

1229 → 1235 → 1224 → 1205 → 1275 → 1223 → 1239
 → 1249 → 1244 → 1250 → 1247 → 1274

TD du 06/02/2025

Exo 1229: (Léo)

Soit $x \in]-1; 1[$.

1) Mg $(x^{k,l})_{(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. $I = (\mathbb{N}^*)^2$.

Soit $J \subset I$. On pose $n_0 = \max_{(a,b) \in J} (a \times b)$.

$$\sum_{(k,l) \in J} x^{k,l} \leq \sum_{\substack{(k,l) \in I \\ k \times l \leq n_0}} x^{k,l} = \sum_{i=1}^{n_0} \sum_{\substack{(k,l) \in I \\ k \times l = i}} x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n_0} x^i \times \underbrace{\text{Card} \{ (k,l) \in I, k \times l = i \}}_{\leq i}$$

donc $\sum_{(k,l) \in J} x^{k,l} \leq \sum_{i=0}^{n_0} i x^i \leq \sum_{k=1}^{\infty} k x^k = M$

Remarque prof:

$$\sum_{(k,l)} |x|^{k,l} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{+\infty} |x|^{k,l} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{|x|^k}{1 - |x|^k}}_{\sim |x|^k} \quad \text{CV}$$

donc la famille est sommable

2) Mg $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $I_n = \{ (k,n), k \in \mathbb{N}^* \}$. $J_n = \{ (k,l) \in I, k \times l = n \}$

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = I$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} J_n = I$. On pose: $S = \sum_I x^{k,l}$

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(k,l) \in I_n} x^{k,l} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k,n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (x^n)^k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$$

et $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(k,l) \in J_n} x^{k,l} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(k,l) \in I} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \times \text{Card}(J_n)$

Montrons que $\text{card}(J_n) = d(n)$. $|J_n| = |\{ (k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2, k \times l = n \}|$
 $= |\{ k \in \mathbb{N}^*, k \mid n \}|$
 $= d(n)$

Exo 1235: (Eglantine)

on place les $v-1$ premières pommes vertes (la v -ième est à la dernière place)

$$\rightarrow \frac{\binom{n+v-1}{v-1} \times 1}{\binom{n+v}{v}} = \frac{v}{n+v}$$

on place les v pommes vertes aléatoirement

Exo 1224: (Léo)

$(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ ouvert, disjoints 2 à 2.

$$Q = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$$

Soit $\alpha \in A$. $I_\alpha \neq \emptyset$, $\exists n_\alpha \in \mathbb{N}$, $x_{n_\alpha} \in I_\alpha$

$$\varphi: \begin{cases} A \rightarrow \mathbb{N} \\ \alpha \rightarrow n_\alpha \end{cases}$$

$$\alpha \neq \beta \Rightarrow \varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$$

Sinon, $n_\alpha = n_\beta$ avec $\alpha \neq \beta$

$$\Rightarrow x_\alpha = x_\beta \Rightarrow x_\alpha \in I_\alpha \cap I_\beta$$

donc $I_\alpha \cap I_\beta \neq \emptyset \Rightarrow$ IMPOSSIBLE

Exo 1205: (Mathilde)

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M$.

Soit $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On pose $R = \text{RCV}(f)$.

a) On pose $X = \{x \in \mathcal{D}(0, R), (a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée}\}$. $R = \sup(X)$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $|a_n x^n| \leq M \times x^n$ bornée si $x \leq 1$

$$\Rightarrow \boxed{\text{RCV} = R \geq 1}$$

b) $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $\sum a_n$ cvg.

$$\text{TDL: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} (a_n x^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

$u_n(x) = a_n x^n$, $\forall x \in]-1; 1[$. $|u_n(x)| \leq |a_n|$ terme général d'une série cv

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \|u_n\|_{\infty}^{]-1; 1[} < +\infty \text{ cv} \Rightarrow \text{Le TDL s'applique}$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n}$$

c) $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $\sum_{n \geq 0} a_n$ DV $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n = +\infty$ car les sommes partielles sont croissantes

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n.$$

$$\forall N \in \mathbb{N}, f(x) \geq S_N(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 1^-} S_N(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^N a_n x^n = \sum_{n=0}^N a_n$$

Or en faisant tendre

$$N \text{ vers } +\infty, \text{ on a } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \quad (\text{th. de minoration}).$$

Exo. 1275: (Merlin)

A_k : "On est en 0 au k-ième tour"

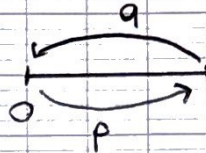
$$P_k = P(A_k)$$

$$P_k = P(A_k | A_{k-1}) \times P(A_{k-1}) + P(A_k | \overline{A_{k-1}}) \times P(\overline{A_{k-1}})$$

$$P_k = (1-p) P_{k-1} + q \times (1 - P_{k-1})$$

$$\begin{cases} \omega = (1-p-q)\omega + q \Rightarrow \omega = \frac{q}{p+q} \\ P_k - \omega = (1-p-q)(P_{k-1} - \omega) = (1-p-q)^k \times (1-\omega) \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_k = \frac{(1-p-q)^k}{p+q} \times p + \frac{p}{p+q} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{p}{p+q}$$

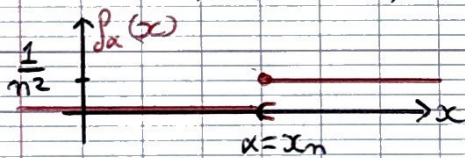


Retour

Exo 1223 question 4 (Léo):

$$\mathbb{Q} = \{x_n, n \in \mathbb{N}^*\}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{Q}, (\alpha = x_n)$$



$$f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha = x_n \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } x = \alpha = x_n \end{cases}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x + \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} f_\alpha(x)$$

f est strictement croissante.

→ Mq f est discontinue en $\alpha \in \mathbb{Q}$.

$$\alpha = x_{n_0} \text{ où } n_0 \in \mathbb{N}^*.$$

$$\bullet \text{ Pour } x < \alpha: I_x = \{n \in \mathbb{N}^*, x_n \leq x\}.$$

$$f(x) = x + \sum_{n \in I_x} \frac{1}{n^2} \leq \alpha + \sum_{n \in I_x} \frac{1}{n^2} \leq \underbrace{\alpha + \sum_{n \in I_x} \frac{1}{n^2}}_A - \frac{1}{n_0^2}$$

$$f(x) \leq A - \frac{1}{n_0^2}$$

• Soit $y > \alpha$:

$$f(y) = y + \sum_{I_y} \frac{1}{n^2} \geq \alpha + \sum_{I_\alpha} \frac{1}{n^2} = A$$

• donc $f(y) \geq A$ et $f(x) \leq A - \frac{1}{n_0^2}$

$$\Rightarrow f(y) - f(x) \geq \frac{1}{n_0^2} \Rightarrow S(\alpha) \geq \frac{1}{n_0^2}$$

→ Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Pour $x_1 < \alpha$, $f(x_1) = x_1 + \sum_{I_{x_1}} \frac{1}{n^2}$

$$f(\alpha) - f(x_1) = \alpha - x_1 + \sum_{I_\alpha \setminus I_{x_1}} \frac{1}{n^2}$$

$$n_1 = \min(I_\alpha \setminus I_{x_1})$$

$$x_2 \in]x_{n_1}, \alpha[\cap]\alpha - \frac{1}{2}, \alpha[$$

$$f(\alpha) - f(x_2) = \alpha - x_2 + \sum_{I_\alpha \setminus I_{x_2}} \frac{1}{n^2}$$

$$n_2 = \min(I_\alpha \setminus I_{x_2}) > n_1$$

$$n_2 \geq n_1 + 1$$

etc ... $\Rightarrow \exists m$ a donc $x_R \in]x_{R-1}, \alpha[\cap]\alpha - \frac{1}{R}, \alpha[$

$$|f(\alpha) - f(x_R)| \leq \underbrace{\alpha - x_R}_{\xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\sum_{n=x_{R-1}}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}_{\xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0}$$

Exo 1239: (Bartien)

n boules distinctes.

Au total, n^n possibilités pour toutes les configurations.

- Choix de la boîte vide $\rightarrow n$
- Choix de la boîte avec 2 boules $\rightarrow n-1$
- Choix des 2 boules en question $\rightarrow \binom{n}{2}$
- $(n-2)$ boules dans $(n-2)$ boîtes sans boîte vide $\rightarrow (n-2)!$ possibilités

$$\pi_n = \frac{n(n-1) \binom{n}{2} (n-2)!}{n^n} = \frac{n! \cdot n!}{n^n (n-2)! \cdot 2!} = \frac{n! \cdot n(n-1)}{n^n \cdot 2}$$

$$\pi_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}{n^n} \times \frac{n^2}{2} \Rightarrow \boxed{\pi_n \underset{+ \infty}{\sim} e^{-n} n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

Exo 1249: (Léo) Différentes visions:

- $2n$ personnes, n couples

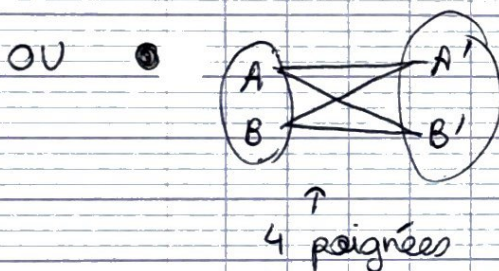
$$\binom{2n}{2} - n = 2 \times n(n-1)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 choix de 2 personnes nombre de couples

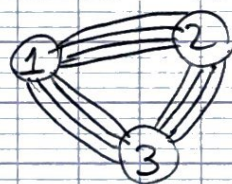
OU

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{chaque personne}} \text{nombre de poignées qu'elle donne} = \frac{1}{2} \times (2n)(2n-2) = 2n(n-1)$$

$\nwarrow$ $2n-2$
 $\nwarrow$ $2n$ $\nearrow$ $2 \times \text{nombre de poignées}$



Graphes à n sommets (les couples)



$4 \times$ nombre d'arêtes du graphe complet

On retrouve bien le même résultat.

Exo 1244: (Adam)

$F = (n-1)^n$: nbr de fonctions de $[1; n]$ ds $[1; n-1]$

$S = (n-1) \times \binom{n}{2} \times (n-2)!$: nbr de surjections de $[1; n]$ dans $[1; n-1]$

$\nwarrow$ image qui a 2 antécédents $\nwarrow$ antécédents s/ cette image $\nwarrow$ le reste

$$p_n = \frac{\binom{n}{2} \times (n-1) \times (n-2)!}{(n-1)^n} = \frac{n! \times (n-1)}{2! \times (n-1)^n} = \frac{n!}{2(n-1)^{n-1}} \sim \frac{n^{3/2}}{e^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

car $p_n = \frac{\binom{n}{2} (n-1)!}{(n-1)^n} \sim \frac{\frac{n^2}{2} \times \frac{n!}{n}}{(n-1)^n} \sim \frac{n}{2} \times \frac{n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{(n-1)^n} \sim n^{3/2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-(n+1)}$

$\left(\left(\frac{n}{n-1} \right)^n \rightarrow e \right)$

Exo 1250: (Julia)

$$M = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\{1; \dots; n\})^2, A \subset B\}$$

- a) On choisit les k éléments de B : $\binom{n}{k}$ choix.

$A \subset B$, $A \in \mathcal{P}(B)$: 2^k choix

$$\text{card}(M) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = (1+2)^n = 3^n$$

b) $P(A \subset B) = \frac{3^n}{2^n \times 2^n} = \left(\frac{3}{4} \right)^n$

Exo 1247 : (Eglantine)

- Nbr de combinaisons : $(80)!$
- Pour faire une file alternée :
 - On commence par un H ou une F. $\Rightarrow$ 2 choix
 - On choisit l'H. ou la F. en question : $\binom{40}{1} = 40$
 - On choisit le/la 2^e : $\binom{40}{1} = 40$
 - _____ 3^e : $\binom{39}{1} = 39$
 - _____ 4^e : $\binom{39}{1} = 39$
 - etc ...

$$P(\text{file alternée}) = \frac{2 \times 40! \times 40!}{80!} = \frac{2}{\binom{80}{40}} \sim 10^{-23} \sim \frac{1}{N_A}$$

Exo 1274 : (Léo)

$$a \in \llbracket 1; n \rrbracket.$$

A_a : "a divise w" où $w \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

a) $a \mid n$.

$$\text{Probabilité de } A_a : P(A_a) = \frac{\text{nb de multiples } \leq n}{\text{nb d'entiers } \leq n} = \frac{n/a}{n} = \frac{1}{a}$$

b) $a_1, \dots, a_n$, $a_i \mid n \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

$A_{a_1}, \dots, A_{a_n}$ sont mutuellement indépendants.

$$\prod_{i=1}^n P(A_{a_i}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^n A_{a_i}\right) = ?$$

$$= \frac{\text{nb de } k \in \llbracket 1; n \rrbracket \text{ tq } a_i \mid k \forall i}{\text{nb total de } k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$$

$$m = \text{ppcm}(a_1, \dots, a_n)$$

$$I = \{k \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_i \mid k \forall i\}$$

$k \in I \Leftrightarrow m \mid k$ car k est un multiple commun

$$m \mid n \Rightarrow P(A_m) = \frac{1}{m}$$

$$I = \{k \in \llbracket 1; n \rrbracket, m \mid k\} \quad P(k \in I) = P(A_m) = \frac{1}{m}$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_{a_i}\right)$$

$$M, m = \prod_{i=1}^n a_i$$

$$\text{On } a_i \wedge a_j = 1, \forall i \neq j \Leftrightarrow a_i \vee a_j = a_i a_j$$

$$a_1 \vee a_2 = a_1 a_2 \quad a_1 a_2 \wedge a_3 = 1 \Rightarrow \text{ppcm}(a_1, a_2, a_3) = a_1 a_2 a_3$$

$$\text{etc ...} \quad m = \prod_{i=1}^n a_i \Rightarrow \text{les évènements}$$