

Exe 1416:

$$f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = g(r, \theta)$$

$$f \frac{\partial g}{\partial r} = f \stackrel{r>0}{\Rightarrow} \frac{\partial g}{\partial r} = 1 \Rightarrow g(r, \theta) = r + \varphi(\theta)$$

donc: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \varphi(\arctan(\frac{y}{x})) = \sqrt{x^2 + y^2} + \varphi(\frac{y}{x})$
avec φ de classe C^1 .

Exe 1431:

a)
$$\begin{cases} u(x, y) = ax + by \\ v(x, y) = -bx + ay \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

b)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \Delta u = 0 \quad \text{car Schwarz.}$$

de m. pour v .

c) $g: (r, \theta) \mapsto u(r \cos \theta, r \sin \theta)$
 $\Delta u = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$
 $\forall r > 0, \quad I'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) d\theta$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} (r I'(r)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right) (r, \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} (r, \theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} (r, 2\pi) - \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} (r, 0) \right)$$

$\exists A \in \mathbb{R}, \quad r I'(r) = A$

Si $A \neq 0, \quad \forall r > 0, \quad I'(r) = \frac{A}{r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \pm \infty$ Absurde car I dérivable en 0 e.p.

$$r I'(r) = 0 \Rightarrow I'(r) = 0 \Rightarrow I(r) = I(0) = u(0,0).$$

donc le résultat.

Rq: valeur moyenne du potentiel sur une ~~base~~ $S(\vec{a}, a) =$ potentiel au

d) on suppose: $\begin{cases} \Delta u = g \\ u = f \end{cases}$ et $\begin{cases} \Delta v = g \\ v = f \end{cases}$ sur D et C

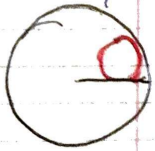
Revenons $\varphi = u - v$. Alors $\begin{cases} \Delta \varphi = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$ sur D et C .

$\bar{D}$ est un compact. donc $|\varphi|$ bornée et atteint ses bornes sur $\bar{D}$.
On note $x_0 \in \bar{D}$ un point où x_0 atteint son max.

Si $x_0 \in D = C$, $|\varphi(x_0)| = 0$ donc $\varphi = 0$ sur $\bar{D}$

Si $x_0 \in D$, $\forall x \in D$, $|\varphi(x)| \leq |\varphi(x_0)|$

plu: on suppose que $\varphi(x_0)$ est un max.
 $\forall x \in D$, $\varphi(x) \leq \varphi(x_0)$.



$\exists r_0 > 0$, $B_f(x_0, r_0) \subset D$.

$$\varphi(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$$

$$\varphi(a,b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a+r \cos \theta, b+r \sin \theta) d\theta \quad \text{max pour } 0 \leq r \leq r_0$$

donc: $\varphi(a+r \cos \theta, b+r \sin \theta) = \varphi(a,b) \quad \forall \theta$.

$$\text{on pose } x_n = \begin{pmatrix} a - r \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ b - r \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

On a max $\varphi(x_1) = \varphi(x_0)$

Par le m. raisonnement $\varphi(x) = \varphi(x_1) = \varphi(x_0)$

on itère et on pose:

$$x_m = \begin{pmatrix} a - \frac{mra}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ b - \frac{mrb}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

Pour un certain m , $(0,0) \in B_f(x_m, r_0)$

donc $\varphi(0,0) = \varphi(x_0) =$ max de φ .

$$\forall r, 0 \leq r \leq 1, \quad \varphi(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$$

$$\text{Rem } r=1: \quad \varphi(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 0$$

donc $\varphi(x_0) = 0$

or $\varphi(x_0) = \max_{x \in \bar{D}} |\varphi(x)|$, dc $\varphi = 0$ sur $\bar{D}$.

or $\varphi = u - v$. Ainsi $u = v$ sur $\bar{D}$.

Exo 1422:

a) polynomiale en les coeff de A .

b) $d(\det)_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ fct d'une seule variable de $\mathbb{C}$ en

produit scalaire: $d(\det)_A = \langle \nabla(\det)(A) | \cdot \rangle$

on calcule les dérivées partielles.

Soit $(E_{ij})_{i,j} = B_c$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\frac{\partial \det A}{\partial E_{ij}}(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(A + t E_{ij}) - \det A}{t}$$

$E_1, \dots, E_m) = \beta_c$ de $\mathbb{R}^m$. Alors, $\det(A + tE_{ij}) = \det(C_1, \dots, C_j + tE_i, \dots, C_m) =$
 avec $C_1, \dots, C_m$ colonnes de A .
 nous: $\frac{\partial \det}{\partial E_{ij}}(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(A + tE_{ij}) - \det A}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t \frac{\det(C_1, \dots, C_j + tE_i, \dots, C_m)}{t}$
 $= \det(C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_m) = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$

Avec $H = \sum_{1 \leq i, j \leq m} H_{ij} E_{ij}$: $d(\det)_A(H) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} H_{ij} (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$
 $= \langle H | \text{com} A \rangle$

$\Rightarrow \nabla(\det)(A) = \text{com} A$.

c) $\chi_A(x) = \det(xI_m - A) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0$, $\begin{cases} a_{m-1} = -\text{tr} A \\ a_0 = (-1)^m \det A \end{cases}$
 Rem $x \rightarrow 0$: $\chi_A(x) = a_0 + a_1x + o(x)$

DL₁(A) de $\det$: $\det(A + tH) = \det A + t \langle \nabla \det A | H \rangle + o(t)$
 donc $\det(xI_m - A) = (-1)^m \det A + (-1)^{m+1} x \langle \text{com} A | I_m \rangle + o(x)$

$\Rightarrow a_1 = (-1)^{m+1} \text{tr}(\text{com} A) = a_0 = a_1x$

Exo 1424:

En $y = 0$ on a: $\langle \nabla f(x) - \nabla f(0) | x \rangle \geq a N(x)^2$
 $\Leftrightarrow \langle \nabla f(x) | x \rangle \geq a N(x)^2 + \langle \nabla f(0) | x \rangle$

Idee exo 1478: $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $\in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ par la règle de la chaîne
 car $f \in \mathcal{C}^1$ et $t \mapsto xt \in \mathcal{C}^1$. $\varphi(t) = f(xt)$

Alors: $\forall t \in [0, 1], \varphi'(t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_i = \langle \nabla f(xt) | x \rangle$

En xt : $\langle \nabla f(xt) | xt \rangle \geq a N(xt)^2 + \langle \nabla f(0) | xt \rangle$
 $\Leftrightarrow \langle \nabla f(xt) | x \rangle t \geq a t^2 N(x)^2 + \langle \nabla f(0) | x \rangle t$
 $\Leftrightarrow \langle \nabla f(xt) | x \rangle = \varphi'(t) \geq a t N(x)^2 + \langle \nabla f(0) | x \rangle, t \neq 0$

on inégalité de Cauchy-Schwarz: $|\langle \nabla f(0) | x \rangle| \leq N(\nabla f(0)) N(x)$
 $\Leftrightarrow -N(\nabla f(0)) N(x) \leq \langle \nabla f(0) | x \rangle \leq N(\nabla f(0)) N(x)$

Donc: $\varphi'(t) \geq a t N(x)^2 - N(\nabla f(0)) N(x)$

on intègre entre 0 et t : $\varphi(t) \geq \frac{a t^2}{2} N(x)^2 - N(\nabla f(0)) N(x) t + \varphi(0)$

on $\begin{cases} \varphi(0) = f(0) \\ \varphi(1) = f(x) \end{cases}$ donc en $t=1$: $f(x) \geq \frac{a N(x)^2}{2} - N(\nabla f(0)) N(x) + f(0)$

on $a > 0$, donc $f(x) \geq \frac{a N(x)^2}{2} - N(\nabla f(0)) N(x) + f(0) \xrightarrow{N(x) \rightarrow +\infty} +\infty$

Ainsi $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $|x| \rightarrow +\infty$.

Exo 1441:

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \ln a_2 - \frac{a_2}{a_1} = 0$
 $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = \frac{a_1}{a_2} - \ln a_1 = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \ln a_1 = \frac{a_1}{a_2} \\ \ln a_2 = \frac{a_2}{a_1} \end{cases}$ (1) (2)

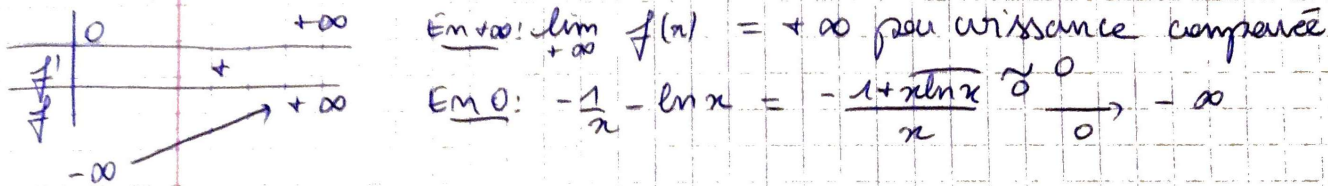
$$1) - (2) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \frac{a_1}{a_2} - \frac{a_2}{a_1}$$

on pose $x = \frac{a_1}{a_2} \in \mathbb{R}_+^*$, donc: $\ln x = x - \frac{1}{x}$

Soit $f: x \mapsto x - \frac{1}{x} - \ln x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 = -3 < 0$, pas de solution réelle
donc $f' > 0$ car $f'(1) = 1$.



f admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$
Or (a_1, a_2) solut^o $\Rightarrow (a_2, a_1)$ aussi par symétrie

Donc $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} \Rightarrow a_1 = a_2$

Donc $\ln a_2 = 1 \Rightarrow a_1 = a_2 = e$

Donc (e, e) unique point critique.

$Hf(e, e) = \begin{bmatrix} \frac{1}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{e} \end{bmatrix}$ det $Hf(e, e) < 0$
 $\Rightarrow$ point selle

cc: Pas d'extrema car pt selle.

Exo 1474:

Pour $u = x+y$, $\bar{e}g$ de d'Alembert en physique
On $f(x-y) + g(x+y)$ sont les solutions.

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Donc on pose $g: (u, v) \mapsto f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$
 $= f(x, y)$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \end{cases}$$

DC: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow 4 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial v} = \varphi(v)$, $\varphi \in \mathcal{C}^1$

Donc: $g(u, v) = [\varphi](v) + \Psi(u)$, avec $\int \varphi \in \mathbb{R}^2$
et $\Psi = g - \int \varphi$ aussi

Posez $\tilde{\varphi} = \int \varphi$

Alors $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x, y) = \tilde{\varphi}(x-y) + \Psi(x+y)$

Réciproquement, vérifie l'équation.

Exo 1414:

Analyse: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \varphi(y), \varphi \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(x, y) = \underbrace{\int \varphi + g_1(x)}_{= f_1(y)} e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \Rightarrow f(x, y) = f_2(y) + g_2(x), \text{ où } f_2, g_2 \in \mathbb{R}$$

Synthèse: $f(x, y)$ ainsi déf. convergent: $f(x, y) \mapsto h(x) + g(y)$ avec $h, g \in \mathbb{R}$

Exo 1421:

$\neq$ $GL_n(\mathbb{R})$ ouvert (image réciproque de $\mathbb{R}^*$ par $\det \in \mathbb{R}^*$) de on peut parler de différentielle

a) Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\frac{\partial}{\partial H} \frac{1}{\det(H)} = -\frac{1}{\det(H)} \text{tr}(H)$ par analogie avec $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$

$$(\text{Id} + H)(\text{Id} - H) = \text{Id} - H^2 \Rightarrow (\text{Id} + H)^{-1} (\text{Id} - H^2) = \text{Id} - H$$

$$\Rightarrow \varphi(\text{Id} + H) = \varphi(\text{Id}) - H + \underbrace{\varphi(\text{Id} + H) H^2}_{= o(H^2)}$$

rq $\varphi \in \mathbb{R}$ en $\mathcal{M}_n$

$$\tilde{A} = ((-1)^{i+j} \Delta_{i,j})_{i,j}$$

$$\tilde{A} \tilde{A}^T = \det(A) \text{Id} = o(H^2)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$$

$\Rightarrow \varphi \in \mathbb{R}$ sur $GL_n(\mathbb{R})$

$\varphi \in \mathbb{R}$ sur $GL_n(\mathbb{R})$

$$\text{donc: } \frac{\|\varphi(\text{Id} + H) H^2\|}{\|H\|} \leq \frac{\|H\| \times \|\varphi(\text{Id} + H)\|}{\|H\|} \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0 \rightarrow \|\varphi(\text{Id})\|$$

avec

$\|\cdot\|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\text{donc } \varphi(\text{Id} + H) H^2 = o(H)$$

$$\text{Ainsi } \varphi(\text{Id} + H) = \varphi(\text{Id}) - H + o(H)$$

$$\text{donc } d\varphi_{\text{Id}}(H) = -H$$

b) Pour H tq $\text{Id} + H \in GL_n(\mathbb{R})$, on a:

$$(\text{Id} + H)^{-1} = (\text{Id} (\text{Id} + H^{-1} H))^{-1} = (\text{Id} + H^{-1} H)^{-1} \text{Id}^{-1} = (\text{Id} - H^{-1} H o(H)) \text{Id}^{-1}$$

$$\text{donc } d\varphi_{\text{Id}}(H) = -H^{-1} H \text{Id}^{-1}$$

$$\text{Rq: analogie avec } d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}$$

pas d'interprétation φ

Exo 1398.

a) Méthode 1: $E(X) = N$

Méthode 2: $X \in \mathbb{N}$ $\frac{N}{k}$ groupes de k individus
 $k \mid N$

$$X = \frac{N}{k} + k \times (\text{nbr de groupe } \mathcal{Q})$$

$$Y_i = \text{"mbr de groupe } \mathcal{Q} \text{"}$$

$$X_i = \text{"le groupe est } \mathcal{Q} \text{"}$$

$$P(X_i) = 1 - \underbrace{P(\bar{X}_i)}_{\text{aucune vache n'est malade}} = 1 - (1-p)^k$$

$$X_i \sim B(q), \text{ avec } q = 1 - (1-p)^k$$

$$Y = \sum_{i=1}^{N/k} Y_i, \text{ avec } Y_i \text{ iid, donc } X = \frac{N}{k} + k \times \sum_{i=1}^{N/k} Y_i$$

$$\text{Donc: } E(X) = \frac{N}{k} + kq \frac{N}{k} = N \left(\frac{1}{k} + 1 - (1-p)^k \right)$$

b) p petit $\rightarrow 0$ d'où $E(X) \underset{p \rightarrow 0}{=} N \left(\frac{1}{k} + 1 - (1-kp) + o(p) \right)$

on veut $E(X) < N \Leftrightarrow k^2 \underbrace{p^{-k+1}}_{= f(k)} < 0$

d'où $f\left(\frac{1}{2p}\right) = 1 - \frac{1}{4p} < 0$
 $\rightarrow -\infty \quad \quad \quad \rightarrow +\infty$

avec

k	0	$\frac{1}{2p}$	$+\infty$
$f(k)$	-	0	+
$f'(k)$	1		$\rightarrow +\infty$

f bij sur $[0, \frac{1}{2p}]$ et $[\frac{1}{2p}, +\infty[$

donc on a bien un intervalle

où $f < 0$, donc $\exists k_0 \in \mathbb{N}$

où 2^e méthode plus avantageuse