & \quad Q(12)*2+Q(6)*(2/15.)-Q(12)*(1/30.)) \end{aligned}$$

Submatriz K_{jj} :

$$\begin{aligned} K_{jj}(1,2) &= -D^{**}(-1)*ROZ^{**2}*E*A*(Q(6)+Q(12))*(1/10.) \\ K_{jj}(1,3) &= D^{**}(-1)*ROY^{**2}*E*A*(Q(5)+Q(11))*(1/10.) \\ K_{jj}(1,5) &= -ROY^{**2}*E*A*(ETY^{**2}*Q(5)*12-ETY^{**2}*Q(11)*12+ETY*Q(5)*2- \\ & \quad ETY*Q(11)*2+Q(5)*(1/30.)-Q(11)*(2/15.)) \\ K_{jj}(1,6) &= -ROZ^{**2}*E*A*(ETZ^{**2}*Q(6)*12-ETZ^{**2}*Q(12)*12+ETZ*Q(6)*2- \\ & \quad ETZ*Q(12)*2+Q(6)*(1/30.)-Q(12)*(2/15.)) \\ K_{jj}(2,1) &= -D^{**}(-1)*ROZ^{**2}*E*A*(Q(6)+Q(12))*(1/10.) \\ K_{jj}(3,1) &= D^{**}(-1)*ROY^{**2}*E*A*(Q(5)+Q(11))*(1/10.) \\ K_{jj}(5,1) &= -ROY^{**2}*E*A*(ETY^{**2}*Q(5)*12-ETY^{**2}*Q(11)*12+ETY*Q(5)*2- \\ & \quad ETY*Q(11)*2+Q(5)*(1/30.)-Q(11)*(2/15.)) \\ K_{jj}(6,1) &= -ROZ^{**2}*E*A*(ETZ^{**2}*Q(6)*12-ETZ^{**2}*Q(12)*12+ETZ*Q(6)*2- \\ & \quad ETZ*Q(12)*2+Q(6)*(1/30.)-Q(12)*(2/15.)) \end{aligned}$$

Submatriz K_{ij} :

$$\begin{aligned} K_{ij}(1,2) &= D^{**}(-1)*ROZ^{**2}*E*A*(Q(6)+Q(12))*(1/10.) \\ K_{ij}(1,3) &= -D^{**}(-1)*ROY^{**2}*E*A*(Q(5)+Q(11))*(1/10.) \\ K_{ij}(1,5) &= ROY^{**2}*E*A*(ETY^{**2}*Q(5)*12-ETY^{**2}*Q(11)*12+ETY*Q(5)*2- \\ & \quad ETY*Q(11)*2+Q(5)*(1/30.)-Q(11)*(2/15.)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{ij}(1,6) &= ROZ^{**2}E^*A^*(ETZ^{**2}Q(6)^{*12}-ETZ^{**2}Q(12)^{*12}+ETZ^*Q(6)^*2- \\
 &ETZ^*Q(12)^*2+Q(6)^*(1/30.)-Q(12)^*(2/15.)) \\
 K_{ij}(2,1) &= D^{**}(-1)^*ROZ^{**2}E^*A^*(Q(6)+Q(12))^*(1/10.) \\
 K_{ij}(3,1) &= -D^{**}(-1)^*ROY^{**2}E^*A^*(Q(5)+Q(11))^*(1/10.) \\
 K_{ij}(5,1) &= ROY^{**2}E^*A^*(ETY^{**2}Q(5)^{*12}-ETY^{**2}Q(11)^{*12}+ETY^*Q(5)^*2- \\
 &ETY^*Q(11)^*2+Q(5)^*(2/15.)-Q(11)^*(1/30.)) \\
 K_{ij}(6,1) &= ROZ^{**2}E^*A^*(ETZ^{**2}Q(6)^{*12}-ETZ^{**2}Q(12)^{*12}+ETZ^*Q(6)^*2- \\
 &ETZ^*Q(12)^*2+Q(6)^*(2/15.)-Q(12)^*(1/30.))
 \end{aligned}$$

Submatriz Kij:

$$K_{ji} = K_{ij}^T$$

Vector F_C:

$$\begin{aligned}
 F(2) &= -ROZ^{**2}D^{**}(-2)^*P^*(dQ(8)^*ETZ^*2+dQ(8)^*(1/5.)-dQ(2)^*ETZ^*2-dQ(2)^*(1/5.))*6 \\
 F(3) &= -D^{**}(-2)^*ROY^{**2}P^*(dQ(9)^*ETY^*2+dQ(9)^*(1/5.)-dQ(3)^*ETY^*2-dQ(3)^*(1/5.))*6 \\
 F(5) &= -D^{**}(-1)^*ROY^{**2}P^*(dQ(9)^*ETY^{**2*72}+dQ(9)^*ETY^*6-dQ(9)^*(1/10.)+ \\
 &dQ(3)^*ETY^{**2*72}+dQ(3)^*ETY^*18+dQ(3)^*(11/10.)) \\
 F(6) &= ROZ^{**2}D^{**}(-1)^*P^*(dQ(8)^*ETZ^{**2*72}+dQ(8)^*ETZ^*6-dQ(8)^*(1/10.)+ \\
 &dQ(2)^*ETZ^{**2*72}+dQ(2)^*ETZ^*18+dQ(2)^*(11/10.)) \\
 F(8) &= ROZ^{**2}D^{**}(-2)^*P^*(dQ(8)^*ETZ^*2+dQ(8)^*(1/5.)-dQ(2)^*ETZ^*2-dQ(2)^*(1/5.))*6 \\
 F(9) &= D^{**}(-2)^*ROY^{**2}P^*(dQ(9)^*ETY^*2+dQ(9)^*(1/5.)-dQ(3)^*ETY^*2-dQ(3)^*(1/5.))*6 \\
 F(11) &= D^{**}(-1)^*ROY^{**2}P^*(dQ(9)^*ETY^{**2*72}+dQ(9)^*ETY^*18+dQ(9)^*(11/10.)+ \\
 &dQ(3)^*ETY^{**2*72}+dQ(3)^*ETY^*6-dQ(3)^*(1/10.)) \\
 F(12) &= -ROZ^{**2}D^{**}(-1)^*P^*(dQ(8)^*ETZ^{**2*72}+dQ(8)^*ETZ^*18+dQ(8)^*(11/10.)+ \\
 &dQ(2)^*ETZ^{**2*72}+dQ(2)^*ETZ^*6-dQ(2)^*(1/10.))
 \end{aligned}$$

Sendo:

$$ETY = E^*I_y / (k_z^*G^*A^*D^*D)$$

$$ETZ = E^*I_z / (k_y^*G^*A^*D^*D)$$

$$ROY = 1 / (1 + 12^*ETY)$$

$$ROZ = 1 / (1 + 12^*ETZ)$$

DQ – deslocamentos incrementais (eixos locais).

Q – Deslocamentos totais (eixos locais)

D – Comprimento do elemento.

P – Esforço Axial.

Matrizes $[K_1]$ e $[K_2]$ que incluem os termos lineares e funções quadráticas dos deslocamentos incrementais (Chajes & Churchill) [6]:

Englobam-se apenas os termos não nulos na versão espacial adaptada da plana, sendo $Q(..)$ o vector deslocamentos (incrementais ou totais conforme o procedimento).

Matriz K_1

$$y1=6*(Q(08)-Q(02))/05.0/L/L-(Q(06)+ Q(12))/10.0/L$$

$$y2= (Q(08)-Q(02))/10.0/L +(Q(12)-4.0*Q(06))/30.0$$

$$y3= (Q(08)-Q(02))/10.0/L +(Q(06)-4.0*Q(12))/30.0$$

$$z1=6*(Q(09)-Q(03))/05.0/L/L-(Q(05)+ Q(11))/10.0/L$$

$$z2= (Q(09)-Q(03))/10.0/L +(Q(11)-4.0*Q(05))/30.0$$

$$z3= (Q(09)-Q(03))/10.0/L +(Q(05)-4.0*Q(11))/30.0$$

$$u4=6*(Q(07)-Q(01))/05.0/L/L$$

$$u5=2*(Q(07)-Q(01))/15.0$$

$$u6= -(Q(07)-Q(01))/30.0$$

$$u7= (Q(07)-Q(01))/10.0/L$$

K_{1ii} :

$$K_{1ii}(1,2) = y1, \quad K_{1ii}(2,1) = y1$$

$$K_{1ii}(1,3) = z1, \quad K_{1ii}(3,1) = z1$$

$$K_{1ii}(1,5) = -z2, \quad K_{1ii}(5,1) = -z2$$

$$K_{1ii}(1,6) = y2, \quad K_{1ii}(6,1) = y2$$

$$K_{1ii}(2,2) = u4, \quad K_{1ii}(3,3) = u4$$

$$K_{1ii}(2,6) = -u7, \quad K_{1ii}(6,2) = -u7$$

$$K_{1ii}(3,5) = u7, \quad K_{1ii}(5,3) = u7$$

$$K_{1ii}(5,5) = u5, \quad K_{1ii}(6,6) = u5$$

$$K_{1ii}=A*E/2.0*K_{1ii}$$

K_{1jj} :

$$K_{1jj}(1,2) = y1, \quad K_{1jj}(2,1) = y1$$

$$K_{1jj}(1,3) = z1, \quad K_{1jj}(3,1) = z1$$

$$K_{1jj}(1,5) = z_3, \quad K_{1jj}(5,1) = z_3$$

$$K_{1jj}(1,6) = -y_3, \quad K_{1jj}(6,1) = -y_3$$

$$K_{1jj}(2,2) = u_4, \quad K_{1jj}(3,3) = u_4$$

$$K_{1jj}(2,6) = u_7, \quad K_{1jj}(6,2) = u_7$$

$$K_{1jj}(3,5) = -u_7, \quad K_{1jj}(5,3) = -u_7$$

$$K_{1jj}(5,5) = u_5, \quad K_{1jj}(6,6) = u_5$$

$$K_{1jj} = A \cdot E / 2.0 \cdot K_{1jj}$$

K_{1ij} :

$$K_{1ij}(1,2) = -y_1, \quad K_{1ij}(2,1) = -y_1$$

$$K_{1ij}(1,3) = -z_1, \quad K_{1ij}(3,1) = -z_1$$

$$K_{1ij}(1,5) = -z_3, \quad K_{1ij}(5,1) = z_2$$

$$K_{1ij}(1,6) = y_3, \quad K_{1ij}(6,1) = y_2$$

$$K_{1ij}(2,2) = -u_4, \quad K_{1ij}(3,3) = -u_4$$

$$K_{1ij}(2,6) = -u_7, \quad K_{1ij}(6,2) = u_7$$

$$K_{1ij}(3,5) = u_7, \quad K_{1ij}(5,3) = -u_7$$

$$K_{1ij}(5,5) = u_6, \quad K_{1ij}(6,6) = u_6$$

$$K_{1ij} = A \cdot E / 2.0 \cdot K_{1ij}$$

$$K_{1ji} = K_{1ij}^T$$

Matriz K_2

Parâmetros Y_i 's:

$$y_1 = (180 \cdot Q(6) \cdot Q(6) / L + 180 \cdot Q(12) \cdot Q(12) / L + 432 \cdot (Q(8) - Q(2)) \cdot (Q(8) - Q(2)) / L / L / L \& \\ - 180 \cdot (Q(8) - Q(2)) \cdot (Q(6) + Q(12)) / L / L) / 140.0$$

$$y_2 = (-3 \cdot Q(6) \cdot Q(6) + 3 \cdot Q(12) \cdot Q(12) + 6 \cdot Q(6) \cdot Q(12) + 108 \cdot (Q(8) - Q(2)) \cdot (Q(8) - Q(2)) \& \\ / L / L - 72 \cdot Q(6) \cdot (Q(8) - Q(2)) / L) / 280.0$$

$$y_3 = (3 \cdot Q(6) \cdot Q(6) - 3 \cdot Q(12) \cdot Q(12) + 6 \cdot Q(6) \cdot Q(12) + 108 \cdot (Q(8) - Q(2)) \cdot (Q(8) - Q(2)) \& \\ / L / L - 72 \cdot Q(12) \cdot (Q(8) - Q(2)) / L) / 280.0$$

$$y_4 = (12 \cdot L \cdot Q(6) \cdot Q(6) + L \cdot Q(12) \cdot Q(12) - 3 \cdot L \cdot Q(6) \cdot Q(12) + 18 \cdot (Q(8) - Q(2)) \cdot (Q(8) - Q(2)) \& \\ / L + 3 \cdot (Q(8) - Q(2)) \cdot (Q(6) - Q(12))) / 140.0$$

$$y_5 = (-3 \cdot L \cdot Q(6) \cdot Q(6) - 3 \cdot L \cdot Q(12) \cdot Q(12) + 4 \cdot L \cdot Q(6) \cdot Q(12) - \& \\ 6 \cdot (Q(8) - Q(2)) \cdot (Q(6) + Q(12))) / 280.0$$

$$y_6 = (L \cdot Q(6) \cdot Q(6) + 12 \cdot L \cdot Q(12) \cdot Q(12) - 3 \cdot L \cdot Q(6) \cdot Q(12) + \&$$

$$18*(Q(8)-Q(2))*(Q(8)-Q(2))/L+3*(Q(8)-Q(2))*(Q(12)-Q(6))/140.0$$

Parâmetros Zi's:

$$z1=(180*Q(5)*Q(5)/L+180*Q(11)*Q(11)/L+432*(Q(9)-Q(3))*(Q(9)-Q(3))/L/L/L \& \\ -180*(Q(9)-Q(3))*(Q(5)+Q(11))/L/L)/140.0$$

$$z2=(-3*Q(5)*Q(5)+3*Q(11)*Q(11)+6*Q(5)*Q(11)+108*(Q(9)-Q(3))*(Q(9)-Q(3)) \& \\ /L/L-72*Q(5)*(Q(9)-Q(3))/L)/280.0$$

$$z3=(3*Q(5)*Q(5)-3*Q(11)*Q(11)+6*Q(5)*Q(11)+108*(Q(9)-Q(3))*(Q(9)-Q(3)) \& \\ /L/L-72*Q(11)*(Q(9)-Q(3))/L)/280.0$$

$$z4=(12*L*Q(5)*Q(5)+L*Q(11)*Q(11)-3*L*Q(5)*Q(11)+18*(Q(9)-Q(3))*(Q(9)-Q(3)) \& \\ /L+3*(Q(9)-Q(3))*(Q(5)-Q(11)))/140.0$$

$$z5=(-3*L*Q(5)*Q(5)-3*L*Q(11)*Q(11)+4*L*Q(5)*Q(11)- \& \\ 6*(Q(9)-Q(3))*(Q(5)+Q(11)))/280.0$$

$$z6=(L*Q(5)*Q(5)+12*L*Q(11)*Q(11)-3*L*Q(5)*Q(11)+ \& \\ 18*(Q(9)-Q(3))*(Q(9)-Q(3))/L+3*(Q(9)-Q(3))*(Q(11)-Q(5)))/140.0$$

$$K2ii(2,2)= y1, \quad K2ii(3,3)= z1$$

$$K2ii(2,6)= y2, \quad K2ii(6,2)= y2$$

$$K2ii(3,5)= -z2, \quad K2ii(5,3)= -z2$$

$$K2ii(5,5)= z4, \quad K2ii(6,6)= y4$$

$$K2ii=A*E/3.0*K2ii$$

$$K2jj(2,2)= y1, \quad K2jj(3,3)= z1$$

$$K2jj(2,6)= y3, \quad K2jj(6,2)= y3$$

$$K2jj(3,5)= z3, \quad K2jj(5,3)= z3$$

$$K2jj(5,5)= z6, \quad K2jj(6,6)= y6$$

$$K2jj=A*E/3.0*K2jj$$

$$K2ij(2,2)= -y1, \quad K2ij(3,3)= -z1$$

$$K2ij(2,6)= y3, \quad K2ij(6,2)= -y2$$

$$K2ij(3,5)= -z3, \quad K2ij(5,3)= z2$$

$$K2ij(5,5)= z5, \quad K2ij(6,6)= y5$$

$$K2ij=A*E/3.0*K2ij$$

$$K2ji=K2ij^T$$

Matriz geométrica de uso generalizado em que se considera apenas o contributo do esforço axial para a sua construção [1,2,5,18,41,46]:

$$\mathbf{K}_G^{ii} = N$$

	1.2/L			0.1
		1.2/L		-0.1
		-0.1		0.4L/3
	0.1			0.4L/3

$$\mathbf{K}_G^{ij} = N$$

	1.2/L			-0.1
		1.2/L		0.1
		0.1		0.4L/3
	-0.1			0.4L/3

$$\mathbf{K}_G^{ji} = N$$

	-1.2/L			0.1
		-1.2/L		-0.1
		0.1		-0.1L/3
	-0.1			-0.1L/3

$$\mathbf{K}_G^{ji} = (\mathbf{K}_G^{ij})^T$$

Sendo N o esforço axial instalado na barra.

Matriz geométrica com ou sem continuidade para momentos em que se considera apenas o contributo do esforço axial para a sua construção (Ramon Alvarez) [2]:

$$\mathbf{K}_G^{ii} = \mathbf{N}$$

	1.2/L			0.1 A_z1
		1.2/L		-0.1 A_y1
		-0.1 A_y1		0.4L/3 A_y2
	0.1 A_z1			0.4L/3 A_z2

Com:

- Descontinuidade em θ_y só para o extremo i : $A_y1 = 0.00$, $A_y2 = 0.00$.
- Descontinuidade em θ_z só para o extremo i : $A_z1 = 0.00$, $A_z2 = 0.00$.
- Descontinuidade em θ_y só para o extremo j : $A_y1 = 2.00$, $A_y2 = 1.50$.
- Descontinuidade em θ_z só para o extremo j : $A_z1 = 2.00$, $A_z2 = 1.50$.
- Descontinuidade em θ_y para o extremo i e j : $A_y1 = 0.00$, $A_y2 = 0.00$.
- Descontinuidade em θ_z para o extremo i e j : $A_z1 = 0.00$, $A_z2 = 0.00$.
- Sem qualquer descontinuidade : $A_y1 = 1.00$, $A_y2 = 1.00$, $A_z1 = 1.00$, $A_z2 = 1.00$.

$$\mathbf{K}_G^{jj} = \mathbf{N}$$

	1.2/L			-0.1 A_z1
		1.2/L		0.1 A_y1
		0.1 A_y1		0.4L/3 A_y2
	-0.1 A_z1			0.4L/3 A_z2

Com:

- Descontinuidade em θ_y só para o extremo i : $A_y1 = 2.00$, $A_y2 = 1.50$.
- Descontinuidade em θ_z só para o extremo i : $A_z1 = 2.00$, $A_z2 = 1.50$.
- Descontinuidade em θ_y só para o extremo j : $A_y1 = 0.00$, $A_y2 = 0.00$.
- Descontinuidade em θ_z só para o extremo j : $A_z1 = 0.00$, $A_z2 = 0.00$.
- Descontinuidade em θ_y para o extremo i e j : $A_y1 = 0.00$, $A_y2 = 0.00$.
- Descontinuidade em θ_z para o extremo i e j : $A_z1 = 0.00$, $A_z2 = 0.00$.

- Sem qualquer descontinuidade : $A_Y1 = 1.00$, $A_Y2 = 1.00$, $A_Z1 = 1.00$, $A_Z2 = 1.00$.

$K_G^{ij} = N$

	-1.2/L				0.1 A_Z5
		-1.2/L		-0.1 A_Y5	
		0.1 A_Y3		-0.1L/3 A_Y4	
	-0.1 A_Z3				-0.1L/3 A_Z4

Com:

- Descontinuidade em θ_Y só para o extremo i : $A_Y3 = 0.00$, $A_Y4 = 0.00$, $A_Y5 = 2.00$.
- Descontinuidade em θ_Z só para o extremo i : $A_Z3 = 0.00$, $A_Z4 = 0.00$, $A_Z5 = 2.00$.
- Descontinuidade em θ_Y só para o extremo j : $A_Y3 = 2.00$, $A_Y4 = 0.00$, $A_Y5 = 0.00$.
- Descontinuidade em θ_Z só para o extremo j : $A_Z3 = 2.00$, $A_Z4 = 0.00$, $A_Z5 = 0.00$.
- Descontinuidade em θ_Y para o extremo i e j : $A_Y3 = 0.00$, $A_Y4 = 0.00$, $A_Y5 = 0.00$.
- Descontinuidade em θ_Z para o extremo i e j : $A_Z3 = 0.00$, $A_Z4 = 0.00$, $A_Z5 = 0.00$.
- Sem qualquer descontinuidade :
 $A_Y3 = 1.00$, $A_Y4 = 1.00$, $A_Y5 = 1.00$.
 $A_Z3 = 1.00$, $A_Z4 = 1.00$, $A_Z5 = 1.00$.

$$K_G^{ji} = (K_G^{ij})^T$$

Primeiras matrizes geométricas complementares à usual, $[K_{G2}]$ e $[K_{G3}]$, atendendo ao desenvolvimento em série de Taylor em que se considera apenas o contributo do esforço axial para a sua construção [41]:

Matriz K_{G2}

$$K_G^{ii} = N^2 L / 12,600 E$$

	$18/I_z$				$9L/I_z$
		$18/I_y$		$-9L/I_y$	
		$-9L/I_y$		$22L^2/I_y$	
	$9L/I_z$				$22L^2/I_z$

$$K_G^{jj} = N^2 L / 12,600 E$$

	$18/I_z$				$-9L/I_z$
		$18/I_y$		$9L/I_y$	
		$9L/I_y$		$22L^2/I_y$	
	$-9L/I_z$				$22L^2/I_z$

$$K_G^{ij} = N^2 L / 12,600 E$$

	$-18/I_z$				$9L/I_z$
		$-18/I_y$		$-9L/I_y$	
		$9L/I_y$		$-13L^2/I_y$	
	$-9L/I_z$				$-13L^2/I_z$

$$K_G^{ji} = (K_G^{ij})^T$$

Matriz K_{G3}

$$K_{G3}^{ii} = N^3 L^3 / 756,000 E^2$$

	$12/I_z^2$			$6L/I_z^2$
		$18/I_y^2$		$-6L/I_y^2$
		$-6L/I_y^2$		$28L^2/I_y^2$
	$6L/I_z^2$			$28L^2/I_z^2$

$$K_{G3}^{ii} = N^3 L^3 / 756,000 E^2$$

	$12/I_z^2$			$-6L/I_z^2$
		$18/I_y^2$		$6L/I_y^2$
		$6L/I_y^2$		$28L^2/I_y^2$
	$-6L/I_z^2$			$28L^2/I_z^2$

$$K_{G3}^{ii} = N^3 L^3 / 756,000 E^2$$

	$-12/I_z^2$			$6L/I_z^2$
		$-18/I_y^2$		$-6L/I_y^2$
		$6L/I_y^2$		$-22L^2/I_y^2$
	$-6L/I_z^2$			$-22L^2/I_z^2$

$$K_{G3}^{ji} = (K_{G3}^{ij})^T$$

Anexo II - Sub-rotinas de resolução de sistemas de equações lineares em FORTRAN 90

Sub-rotina que calcula um SISTEMA(S) de EQUAÇÕES(E) LINEARES(L) com a matriz dos coeficientes como uma MATRIZ(M), sendo a matriz do tipo esparsa em BANDA(B), TRIANGULAR(T) superior, com a matriz dos coeficientes independentes a DUAS(D) dimensões.

Ilustra-se num caso plano (submatrizes K^{ii} , K^{ij} , K^{ji} e K^{jj} com dimensão 3x3) para a submatriz K^{ii} ou K^{jj} em que a zona sombreada é a que conta para efeitos de armazenamento e cálculo do sistema de equações.

$K^{11}_{1,1}$	$K^{11}_{1,2}$	$K^{11}_{1,3}$									
$K^{11}_{2,1}$	$K^{11}_{2,2}$	$K^{11}_{2,3}$									
$K^{11}_{3,1}$	$K^{11}_{3,2}$	$K^{11}_{3,3}$									
			$K^{22}_{1,1}$	$K^{22}_{1,2}$	$K^{22}_{1,3}$						
			$K^{22}_{2,1}$	$K^{22}_{2,2}$	$K^{22}_{2,3}$						
			$K^{22}_{3,1}$	$K^{22}_{3,2}$	$K^{22}_{3,3}$						
						(...)	(...)	(...)			
						(...)	(...)	(...)			
						(...)	(...)	(...)			
									$K^{nn}_{1,1}$	$K^{nn}_{1,2}$	$K^{nn}_{1,3}$
									$K^{nn}_{2,1}$	$K^{nn}_{2,2}$	$K^{nn}_{2,3}$
									$K^{nn}_{3,1}$	$K^{nn}_{3,2}$	$K^{nn}_{3,3}$

SUBROUTINE SELMBTD (Nnos, NGL, MDN, Nac, Ko, C, Sit)

```

INTEGER Nnos, NGL, MDN, Nac, Sit
INTEGER i,j,l,NTL
REAL(8) Pivot
REAL(8), DIMENSION (:,:) :: Ko
REAL(8), DIMENSION (UBOUND(Ko,1),UBOUND(Ko,2)) :: K
REAL(8), DIMENSION (:,:) :: C
REAL(8), DIMENSION (Nac) :: F

```

$K=Ko$

! Triangulação .

$NTL = NGL * Nnos$

!- Anúncio em monitor da etapa.

```

if (Sit>1) then
  print *, ' Cálculo de Deslocamentos por Matriz x Matriz com &
    Semibanda.'
  print *, ' Fase I'
end if

```

```

do i = 1, NTL - 1
  l = i + 1
  j = 1
  do while (j < (MDN + 1) * NGL)
    if ((l - NTL) > 0) exit
    j = j + 1
    if (K(i,j) /= 0) then
      Pivot = K(i,j) / K(i,1)
      K(l, 1:(MDN + 1) * NGL - j + 1) = &

```

```

        K(l, 1:(MDN + 1) * NGL - j + 1) - K(i, j:(MDN + 1) * NGL) * Pivot
        C(l, 1:Nac) = C(l, 1:Nac) - Pivot * C(i, 1:Nac)
    end if
    l = l + 1
end do
end do

! Retrossubstituição .

if (Sit > 1) then
    print *, ' Fase II'
end if

do i = NTL, 1, -1
    l = i + 1
    j = 1
    F = 0.0
    do while (j < (MDN + 1) * NGL)
        j = j + 1
        if ((l - NTL) > 0) exit
        F(1:Nac) = F(1:Nac) + C(l, 1:Nac) * K(i, j)
        l = l + 1
    end do
    C(i, 1:Nac) = (C(i, 1:Nac) - F(1:Nac)) / K(i, 1)
end do

```

END SUBROUTINE

Sub-rotina que calcula um SISTEMA(S) de EQUAÇÕES(E) LINEARES(L) com a matriz dos coeficientes como uma MATRIZ(M), sendo a matriz do tipo esparsa em BANDA(B), TRIANGULAR(T) superior, com a matriz dos coeficientes independentes a DUAS(D) dimensões, possuindo a característica ESPECIAL (s) da submatriz da diagonal principal ser inteira (essencial em caso desta ser assimétrica).

Ilustra-se num caso plano (submatrizes K^{ii} , K^{ij} , K^{ji} e K^{jj} com dimensão 3x3) para a submatriz K^{ii} ou K^{jj} em que a zona sombreada é a que conta para efeitos de armazenamento e cálculo do sistema de equações.

$K^{11}_{1,1}$	$K^{11}_{1,2}$	$K^{11}_{1,3}$										
$K^{11}_{2,1}$	$K^{11}_{2,2}$	$K^{11}_{2,3}$										
$K^{11}_{3,1}$	$K^{11}_{3,2}$	$K^{11}_{3,3}$										
			$K^{22}_{1,1}$	$K^{22}_{1,2}$	$K^{22}_{1,3}$							
			$K^{22}_{2,1}$	$K^{22}_{2,2}$	$K^{22}_{2,3}$							
			$K^{22}_{3,1}$	$K^{22}_{3,2}$	$K^{22}_{3,3}$							
						(...)	(...)	(...)				
						(...)	(...)	(...)				
						(...)	(...)	(...)				
									$K^{nn}_{1,1}$	$K^{nn}_{1,2}$	$K^{nn}_{1,3}$	
									$K^{nn}_{2,1}$	$K^{nn}_{2,2}$	$K^{nn}_{2,3}$	
									$K^{nn}_{3,1}$	$K^{nn}_{3,2}$	$K^{nn}_{3,3}$	

SUBROUTINE SELMBTDs (Nnos, NGL, MDN, Nac, Ko, C, Sit)

```

INTEGER Nnos, NGL, MDN, Nac, Sit
INTEGER i,j,l,m,n,NTL
REAL(8) Pivot
REAL(8), DIMENSION (:,:) :: Ko
REAL(8), DIMENSION (UBOUND(Ko,1),UBOUND(Ko,2)) :: K
REAL(8), DIMENSION (:,:) :: C
REAL(8), DIMENSION (Nac) :: F

K=Ko

! Triangulação .

NTL = NGL * Nnos

!- Anúncio em monitor da etapa.
if (Sit>1) then
  print *, ' Cálculo de Deslocamentos por Matriz x Matriz com  &
    Semibanda (s).'
  print *, ' Fase I'
end if

m=0
n=0

do i = 1, NTL - 1
  l = i + 1
  n = n + 1
  m = 0
  j = 1
  do while (j < (MDN + 1) * NGL - n + 1)
    if ((l - NTL) > 0) exit
    j = j + 1
    if (j <= NGL - n + 1) then
      if (K(l,n) /= 0) then
        Pivot = K(l,n) / K(i,n)
        K(l,n:(MDN + 1) * NGL) = K(l,n:(MDN + 1) * NGL) - &
          Pivot * K(i,n:(MDN + 1) * NGL)
        C(l, 1:Nac) = C(l, 1:Nac) - Pivot * C(i, 1:Nac)
      end if
    else
      if (K(i,j+n-1) /= 0) then
        Pivot = K(i,j+n-1) / K(i,n)
        K(l,1:(MDN + 1) * NGL - int(m/NGL+1)*NGL) = &
          K(l,1:(MDN + 1) * NGL - int(m/NGL+1)*NGL) - &
          Pivot * K(i,7+int(m/NGL)*NGL:(MDN + 1) * NGL)
        C(l, 1:Nac) = C(l, 1:Nac) - Pivot * C(i, 1:Nac)
      end if
      m = m + 1
    end if
    l = l + 1
  end do
  if (n==NGL) then
    n=0
  end if
end do

```

! Retrossubstituição .

```
if (Sit>1) then
  print *, ' Fase II'
end if
```

n=NGL

```
do i = NTL,1,-1
  l = i + 1
  j = 1
  F=0
  do while (j < (MDN + 1) * NGL - n + 1)
    j = j + 1
    if ((l - NTL) > 0) exit
    F(1:Nac) = F(1:Nac) + C(l, 1:Nac) * K(i,j+n-1)
    l = l + 1
  end do
  C(i,1:Nac) = (C(i, 1:Nac) - F(1:Nac)) / K(i,n)
  n=n-1
  if (n==0) then
    n=NGL
  end if
end do
```

END SUBROUTINE

Como se pode apreciar, o uso de algumas das novas potencialidades do FORTRAN 90 permitem a construção de um código muito compacto e de elevada rapidez de execução (dado os comandos disponíveis serem, específica e unicamente, dirigidos para intenso processamento aritmético). Cite-se ainda, entre várias outras novidades, o facto de não existir necessidade da programação incluir um único número de linha, nem haver qualquer restrição em relação às primeiras 7 colunas de texto ou este ter que se limitar à 80ª coluna.

Por último, atente-se no facto de os compiladores desta linguagem serem concebidos para funcionar a 32 bits, o que proporciona a movimentação de grandes quantidades de memória e superior velocidade de execução. Devendo referir-se, ainda, que esta linguagem continua sem vida própria no que à criação de imagem diz respeito, pelo que a parte dirigida ao pré e pós processamento (entrada de dados, sua visualização e resultados finais) foi elaborada em QuickBASIC e C.

Anexo III - Rotinas do programa CEAC97

SUBROUTINE Penalizar(..)

Subrotina que soma a rigidez dos apoios, atribuída por tipos, na matriz de rigidez.

SUBROUTINE CargasNos(..)

Processamento da carga por Nó.

SUBROUTINE ValoresBarra(..)

Subrotina de leitura de valores de barra.

SUBROUTINE ProCarBar(..)

Processamento da carga por barra (com ou sem actualização de geometria).

SUBROUTINE ProEsfAcc(..)

Processamento de Esforços ao longo das Barras.

SUBROUTINE CarTotNos(..)

Processamento de Cargas Totais nos Nós.

SUBROUTINE CarTotBar(..)

Processamento de Cargas Totais nas Barras.

SUBROUTINE ProPesoProprio(..)

Pré-Processamento do Peso Próprio.

SUBROUTINE PosPesoProprio(..)

Pós-Processamento do Peso Próprio.

SUBROUTINE KT(..)

Montagem da Matriz de Rigidez Tangente, com introdução das condições de apoio.

SUBROUTINE KTindV(..)

Processamento individual da Matriz de Rigidez Tangente em Vector.

SUBROUTINE KTindM(..)

Processamento individual da Matriz de Rigidez Tangente em Matriz.

SUBROUTINE MatRigLocGer(..)

Processamento da Matriz de Rigidez Tangente em Eixos Locais.

SUBROUTINE Kgeral(..)

Pré-Processamento da Matriz de Rigidez Tangente em Matriz.

SUBROUTINE Desloc(..)

Cálculo de Deslocamentos.

SUBROUTINE CorrForFix(..)

Factor de Correção das Forças de Fixação.

SUBROUTINE EsfExtBar(..)

Cálculo dos Esforços nos Extremos de Barra.

SUBROUTINE CalcResiduo(..)

Cálculo do Resíduo.

SUBROUTINE IncCar(..)

Processamento de Cargas/Forças Incrementais/Iterativas.

SUBROUTINE Controlo(..)

Controlo da Rigidez Corrente (método de passagem Controlo de Cargas para Controlo de Deslocamentos).

SUBROUTINE PRC(..)

Parâmetro de Rigidez Corrente (método de passagem Controlo de Cargas para Controlo de Deslocamentos).

SUBROUTINE IncDes(..)

Processamento de Deslocamentos Incrementais/Iterativos.

SUBROUTINE ForEqu(..)

Cálculo das Forças Desequilibradas.

SUBROUTINE Conver(..)

Verificação da Convergência.

SUBROUTINE ActualCoor(..)

Actualização de Coordenadas.

SUBROUTINE CoordReset(..)

Inicia ficheiro auxiliar com possibilidade de actualização de coordenadas.

SUBROUTINE MaiorEsf(..)

Avaliação dos Maiores Esforços de Barra.

SUBROUTINE ProjEsf(..)

Projectão nos Nós dos Esforços de Barra.

SUBROUTINE ReaApo(..)

Cálculo das Reacções de Apoio.

SUBROUTINE VerEqu(..)

Verificação de Equilíbrio dos Nós (equilíbrio da estrutura).

SUBROUTINE FimInc(..)

Fim do Ciclo com colocação do sinal dos Esforços segundo Resistência dos Materiais.

SUBROUTINE EsfAccBar(..)

Cálculo dos Esforços ao longo das Barras por Acção.

SUBROUTINE EsfComBar(..)

Cálculo dos Esforços nas Barras por Combinação.

SUBROUTINE TemCal(..)

Determinação do Tempo de Cálculo.

SUBROUTINE CargaCrit(..)

Cálculo da Carga Crítica e Modos de Encurvadura associados.

SUBROUTINE K6CABO(..)

Subrotina da Matriz de Rigidez Espacial de um Cabo, Inelástica e Não Linear.

SUBROUTINE K6LCS(..)

Subrotina da Matriz de Rigidez Espacial, Elástica Linear, com extremos de Continuidade, sem Deformação por Esforço Transverso.

SUBROUTINE K6LCC(..)

Subrotina da Matriz de Rigidez Espacial, Elástica Linear, com extremos de Continuidade, com Deformação por Esforço Transverso.

SUBROUTINE K6LDSii(..)

Subrotina da Matriz de Rigidez Espacial, Elástica Linear, com extremos de Continuidade ou de Descontinuidade às rotações (rótulas em X,Y e Z), sem Deformação por Esforço Transverso, Kii.

SUBROUTINE K6LDSjj(..)

Subrotina da Matriz de Rigidez Espacial, Elástica Linear, com extremos de Continuidade ou de Descontinuidade às rotações (rótulas em X,Y e Z), sem Deformação por Esforço Transverso, KLjj.

SUBROUTINE K6LDSij(..)

Subrotina da Matriz de Rigidez Espacial, Elástica Linear, com extremos de Continuidade ou de Descontinuidade às rotações (rótulas em X,Y e Z), sem Deformação por Esforço Transverso, KLij.

SUBROUTINE K6LDSji(..)

Subrotina da Matriz de Rigidez Espacial, Elástica Linear, com extremos de Continuidade ou de Descontinuidade às rotações (rótulas em X,Y e Z), sem Deformação por Esforço Transverso, KLji.

SUBROUTINE K6GDSii(..)

COOK (1989), PORTEL & POWELL (1971) dX, ALVAREZ & BUSTILLO (1996) descontinuidades.
Subrotina da Matriz Geométrica Espacial, Elástica Não Linear, com extremos de Continuidade ou de Descontinuidade às rotações (rótulas em Y e/ou Z), com consideração apenas do Esforço Axial, Kii.

SUBROUTINE K6GDSjj(..)

COOK (1989), PORTEL & POWELL (1971) dX, ALVAREZ & BUSTILLO (1996) descontinuidades.
Subrotina da Matriz Geométrica Espacial, Elástica Não Linear, com extremos de Continuidade ou de Descontinuidade às rotações (rótulas em Y e/ou Z), com consideração apenas do Esforço Axial, KGjj.

SUBROUTINE K6GDSij(..)

COOK (1989), PORTEL & POWELL (1971) dX, ALVAREZ & BUSTILLO (1996) descontinuidades.
Subrotina da Matriz Geométrica Espacial, Elástica Não Linear, com extremos de Continuidade ou de Descontinuidade às rotações (rótulas em Y e/ou Z), com consideração apenas do Esforço Axial, KGij.

SUBROUTINE K6GDSji(..)

COOK (1989), PORTEL & POWELL (1971) dX, ALVAREZ & BUSTILLO (1996) descontinuidades.
Subrotina da Matriz Geométrica Espacial, Elástica Não Linear, com extremos de Continuidade ou de Descontinuidade às rotações (rótulas em Y e/ou Z), com consideração apenas do Esforço Axial, KGji.

SUBROUTINE K6GCC(..)

JOSE MARIA ESPADA (1975).

Subrotina da Matriz Geométrica Espacial, Elástica Não Linear, com extremos de Continuidade, com consideração apenas do Esforço Axial e possibilidade de Deformação por Esforço Transverso, com recurso a Funções Estabilidade.

SUBROUTINE K6GDSMC(..)

S.E.El METWALLY & W.F.CHEN (1987)

Subrotina da Matriz Geométrica Espacial, Elástica Não Linear, com extremos de Continuidade, com consideração apenas do Esforço Axial, em Eixos Locais.

SUBROUTINE K6GDSYKc(..)

YANG & KUO (1994).

Subrotina da Matriz Geométrica Espacial, Elástica Não Linear, com extremos de Continuidade, com consideração de todos os esforços elegíveis de barra, adoptando uma formulação completa.

SUBROUTINE K6GDSYKs(..)

YANG & KUO (1994).

Subrotina da Matriz Geométrica Espacial, Elástica Não Linear, com extremos de Continuidade, com consideração de todos os esforços elegíveis de barra, adoptando uma formulação simplificada.

SUBROUTINE K6JiiYK(..)

YANG & KUO (1994).

Matriz dos Momentos nos Nós, KJii.

SUBROUTINE K6JjjYK(..)

YANG & KUO (1994).

Matriz dos Momentos nos Nós, KJjj.

SUBROUTINE K6IiiYK(..)

YANG & KUO (1994).

Matriz dos Momentos Induzidos, KJii.

SUBROUTINE K6IjjYK(..)

YANG & KUO (1994).

Matriz dos Momentos Induzidos, KJjj.

SUBROUTINE K6MiiYK(..)

YANG & KUO (1994).

Matriz de Momentos Exteriores Aplicados nos Nós, KMii.

SUBROUTINE K6MjjYK(..)

YANG & KUO (1994).

Matriz de Momentos Exteriores Aplicados nos Nós, KMjj.

SUBROUTINE K6G2(..)

H.NEDERGAARD, P.T.PEDERSEN (1985).

Subrotina da Matriz Geométrica Espacial Kg2, como função da deformação do elemento barra e que constitui uma relação entre a deformação axial e lateral, somável a expressão elementar da Matriz Tangente: $KL + KG$, admitindo extremidades de continuidade.

SUBROUTINE Fnp(..)

H.NEDERGAARD, P.T.PEDERSEN (1985).

Subrotina do Vector de Correção de Deslocamentos, como função da deformação do elemento barra e que constitui uma relação entre a deformação axial e lateral, subtraível ao Vector de Carga, admitindo extremidades de continuidade, Fnp.

SUBROUTINE K6FECC(..)

EKHANDE & SELVAPPALAM (1989).

Subrotina da Matriz de Rigidez Espacial, Elástica Não Linear, extremos de Continuidade, sem Deformação por Esforço Transverso, com Funções de Estabilidade.

SUBROUTINE K6_1(..)

CHAJES & CHURCHILL (1987).

Matriz complementar Kg1.

SUBROUTINE K6_2(..)

CHAJES & CHURCHILL (1987).

Matriz complementar Kg2.

SUBROUTINE K6_1(..)

CHAJES & CHURCHILL (1987).

Matriz complementar Kg1.

SUBROUTINE K6_CCmgc(..)

TEBEDGE & TALL (1973).

Matrizes Geometricas complementares.

SUBROUTINE K6OECKassi(..)

KASSIMALI (1991).

Subrotina da Matriz de Rigidez Espacial, Elástica Não Linear, extremos de Continuidade, sem Deformação por Esforço Transverso, com Funções de Estabilidade.

SUBROUTINE K6RECC(..)

CHU & RAMPETSREITER (1972).

Subrotina da Matriz Geométrica Espacial, Elástica Não Linear, com extremos de Continuidade, com consideração apenas do Esforço Axial, e possibilidade de Deformação por Esforço Transverso, com recurso a Funções Estabilidade.

SUBROUTINE K6KECCI(..)

PETR KRYSL (1993).

Subrotina da Matriz Linear Espacial, com extremos de Continuidade.

SUBROUTINE K6KECCg(..)

PETR KRYSL (1993).

Subrotina da Matriz Geométrica Espacial, Elástica Não Linear, com extremos de Continuidade, com consideração de todos os esforços elegíveis de barra, adoptando uma formulação completa.

SUBROUTINE R6ijALVAREZ(..)

Subrotina de Matriz de Transformação (Rotação) de Eixos Locais em Eixos Gerais (Alvarez modificada) Rij.

SUBROUTINE R6jiALVAREZ(..)

Subrotina de Matriz de Transformação (Rotação) de Eixos Locais em Eixos Gerais (Alvarez modificada) Rji.

SUBROUTINE R6ij(..)

Subrotina de Matriz de Transformação (Rotação) de Eixos Locais em Eixos Gerais Rij (Argyris adaptada) Rij.

SUBROUTINE R6ji(..)

Subrotina de Matriz de Transformação (Rotação) de Eixos Locais em Eixos Gerais Rji (Argyris adaptada) Rji.

SUBROUTINE R6ijp(..)

Subrotina de Matriz de Transformação (Rotação) de Eixos Principais Locais em função de um ângulo imposto Rijp.

SUBROUTINE R6jip(..)

Subrotina de Matriz de Transformação (Rotação) de Eixos Principais Locais em função de um ângulo imposto Rjip.

SUBROUTINE RtRtKRR (..)

Subrotina que faz o quintuplo produto $Rt * Rpt * K * Rp * R$.

SUBROUTINE KRR (..)

Subrotina que faz o triplo produto $K * Rp * R$.

SUBROUTINE RtRt (..)

Subrotina que faz o duplo produto $R(T) * Rp(T)$.

SUBROUTINE MatRig6L(..)

Subrotina que Monta a Matriz de Rigidez Linear.

SUBROUTINE MatRig6G(..)

Subrotina que Monta a Matriz de Rigidez Geométrica.

SUBROUTINE TransCarLG (..)

Transformação das cargas nas barras de eixos locais para gerais.

SUBROUTINE ProCarBarInd(..)

Processamento de cargas individual.

SUBROUTINE ProEsfAccInd(..)

Processamento de Esforços por acção nas barras.

SUBROUTINE SELVBTU (..)

Subrotina que calcula um SISTEMA(S) de EQUAÇÕES(E) LINEARES(L) com a matriz dos coeficientes como um VECTOR(V), sendo a matriz do tipo esparso em BANDA(B), TRIANGULAR(T) superior, e com a matriz dos coeficientes independentes a UMA(U) dimensão.

SUBROUTINE RSEBSGS (..)

Subrotina que calcula um SISTEMA(S) de EQUAÇÕES(E) LINEARES(L) com a matriz dos coeficientes como um VECTOR(V), sendo a matriz do tipo esparso em BANDA(B), TRIANGULAR(T) superior, e com a matriz dos coeficientes independentes a DUAS(D) dimensões.

SUBROUTINE SELMBTD (..)

Subrotina que calcula um SISTEMA(S) de EQUAÇÕES(E) LINEARES(L) com a matriz dos coeficientes como uma MATRIZ(M), sendo a matriz do tipo esparso em BANDA(B), TRIANGULAR(T) superior, e com a matriz dos coeficientes independentes a DUAS(D) dimensões.

SUBROUTINE SELMBTDs (..)

Subrotina que calcula um SISTEMA(S) de EQUAÇÕES(E) LINEARES(L) com a matriz dos coeficientes como uma MATRIZ(M), sendo a matriz do tipo esparso em BANDA(B), TRIANGULAR(T) superior, e com a matriz dos coeficientes independentes a DUAS(D) dimensões especial (s).

SUBROUTINE IMQ(..)

Subrotina que INVERTE(I) uma MATRIZ(M) QUADRADA(Q).

SUBROUTINE IM(..)

Subrotina que INVERTE(I) uma MATRIZ(M).

SUBROUTINE Jacobi(..)

Subrotina que calcula Valor e Vectors próprios mais baixos pelo método de Jacobi.

SUBROUTINE Proprios(..)

Subrotina que calcula Valor e Vectors próprios mais baixos (Bifurcação de Equilíbrio).

SUBROUTINE Purifica(..)

Purificação do vector próprio/modo de instabilidade.

SUBROUTINE MMMSB(..)

Subrotina que MULTIPLICA(M) uma MATRIZ(M) qualquer por uma MATRIZ SIMÉTRICA(S) e em BANDA(B), com: $R(AxC)=M(AxB) \times MSB(BxC)$.

SUBROUTINE MMSBM(..)

Subrotina que MULTIPLICA(M) uma MATRIZ(M) SIMÉTRICA(S) e em BANDA(B) por uma MATRIZ(M) qualquer, com: $R(AxC)=MSB(AxB) \times M(BxC)$.

SUBROUTINE MMSBV(..)

Subrotina que MULTIPLICA(M) uma MATRIZ(M) SIMÉTRICA(S) e em BANDA(B) por um VECTOR(V) qualquer, com: $R(A) = MSB(A \times B) \times V(B)$.

SUBROUTINE MVMSB(..)

Subrotina que MULTIPLICA(M) um VECTOR(V) qualquer por uma MATRIZ(M) SIMÉTRICA(S) e em BANDA(B), com: $R(B) = M(B) \times MSB(B \times C)$.