

TD 11/02/2025

(Le professeur s'installe)

(Nathan se lève et se dirige vers le tableau)

Exo 1234 / (Nathan) (15-R-12)

$(A_n)_{n \geq 1}$ suite d'événements incompatibles.

Par σ -additivité :

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{P(A_n)}_{\geq 0} \leq 1$$

série cv à termes positifs : $P(A_n) \xrightarrow{n} 0$

(15-h-15 : le professeur approuve le travail de l'élève et l'invite à regagner sa place)

(Liana, motivée par Nathan, se lève à son tour)

Exo 1245 / (Liana) (15-R-16)

$$121 = m!$$

$$\forall i \in \{1; m\}.$$

$$\text{Nb de possibilités : } (m-1)! \Rightarrow p = \frac{(m-1)!}{m!} = \frac{1}{m} = p.$$

Soit $A =$ "Chaque polytechnicien part avec un bicornes $\neq$ "

$i \in \{1; m\}$, $B_i =$ "X_i repart avec le même bicornes "

(Liana s'arrête, interdite face au tableau. Elle a commis une erreur, mais la surmonte avec l'aide de monsieur F)

$$A = \bigcap_{i=1}^m \overline{B_i} \quad | \quad P(B_i) = \frac{1}{m}.$$

$$P(A) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^m B_i) = 1 - \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} P(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k})$$

Probabilité de $\bigcap_{i=1}^k B_{i_i}$ où $k \in \llbracket 1; m \rrbracket$:

$$(m-k)! \text{ possibilités} \rightarrow p = \frac{(m-k)!}{m!}$$

$$P(A) = 1 - \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \frac{(m-k)!}{m!} = 1 - \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} \frac{(m-k)!}{m!}$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}$$

$\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} e^{-1}$

$$c) \text{ l-dm} = \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\text{Mq: l-dm} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} \Leftrightarrow \left| \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(m+2)!} = \frac{1}{(m+2)(m+1)!} = o\left(\frac{1}{(m+1)!}\right)$$

$$\text{d') où } (l-dm) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}$$

(15h33 : après de nombreux rebondissements, Liane retourne triomphante à sa place. À peine y est-elle assise que Léo quitte la sienne).

~~Exo~~ 856 / ((Léo) (15h35))

$$\mathbb{Q} = \{x_n, n \in \mathbb{N}^*\}. \quad (I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

Récurrence :

$$I_n = \left[x_n - \frac{1}{2}; x_n + \frac{1}{2} \right]$$

$$\rightarrow \text{Pour } k \geq 2 : x_k \in \bigcup_{i=1}^{k-1} I_i \quad ; \quad I_k = \emptyset$$

$$\text{sinon : } x_k \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} I_i \quad \text{on a } d = d(x_k; \bigcup_{i=1}^{k-1} I_i) \neq 0.$$

I_i fermé $\forall i \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket$ (cf + dain)

$$\Rightarrow \bigcup_{i=n}^{h-1} I_i \text{ fermé} \Rightarrow \overline{\bigcup_{i=n}^{h-1} I_i} = \bigcup_{i=n}^{h-1} I_i.$$

Donc: si $d=0$, $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in \bigcup_{i=n}^{h-1} I_i$, $\forall n$
 $\Rightarrow x_k \in \bigcup_{i=n}^{h-1} I_i$, contradiction $\Rightarrow d \neq 0$.

on prend $\alpha_k = \min(d, \frac{1}{k^2})$

$$I_k = [x_k - \frac{\alpha_k}{2}, x_k + \frac{\alpha_k}{2}]$$

Ainsi: $\forall i \neq j$, $I_i \cap I_j = \emptyset$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} I_i$
 $\Rightarrow \mathbb{Q} \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} I_m$.

$$d = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} |I_m| \leq \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \alpha_k \leq \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < 42.$$

$$A = \{m \in \mathbb{N}^*, I_m \neq \emptyset\}.$$

$$[0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$f: x \mapsto \underbrace{|[0, x]|}_{x} + \underbrace{|\bigcup_A I_m \setminus ((\bigcup_A I_m) \cap [0, x])|}_{= |\bigcup_A I_m| - |(\bigcup_A I_m) \cap [0, x]|}$$

Ng $f \notin \mathcal{C}^0$: soit $x \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon > 0$.

$$f(x+\varepsilon) - f(x) = \varepsilon + |(\bigcup_A I_m) \cap [0, x]| - |(\bigcup_A I_m) \cap [0, x+\varepsilon]| \\ = \varepsilon - |(\bigcup_A I_m) \cap [x, x+\varepsilon]|$$

$$\Rightarrow |f(x+\varepsilon) - f(x)| \leq 2\varepsilon \Rightarrow |f(x-\varepsilon) - f(x)| \leq 2\varepsilon \Rightarrow f \notin \mathcal{C}^0.$$

$$\text{on } f(0) = d < 42 \text{ et } f(45) \geq 45.$$

IVI: $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_0) = 42$.

$$I_0 = J_0 = I'_0 = [0; x_0], \quad \forall m \in A \quad (m \neq 0):$$

$$I'_m = I_m \setminus (I_m \cap [0; x_0]) \Rightarrow I_m = \underbrace{I'_m}_{[a, b]} \cup \underbrace{(I_m \cap [0; x_0])}_{[a', b']} \\ [a, a'] \cup [b', b]$$

$$I'_m \rightarrow J_{2m} = [a; a'] \quad , \quad J_{2m+1} = [b'; b] \text{ avec } J_{2m}, J_{2m+1} \text{ potentiellement } \emptyset.$$

Si $I_n \cap [0; \kappa_0] = \emptyset$:

$J_{2m} = I_m = I_m'$ et $J_{2m+1} = \emptyset$

Rg: $I_m \cap I_{m+1} = \emptyset$.

$$\bigcup_n I_n' = \bigcup_n I_n \setminus ((\bigcup_n I_n) \cap [0, \kappa_0])$$

$$U(J_{2m} \cup J_{2m+n}) = \bigcup_{\lambda} I_{\lambda} \quad \text{où} \quad \lambda = (2m, n) \text{ ou } (2m+n, 0) \text{ et } m \in A$$

$$B = \{m \in A', I_m \neq \emptyset\} \cup \{0\}$$

Pr $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convient

→ Par 1 point:

$m \in B \rightarrow m=0 : I_0 = [0; \kappa_0] \quad OK (\kappa_0 \neq 0)$

$\searrow$ min : $I_m \rightarrow [a, a']$
 $\searrow$ max : $I_m \rightarrow [b', b]$
 $\searrow$ I_m

→ 2 disjoint: ~~if~~ $i, j \in B, i \neq j$.

$\rightarrow i, j \neq 0: \exists i', j' \text{ tq } I_i \subset I_{i'} \text{ et } J_j \subset J_{j'}$

~~A~~ $\hookrightarrow i' \neq j' \rightarrow \text{OK}$

$\hookrightarrow i' = j' \rightarrow$ de type $[a; e']$ ~~et~~ $[b', b] \rightarrow ok$

→ Si $u=0$ s'ajout: $I_0 \cap [0; x_0] = ?$

$$I_j \subset I_j' \subset I_j''$$

$$I_\delta \cap [0, x_0] \subset I_\delta' \cap [0, x_0] = I_\delta' \cap (I_\delta' \cap [0, x_0]) = \emptyset \rightarrow \text{OK}$$

[illegible]

$$\sum_0 |J_n| = |[0; \kappa_0]| + \sum_A |J_n| = \kappa_0 + |\bigcup_A J_n| = f(\kappa_0) = 42$$

Let $\mathbb{Q} \subset \bigcup_B \mathbb{I}_n$

The 2 are disjoint

$$U_A I_m \setminus (U_A I_m) \cap [0; k_0]$$

(16h01: l'assemblée reste sans voix. C'est propre, c'est met, c'est Léo.)

(Tremblant, Léonard s'arme de tout son courage et prend sa suite)

Exo 1268 / (Léonard) (16h03)

$(1 \rightarrow i) =$ "le passager 1 prend la place du i -ième" ($i \in [2; N]$).
 $A =$ "le dernier passager n'est pas à sa place".

$$P(A) = \sum_{i=2}^N \underbrace{P(1 \rightarrow i)}_{\frac{1}{N-2}} \times P_{(1 \rightarrow i)}(A)$$

Rq $\forall i \in [2; N-2], P_{(1 \rightarrow i)}(A) = \frac{1}{2}$ (Récurrence)

Ini: ($i=1$) $P_{(1 \rightarrow N-1)}(A) = \frac{1}{2}$

$$(i=2) \quad P_{(1 \rightarrow N-2)}(A) = \frac{1}{3} \left[\underbrace{P_{(1 \rightarrow N-2)}(N-2 \rightarrow N)}_0 + \underbrace{P_{(1 \rightarrow N-2)}(N-2 \rightarrow N)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{P_{(1 \rightarrow N-2)}(N-2 \rightarrow N-1)}_{\frac{1}{2}} \right]$$

$\begin{array}{c} N-1 \\ \swarrow \\ N-2 \text{ --- } N \\ \searrow \\ 1 \end{array}$

$$= \frac{1}{2}$$

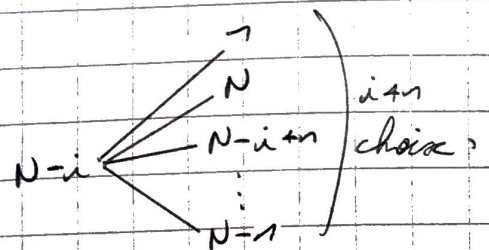
Héré: Soit $i \in [1; N-1]$.

On suppose $H(1), \dots, H(i-1)$ vraies.

$$P_{(1 \rightarrow N-i)}(A) = \frac{1}{1+i} \times (0 + 1 + \underbrace{P_{(1 \rightarrow N-i)}(N-i \rightarrow N-i+1)}_{\frac{1}{2}} + \dots +$$

$$+ \underbrace{P_{(1 \rightarrow N-i)}(N-i \rightarrow N-1)}_{\frac{1+i}{2}}(A))$$

$$= \frac{1}{1+i} \times \left(1 + \frac{1+i}{2} \right) = \frac{1}{2}$$



$$IP(A) = \frac{1}{N-1} \times \left(\underbrace{\sum_{i=2}^{N-1} IP_{(1 \rightarrow N-i)}(A)}_{\frac{N-2}{2}} + 1 \right) = \frac{N}{2(N-1)}$$

$$IP(\bar{A}) = 1 - \frac{N}{2(N-1)} = \frac{N-2}{2(N-1)}$$

(16h20 : rassuré par sa réussite, Léonard retourne s'asseoir. Dans le même temps, Gabriel se lève)

1257 / (Gabriel) (16h21)

10 boules blanches / 10 rouges.

U_k : "A tire une unique boule blanche au k-ième tirage, sur m tirages"

$$IP(U_k) = \left(\frac{10}{10+10} \right)^{k-1} \times \frac{10}{10+10} \times \left(\frac{10}{10+10-1} \right)^{m-k} = \frac{10 \cdot 10^{m-1}}{(10+10)^k (10+10-1)^{m-k}}$$

A : "A tire une unique boule blanche sur m tirages"

$$IP(A) = \sum_{k=1}^m IP(U_k) = \sum_{k=1}^m \frac{10 \cdot 10^{m-1}}{(10+10)^k (10+10-1)^{m-k}} = \frac{10 \cdot 10^{m-1}}{(10+10-1)^m} \times \sum_{k=1}^m \frac{(10+10-1)^{k-1}}{10+10}$$

$$= \frac{10 \cdot 10^{m-1}}{(10+10-1)^m} \times \frac{10+10-1}{10+10} \times \frac{1 - \left(\frac{10+10-1}{10+10} \right)^m}{1 - \left(\frac{10+10-1}{10+10} \right)}$$

$$= \frac{10 \cdot 10^{m-1}}{(10+10-1)^{m-1}} \times \left(1 - \left(\frac{10+10-1}{10+10} \right)^m \right)$$

(16h30 : Gabriel se retourne. Je l'ai regardé. Il m'a regardé. Monsieur Engelbaum l'a regardé. C'était juste)

Exo 1277 / (Léo) (16h31)

$\Omega = \mathbb{N}^*$

1) Mon $P(\omega=m) = \frac{1}{2^m}$ est une proba

$$\hookrightarrow \sum_{m \in \mathbb{N}^*} P(\omega=m) = \frac{1}{2} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

$$2) h \in \mathbb{N}^*, A_h = "h/w".$$

$\rightarrow$ si $h|m$

$$P(A_h) = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} P_{w=m}("h/w") \cdot P(w=m) \\ = \sum_{m=1}^{\infty} P(w=hm) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^h = \frac{1}{2^h} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2^h}} = \frac{1}{2^h - 1}$$

$$B: "w \text{ est impair}" \rightarrow \text{si } w \text{ impair}$$

$$P(B) = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} P_{w=m}(w \text{ impair}) \times P(w=m) = \frac{1}{2} P(w=m).$$

$$= 0 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + 0 + \frac{1}{2^5} + \dots \Rightarrow P(B) > \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{36} = \frac{13}{32}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $1 \quad 2 \quad > 0$

$$P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \underbrace{\sum_{\substack{m \in \mathbb{N}^* \\ m \geq 5}} P(w=m)}$$

$$< \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}^* \\ m \geq 5 \\ 2 \nmid m \\ 3 \nmid m}} P(w=m) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}^* \\ m \geq 5 \\ 2 \nmid m}} P(w=m) - \sum_{\substack{m \geq 5 \\ 3|m}} P(w=m) \\ \text{et praprie}$$

$$\Rightarrow P(B) < \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \sum_{k=2}^{\infty} P(w=2k+1) - \sum_{k=1}^{\infty} P(w=3(2k+1))$$

$$P(B) < \frac{3}{8} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3(2k+1)}} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \times \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k - \frac{1}{8} \times \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{26}\right)^k$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2 \times 4} \times \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}}\right) - \frac{1}{8 \times 26} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{26}} = \frac{203}{504}$$

(16h40: une fois de plus, le logiciel permet d'aboutir)

Exo 1257/(Liane) (16h41)

$$a) \mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R}, A \text{ ou } \bar{A} \text{ est apd}\}.$$

$$\bullet \bar{\mathbb{R}} = \emptyset \text{ apd} \Rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{A}.$$

$$\bullet A \in \mathcal{A} : \bar{A} \in \mathcal{A}$$

$$\bullet (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}.$$

$$I = \{m \in \mathbb{N}, A_m \text{ est apd}\}, J = \{m \in \mathbb{N}, \bar{A}_m \text{ est apd}\}.$$

$$\mathbb{N} = I \cup J$$

$$\text{Si } I \neq \emptyset: \overline{\bigcup_{m \in I} A_m} = \overline{\left(\bigcup_{m \in I} A_m \right) \cup \left(\bigcup_{m \in I} A_m \right)}$$

$$= \left(\bigcap_{m \in I} \overline{A_m} \right) \cap \left(\bigcap_{m \in I} \overline{A_m} \right) \subset \bigcap_{m \in I} \overline{A_m} \text{ and.}$$

$$\text{D'où } \left(\bigcup_{m \in I} A_m \right) \in \mathcal{F}.$$

$$\text{Si } I = \emptyset: I = \mathbb{N}$$

$\Rightarrow \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \right)$ est une union σ -d'ens σ et donc est σ et dans $\mathcal{F}$.

Dans tous les cas, $\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \right) \subset \mathcal{F}$.

b) Soit $\mathcal{F}'$ tribu plus petite que $\mathcal{F}$ contenant les événements élémentaires

Soit $A \in \mathcal{F}$

Si A σ -d. $A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$. Or $\forall \omega \in A, \{\omega\} \in \mathcal{F}'$.

D'où $A \in \mathcal{F}'$.

Si $\bar{A}$ σ -d. Alors de même, $\bar{A} \in \mathcal{F}' \Rightarrow A \in \mathcal{F}'$ car tribu

Donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.

$$\hookrightarrow P(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ } \sigma\text{-d} \\ 1 & \text{si } \bar{A} \text{ } \sigma\text{-d} \end{cases}$$

Alg IP est une proba.

• Ω σ -d donc $P(\Omega) = 1$

• Soient $(A_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ indep 2 à 2.

$\hookrightarrow$ Si tous σ -d, $\bigcup_m A_m$ est σ -d donc

$$P\left(\bigcup_m A_m\right) = 0 = \sum_m P(A_m) \quad \text{OK.}$$

$\hookrightarrow$ Sinon, $I = \{m \in \mathbb{N}, A_m \text{ } \sigma\text{-d}\}$

Alg $I = \{i\}$

Soient

~~soient~~ $(i, j) \in I^2$

$$\Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

$\bar{A}_i$ σ -d
 $\bar{A}_j$ σ -d

Does $\overline{A_i} \cup \overline{A_j}$ and $\Rightarrow \overline{A_i} \cup \overline{A_j} \in \mathcal{R}$.

$\Rightarrow \exists K \in \mathcal{R} \mid (\overline{A_i} \cup \overline{A_j})$

Q7 $\mathcal{R} \mid (\overline{A_i} \cup \overline{A_j}) = (\overline{A_i} \cup \overline{A_j}) = A_i \cap A_j$: correct

Does $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $I = \{i_0\}$

Does $\sum_n P(A_n) = P(A_{i_0}) = 1 = P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$