

TD du 13/03/2025

Ex 1325 (Kelyan)

a) $H(n) = "$ $\deg(P) = n$, f DSE et $RCV = +\infty$ "

$H(0)$: $f(x) = e^{a_0}$ OK

$\bigcap_{k=0}^n H(k) \Rightarrow H(n+1)$:

$\deg P = n+1$ où $P = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k} = e^{\sum_{k=0}^n a_k x^k} e^{a_{n+1} x^{n+1}} \\ &= e^{Q(x)} e^{a_{n+1} x^{n+1}} \end{aligned}$$

$k = \deg(Q) \leq n$

d'après $H(k)$ $x \mapsto e^{Q(x)}$ est DSE, $RCV = +\infty$.

De plus $x \mapsto e^{a_{n+1} x^{n+1}}$ est DSE, $RCV = +\infty$

Ainsi par produit de convolution: f est DSE, $RCV = +\infty$

CCL: $\forall n \in \mathbb{N}, H(n)$.

b) On utilise la récurrence précédente en incluant "et les $b_i \geq 0$ ".

On a alors de l'hérédité: $e^{Q(x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{b_k}_{\geq 0} x^k$

$$e^{a_{n+1} x^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a_{n+1} x^{n+1})^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}^k}{k!} x^{k(n+1)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}^{k-n-1}}{(k-n-1)!} x^k$$

$$= c_k \geq 0 \quad \text{si } k \geq n+1$$

$$(c_k = 0 \text{ si } k \leq n)$$

Par produit de Cauchy, $b_n \gg 0$.

$$\begin{aligned} c) \quad \mathbb{E}(X_n) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n b_n x^n}{f(x)} \\ &= x \frac{f'(x)}{f(x)} \end{aligned}$$

Où $f'(x) = P'(x) e^{P(x)} = P'(x) f(x)$

ie $\mathbb{E}(X_n) = x P'(x)$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^2) &= \sum_{n \geq 0} n^2 P(X_n = n) \\ &\xrightarrow{\text{H. transfert}} \sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)b_n x^n + n b_n x^n}{f(x)} \\ &= x P'(x) + x^2 f''(x) / f(x) \end{aligned}$$

où $f''(x) = P''(x) f(x) + P'(x) f'(x)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^2) &= x P'(x) + x^2 \left(P''(x) + P'(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \\ &= x P'(x) + x^2 P''(x) + P'(x)^2 x^2 \end{aligned}$$

Donc par K-H :

$$V(X_n) = x^2 P''(x) + P'(x) x$$

d) Par B.T. :

$$P(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$$

Pour $\varepsilon = x^d$, on a :

$$P(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq x^d) \leq \frac{x P'(x) + x^2 P''(x)}{x^{2d}}$$

$$\textcircled{On} \quad \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| > x^d) = \mathbb{P}(X_n \in I_n)$$

$$\deg(xP'(x)) < 2d$$

$$\deg(x^2P''(x)) < 2d$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xP'(x) + x^2P''(x)}{x^{2d}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in I_n) = 0$$

$$\begin{aligned} \textcircled{On}, \quad \frac{g_d(x)}{f(x)} &= \sum_{n \in I_n} \mathbb{P}(X_n = n) \\ &= \mathbb{P}(X_n \in I_n) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

$$\underline{\text{CCL}}: \quad g_d(x) = o(f(x))$$

Ex 1454 (Gabriel R.)

$$\exists! a \in E \setminus \{0_E\} \text{ tq } f(x) = \langle a | x \rangle \quad \forall x \in E$$

car f est une forme linéaire sur E .

$$\textcircled{On} \text{ complète } \left(\frac{a}{\|a\|} \right) \text{ en une BON de } E \quad \left(\frac{a}{\|a\|}, e_2, \dots, e_n \right)$$

$$x = x_1 \cdot \frac{a}{\|a\|} + \sum_{i=2}^n x_i e_i$$

$$\textcircled{On} a: \quad \forall x \in E,$$

$$g(x) = \langle a | x \rangle e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|a\| x_1 e^{-x_1^2} \underbrace{\prod_{i=2}^n e^{-x_i^2}}_{\leq 1}$$

$$|g(x)| \leq \|a\| |x_1| e^{-x_1^2}$$

$$\underbrace{\leq 1}_{\leq 1}$$

$$\textcircled{On} \text{ pose: } h: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto |t| e^{-t^2} \end{cases}$$

Cas 1: $t > 0$

$$h'(t) = e^{-t^2} + t \times (-2t) e^{-t^2} = (1 - 2t^2) e^{-t^2}$$

$$h'(t) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2t^2 > 0$$

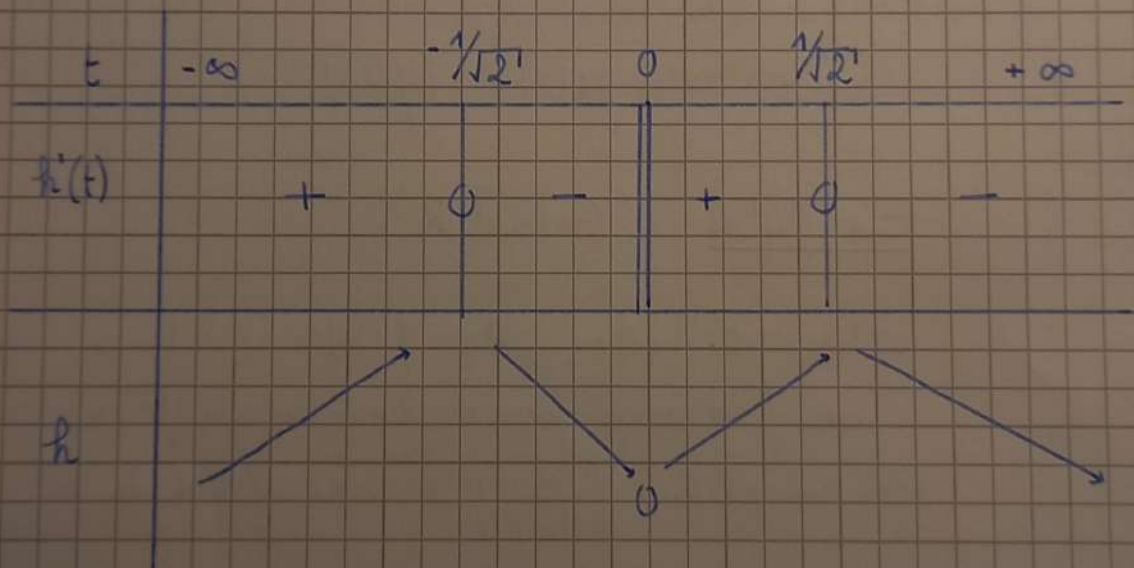
$$\Leftrightarrow t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Cas 2: $t < 0$

$$h'(t) = -(1 - 2t^2) e^{-t^2}$$

$$h'(t) > 0 \Leftrightarrow t \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc:



$$h\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}$$

Ainsi $|g(x)| \leq \|a\|_x \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} \quad \forall x \in E$

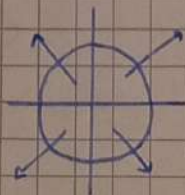
et pour $x_0 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ on a égalité. Donc

$\|a\| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}$ est le max

Avec $-x_0$ on a $g(x_0) = -\|a\| \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}$ qui est le min de g sur E

Ex 1463 (Macià)

1) $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f$?



On pose $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ donc $x = \rho \cos \theta$
 $y = \rho \sin \theta$

Ainsi :

$$f(x,y) = (\rho \cos \theta + \rho \sin \theta)^2 - (\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta)$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \cos^4 \theta + \sin^4 \theta &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 - 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ &= 1 - \frac{1}{2} [2 \cos \theta \sin \theta]^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f(x,y) \leq 4\rho^2 - \frac{\rho^4}{2} \xrightarrow{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} -\infty$$

$$\approx f(x,y) \xrightarrow{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} -\infty$$

2) On a :

$$f(x,y) \xrightarrow{\|(x,y)\|_2 \rightarrow +\infty} -\infty$$

$$\text{donc } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \|(x,y)\|_2 \geq A, \\ f(x,y) \leq \alpha.$$

Sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)\|_2 \geq A\}$ on a une majoration de $f(x,y)$.

Considérons $B_f(0_{\mathbb{R}^2}, A)$ qui est un compact.

Donc f admet un max sur $B_f(0_{\mathbb{R}^2}, A)$, noté γ .

$\beta = \max(\alpha, \gamma)$ est max de f sur $\mathbb{R}^2$

Détermination de ce max

Si on prend $\alpha_0 < 0$. Soit $A_0, A_1 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\|(x, y)\|_2 \geq A_0, \quad f(x, y) \leq \alpha_0 < 0$$

On $f(0, 0) = 0$

Donc le minimum est atteint sur

$$B_0(0_{\mathbb{R}^2}, A_0) \subset B_1(0_{\mathbb{R}^2}, A_1)$$

Le max est atteint en un pt $\notin$ à la frontière de $B_1(0_{\mathbb{R}^2}, A_1)$, donc en un pt critique.

Recherche de pts critiques de f

On résout :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y - 4x^3 = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y - 4y^3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) - (1) : 4(x^3 - y^3) = 0 \Rightarrow x = y.$$

On reprend (1)

$$4x - 4x^3 = 0 \quad \text{ie} \quad x = x^3$$

$$\rightarrow \underline{\text{Si } x=0} : \Rightarrow y=0 \Rightarrow (0, 0) \text{ est un pt critiq}$$

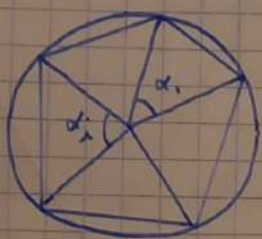
$$\rightarrow \underline{\text{Si } x \neq 0} : x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{pts critiq } (-1, -1), (+1, +1)$$

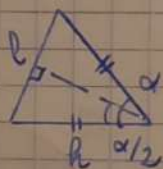
$$f(0, 0) = 0, \quad f(-1, -1) = f(1, 1) = 2$$

Donc $\max_{\mathbb{R}^2} f = 2$ et est atteint en $(-1, -1)$ et $(1, 1)$

Ex 1432 (Lucas)



$$\alpha_n = 2\pi - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$$



$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{l}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h}{2}$$

Donc $\frac{lh}{2} = \frac{\sin(\alpha)}{2}$

Aire totale: $2A = \sum_{i=1}^n \sin(\alpha_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sin(\alpha_i) + \sin\left(2\pi - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\right)$$

$$\frac{\partial(2A)}{\partial \alpha_p} = \cos(\alpha_p) - \cos\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\right)$$

$$\nabla(2A) = 0 \iff \begin{cases} \cos(\alpha_1) = \cos\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\right) \\ \vdots \\ \cos(\alpha_{n-1}) = \cos\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\right) \end{cases}$$

Donc $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = \alpha_n$

(aussi possible grâce à la convexité du sin)

Ex 1497 (Gabriel R.)

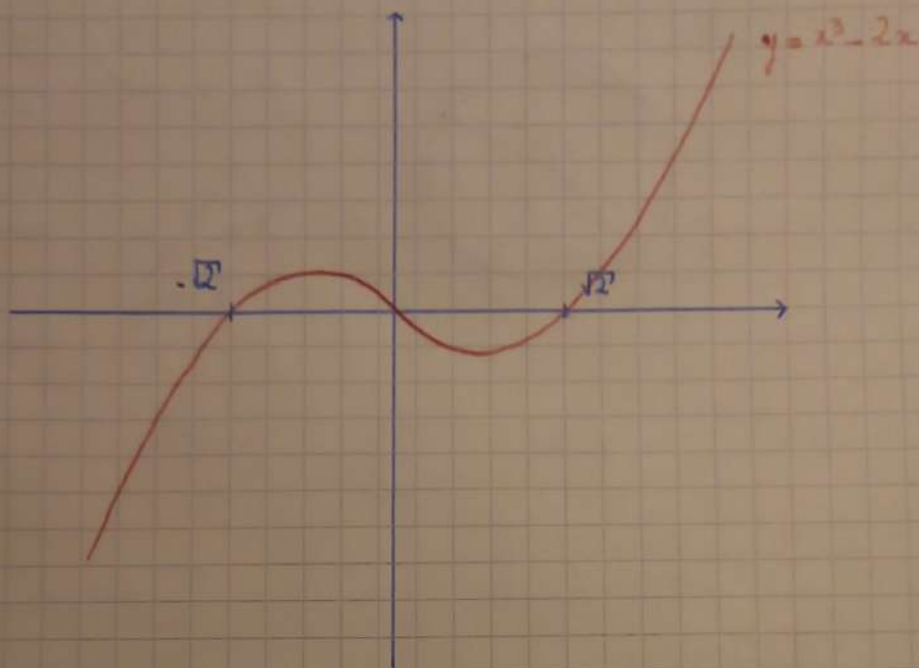
a) $x^3 - 2x \geq 0 \iff x \in D$

Donc $x \in [-\sqrt{2}; 0] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$

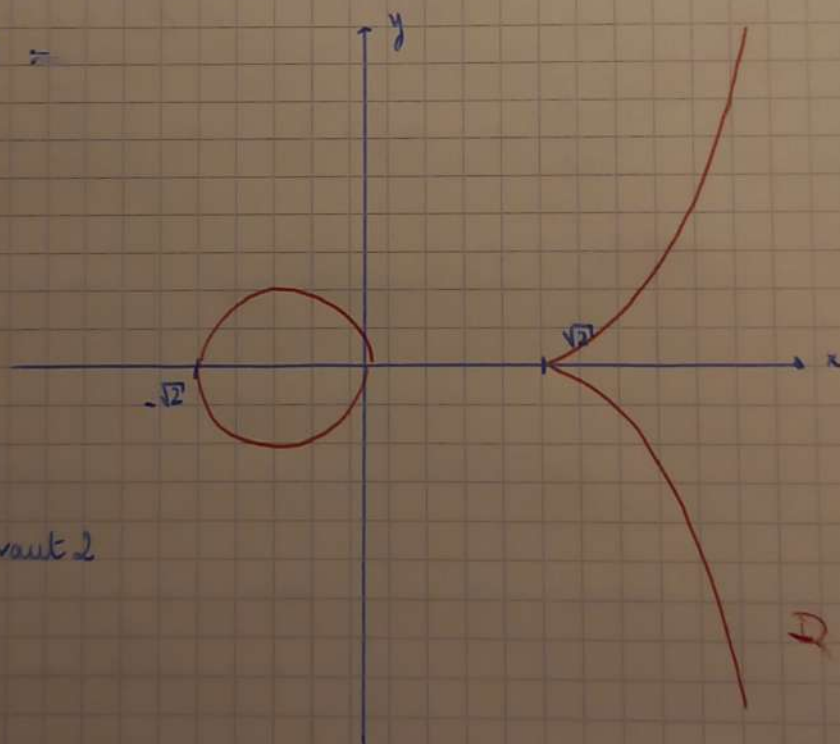
$\rightarrow$ Si $y > 0$: on a $y = \sqrt{x^3 - 2x}$

$\rightarrow$ Si $y < 0$: on a $y = -\sqrt{x^3 - 2x}$

(courbes symétriques par rapport à l'axe Ox)



Donc $D =$



rq: en 2 ça vaut 2

1) $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$, $A, B \in D^2$ ($A \neq B$)

~~1^{er} cas~~ Si $x_A = x_B \leq 0$

~~3^e cas~~ : $x_A = 0 \Rightarrow$ 1 pt d'intersection
 $x_A = \sqrt{2}$

$x_A < -\sqrt{2} \Rightarrow 0$ pts d'intersection
 $x_A \in]-\sqrt{2}, 0[\Rightarrow 2$ pts d'intersection
 $\hookrightarrow 2^{\text{ème}} \text{ cas: } x_A \neq x_B$

$\Delta =$ la droite passant par A, B

$$\Delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x + y_A \right\}$$

$\triangleright$ si $x_A = x_B$: alors $(AB) \parallel (Oy)$ de 2 pts d'intersection (A et B)

$\triangleright$ si $x_A \neq x_B$:

Analyse on suppose $\exists C(x_c, y_c)$ tq $x_c > \sqrt{2}$, $C \in D \cap (AB)$

$$\text{On a donc } \begin{cases} y_c = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_c + y_A = px_c + q \\ y_c^2 = x_c^2 - 2x_c \end{cases}$$

$$\text{donc } (px + q)^2 = x_c^2 - 2x_c$$

$$\Leftrightarrow -x_c^3 + p^2 x_c^2 + 2(pq + 1)x_c + q^2 = 0 \quad (E)$$

Comme x_A et x_B ($\neq$) st solut de (E) ~~et que la droite~~
 $\Rightarrow$ alors x_c réelle (sinon $\bar{x}_c$ serait également solut).

Ex 1448 (Jules) Le théorème de Rolle de l'espace.

f différentiable dans G°

Soit $K := B_1(0, 1)$ compact.

$f|_{G^\circ}$ donc admet un min en a et un max en b sur K .

* Si $f(a) = f(b)$: f est cste donc $x_0 \in B$ qq convient

* Si $f(a) \neq f(b)$: pfl $f(a) \neq$ valeur prise par f sur S

donc $a \in B$ (où $B = B_0(0, 1)$) qui est un
 ouvert donc f extrême en a
 donc $df_a = 0$

Ex 1484 (Théorème)

a) cf 1474 (Victor, séance précédente)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad u = 2y \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = \varphi(x - 2y) + \psi(x + 2y) \quad \varphi, \psi \in \mathcal{C}^2 \end{array} \right.$$

$$b) \quad \forall y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi'(x - 2y) \times (-2) + \psi'(x + 2y) \times 2$$

$$\Rightarrow -\varphi'(x - 2y) + \psi'(x + 2y) = 0 \quad \forall y$$

$$\Rightarrow \psi(u) = \varphi(u) + K, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

$$\cdot \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x, 0) = \varphi(x) + \psi(x) = x^2$$

$$= \varphi(-x) + \varphi(x) + \cancel{K} = x^2$$

= 0 en évaluant en 0

$$\underbrace{\varphi(x) - \varphi(-x)}_{\text{impair}} = \underbrace{x^2}_{\text{pair}}$$

$\Rightarrow$ seulement φ nulle convient