

TD du 5/02/25

Exo 1186

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n - 2v_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1/ \quad u_{n+2} &= u_{n+1} - v_{n+1} = u_{n+1} - (u_n - 2v_n) \\ &= u_{n+1} - u_n - 2u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+2} &= u_n - u_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= u_{n+1} - 2v_{n+1} \\ &= u_n - v_n - 2v_{n+1} \\ &= (u_n - 2v_n) + v_n - 2v_{n+1} \end{aligned}$$

$$v_{n+2} = v_n - v_{n+1}$$

L'équation caractéristique est $r^2 = 1 - r$, dont les racines sont :

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Donc } \exists (A_1, A_2, B_1, B_2) \in \mathbb{C}^4, \begin{cases} u_n = A_1 \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + B_1 \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \\ v_n = A_2 \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + B_2 \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \end{cases}$$

$$\text{De plus, } \begin{cases} u_0 = A_1 + B_1 \\ v_0 = A_2 + B_2 \end{cases}, \text{ et :}$$

$$\begin{cases} u_1 = u_0 - v_0 = A_1 \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) + B_1 \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) \\ v_1 = u_0 - 2v_0 = A_2 \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) + B_2 \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) \end{cases}$$

Donc: $A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(u_0 \times \frac{-3+\sqrt{5}}{2} - v_0 \right)$

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(u_0 + v_0 \times \frac{\sqrt{5}-3}{2} \right)$$

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(u_0 \times \frac{-3+\sqrt{5}}{2} + v_0 \right)$$

$$B_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(v_0 \times \frac{\sqrt{5}+3}{2} - u_0 \right)$$

Donc: $\sum u_n z^n = A_1 \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} z \right)^n + B_1 \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} z \right)^n$

Donc: $R = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$ pour $\sum u_n z^n$ et $\sum v_n z^n$.

Et:
$$\begin{cases} \sum u_n z^n = \frac{A_1}{1 - 2z \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{B_1}{1 - 2z \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\ \sum v_n z^n = \frac{A_2}{1 - 2z \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{B_2}{1 - 2z \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

Autre méthode:
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

$\chi_A(x) = x^2 + x - 1$, donc:

$$A = P \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Donc:
$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Donc u_n et v_n sont des combinaisons linéaires de $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ et $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

On pose :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum u_n x^n \\ g(x) &= \sum v_n x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n - v_n \Rightarrow u_{n+1} x^{n+1} = u_n x^{n+1} - v_n x^{n+1} \\ &\Rightarrow \sum u_{n+1} x^{n+1} = \sum u_n x^{n+1} - \sum v_n x^{n+1} \\ &\Rightarrow f(x) - u_0 = x(f(x) - g(x)) \end{aligned}$$

$$v_{n+1} = u_n - 2v_n \Rightarrow g(x) - v_0 = x(f(x) - 2g(x))$$

Donc, on a le système suivant :

$$\begin{cases} f(x)(1-x) + xg(x) = u_0 \\ -f(x)x + (2x+1)g(x) = v_0 \end{cases}$$

Donc $(1-x)(2x+1) + x^2 = -x^2 + x + 1$.

On obtient :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{(2x+1)u_0 - xv_0}{-x^2+x+1} \\ g(x) = \frac{u_0(1-x) + v_0x}{-x^2+x+1} \end{cases}$$

Exo 1225

Soit G un sous-groupe strict de $(\mathbb{R}, +)$.

mq : $\mathbb{R} \setminus G$ est indénombrable.

1^{er} cas : Si G est dénombrable.

On suppose par l'absurde que $\mathbb{R} \setminus G$ est dénombrable.

Donc $GU(\mathbb{R} \setminus G)$ est dénombrable

ie : $\mathbb{R}$ est dénombrable : absurde.

2^e cas : Si G est indénombrable.

G est un sous-groupe **strict** de $(\mathbb{R}, +)$ donc $\mathbb{R} \setminus G \neq \emptyset$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus G$.

$\forall g \in G, x_0 + g \in \mathbb{R} \setminus G$, sinon : $x_0 + g = g' \in G$
donc $x_0 = g' - g \in G$, absurde.

Donc $\underbrace{\{x_0 + g : g \in G\}} \in \mathbb{R} \setminus G$

$\hookrightarrow$ en bijection avec G indénombrable

Donc $\mathbb{R} \setminus G$ est indénombrable.

Exo 1240

dé A : a_i est la probabilité d'obtenir i

dé B : b_i _____

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^6 a_i = \sum_{i=1}^6 b_i = 1.$$

S : la somme issue des deux dés.

On suppose que $S \sim \mathcal{U}(\llbracket 2, 12 \rrbracket)$.

Calculons :

$$\left. \begin{aligned} P(S=2) &= \frac{1}{11} = a_1 b_1 \\ P(S=12) &= a_6 b_6 = \frac{1}{11} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a_1}{a_6} = \frac{b_6}{b_1}.$$

$$P(S=7) = \frac{1}{11} = a_1 b_6 + a_6 b_1 + \dots$$

$$\text{Or } a_1 b_6 + a_6 b_1 \leq \frac{1}{11}$$

$$\text{Donc : } \underbrace{a_1 \left(b_1 \frac{a_1}{a_6} \right)}_{= \frac{1}{11}} + \underbrace{b_1 \left(a_1 \frac{b_1}{b_6} \right)}_{= \frac{1}{11}} \leq \frac{1}{11}$$

$$\text{Donc } \underbrace{\frac{a_1}{a_6}}_{\times} + \underbrace{\frac{b_1}{b_6}}_{1/\times} \leq 1$$

Montrons que $x + \frac{1}{x} \geq 2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On pose :

$$f: x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \quad : \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{si } x \geq 1 \\ < 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Or } f(1) = 2.$$

Donc :

$$f(x) \geq 2, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

C'est donc absurde $\Rightarrow$ on ne peut avoir
 $S \sim \mathcal{U}([2, 12])$.

Exo 1216

$$B_0 = B_1 = 1.$$

$$1/ \text{ Mg : } B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

On choisit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ parmi $\llbracket 1, n \rrbracket$ pour aller avec $\{n+1\}$.

On partitionne le sous-ensemble restant (des éléments non choisis)

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

$$2/ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

On montre par récurrence forte :
 $H(n) : "B_n \leq n!"$.

$$\bullet H(0) : B_0 \leq 1 = 0! \quad \underline{\text{OK}}.$$

• On suppose $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ que $H(k)$ est vraie.
Mg : $H(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k \leq \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} k! = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \\ &\leq \sum_{k=0}^n n! = (n+1)! \end{aligned}$$

$$H(n+1) : \underline{\text{OK}}.$$

$$\text{Donc } f(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \text{ donc } \underline{\text{RCV}(f) \geq 1}.$$

$$3/ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{B_k}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \times \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) = f(x) e^x$$

$$\text{Donc on a } f'(x) - f(x)e^x = 0.$$

$$4/ \text{ On a } f(x) = C e^{A(x)} \text{ avec } A(x) = \int e^t dt = e^x + \underline{K}$$

= 0 car
absorbé dans la
cste C

$$\text{On a } f(x) = C e^{e^x} \text{ et comme } f(0) = 1, \\ \text{on a } C = e^{-1}.$$

$$\text{Donc } f(x) = e^{e^x - 1}, \text{ donc } e^{e^x} = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

$$\begin{aligned} \text{Or } e^{e^x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n! k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n! k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \right) x^k. \end{aligned}$$

Par unicité des coeff. d'un DSE :

$$B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}.$$

① TD Mercredi 5/02/25. Ex 1227; 1236; 1238, 1249, 1238, 1232.

Ex 1227 (Lucas)

Soit $q_0 \in \mathbb{P}$, $p_0 \geq q_0$.

$$\| A_{q_0, p_0} = \left\{ \frac{p}{q} ; p \wedge q = 1, \frac{p}{q} \geq 1, p \leq p_0; q \leq q_0 \right\}.$$

$$\text{On a } \sum_{x \in A_0} \frac{1}{x^2} = \sum_{\substack{q \in [1, q_0] \\ p \in [1, p_0] \\ p \wedge q = 1 \\ p \geq q}} \frac{q^2}{p^2} \geq \sum_{\substack{q=1 \\ q \in \mathbb{P}}}^{q_0} q^2 \sum_{\substack{p=q+1 \\ p \wedge q = 1}}^{p_0} \frac{1}{p^2}.$$

$$\geq \sum_{\substack{q=1 \\ q \in \mathbb{P}}}^{q_0} q^2 \left(\sum_{p=q+1}^{p_0} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{p_0}{q} \rfloor} \frac{1}{q^2 k^2} \right).$$

$$\geq \sum_{\substack{q=1 \\ q \in \mathbb{P}}}^{q_0} \left(\int_{q+1}^{p_0+1} \frac{dt}{t^2} - \frac{1}{q^2} \frac{\pi^2}{6} \right).$$

$$\geq \sum_{\substack{q=1 \\ q \in \mathbb{P}}}^{q_0} \left(q^2 \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p_0+1} \right) - \frac{\pi^2}{6} \right).$$

$$\xrightarrow{p_0 \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{q=1 \\ q \in \mathbb{P}}}^{q_0} \left(\frac{q^2}{q+1} - \frac{\pi^2}{6} \right) \xrightarrow{q_0 \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc non normale.

Méthode 2 (Fagbaume): $\left(\frac{1}{x^2} \right)_{x \in \mathbb{Q}_1[1;2]} \geq \left(\frac{1}{4} \right)_{x \in \mathbb{Q}_1[1;2]}$.

Donc non normale

infini

Ex 1236 (Keglar).

A_i : "le candidat i a eu un exo de proba" pour $i \in \{1, 3\}$

B : "l'examinateur donne des exos de proba".

$$\text{On a } P_{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2}(B) = \frac{P_B(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)}{\underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)^2}_{\text{FPT}}} \times \frac{P(B)}{P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)} \geq \frac{1}{3}.$$

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{51}{75}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Donc } P_{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2}(B) = \frac{1}{51}. \end{array} \right\}$$

$$P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \stackrel{\text{L.F.P.T}}{=} \frac{1}{51} \times \frac{4}{5} + 0 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{255} //$$

Ex 1228 (Vicktor). (il s'agit des zetas)

$$\rightarrow A = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 q^2} = (\zeta(2))^2 = \frac{\pi^4}{36} //$$

$$\rightarrow B = \sum_{\substack{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ p|q}} \frac{1}{p^2 q^2}.$$

car $p|q \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, q = kp$.

soit $B = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \frac{1}{(kp)^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4} \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(4) \times \zeta(2) //$

$$\rightarrow C = \sum_{\substack{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{p^2 q^2} = \underbrace{\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2 q^2}}_A - \underbrace{\sum_{\substack{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ p \wedge q \neq 1}} \frac{1}{p^2 q^2}}_D.$$

Calcul de D $D = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\substack{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ p \wedge q = k}} \frac{1}{p^2 q^2}.$

car $p \wedge q = k \Leftrightarrow \exists (r,s) \in (\mathbb{N}^*)^2 \left\{ \begin{array}{l} p = rk \\ q = sk \end{array} \right. \quad r \wedge s = 1.$

Donc $D = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\substack{(r,s) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ r \wedge s = 1}} \frac{1}{(rk)^2 (ks)^2}.$

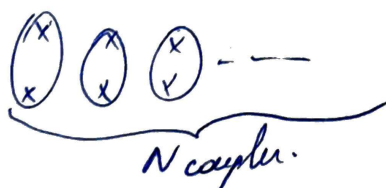
$$D = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^4} \sum_{\substack{(r,s) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ r \wedge s = 1}} \frac{1}{r^2 s^2}.$$

D'où $D = C(\zeta(4) - 1)$ C

Enfin $C = (\zeta(2))^2 - C(\zeta(4) - 1).$

D'où $C = \frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)}.$

Ex 1249 (Keylan)



A_N = nombre de serrage de maxims.

$2(N-1) + 2(N-1) + A_{N-1} = A_N.$ soit $A_N = 4(N-1) + A_{N-1}.$

$A_N = 4(N-1) + 4(N-2) + A_{N-2} \dots$

② etc... $A_N = 4 \sum_{k=0}^{N-1} k$

$$A_N = 2N(N-1)$$

Ex 1238 (Hugo).

a) indiscernables : choix de l'homme vide : m .
à 2 boules : $m-2$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{issues favorables } m(m-1) \\ \text{issues } \binom{m-1}{m} \end{array} \right\} P = \frac{m(m-1)}{\binom{m-1}{m}}$$

b) discernables : choix de l'urne : m .

$$\left. \begin{array}{l} \text{choix des 2 valeurs qui sont ensemble : } \binom{m}{2} \\ \text{permutation des boules restantes : } (m-2)! \end{array} \right\} \text{issues favorables : } m! \frac{m!}{2!(m-2)!} = m(m-1) \frac{m!}{2}$$

issues totales : m^m

$$\text{Donc } P = \frac{m(m-1)m!}{2m^m}$$

Ex 1232 (Victor).

$$a) \text{ Soit } k \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{l} \int_1^2 t^k dt = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} \\ \int_0^\pi e^{ik\theta} e^{i\theta} d\theta = \frac{(-1)^{k+1} - 1}{i(k+1)} \end{array} \right.$$

$$\int_1^2 t^k dt - \int_0^\pi e^{ik\theta} e^{i\theta} d\theta = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} + \frac{i}{k+1} \frac{(-1)^{k+1} - 1}{k+1} = 0.$$

par combinaison linéaire c'est vrai $\forall P \in \mathbb{R}[X]$

② $P^2 \in \mathbb{R}[X]$ donc l'égalité s'applique à P^2 :

$$\left| \int_1^2 P^2(t) dt + i \int_0^\pi P^2(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \right| = 0.$$

$$\left| \int_1^2 P^2(t) dt \right| \leq \int_0^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

~~$$\int_0^\pi P^2(t) dt \leq \int_{-\pi}^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta$$~~

$$\text{On a } \int_1^2 P^2(t) + P(-t)^2 dt \leq \int_{-\pi}^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

$$\text{Donc } 2 \int_0^1 P(t)^2 + P(-t)^2 dt \leq \int_{-\pi}^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

(Merci à Achille pour la source).

Suit $\int_0^1 P(t)^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^1 P(-t)^2 dt$
 $\leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta$

b) $\left\{ \begin{array}{l} P = \sum_{k=1}^m a_k X^k \\ Q = \sum_{k=1}^m b_k X^{k-1} \end{array} \right.$ et $PQ = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m a_k b_l X^{k+l-1}$

Donc $\int_0^1 PQ(t) dt = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{a_k b_l}{k+l}$

Par Cauchy-Schwarz: $\int_0^1 PQ \leq \sqrt{\int_0^1 P^2} \times \sqrt{\int_0^1 Q^2}$

or $\int_0^1 P^2 \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta$ Avec $|P(e^{i\theta})|^2 = \left(\sum_{k=1}^m a_k e^{+ik\theta} \right) \left(\sum_{k=1}^m b_k e^{-ik\theta} \right)$
 $= \sum_{k=1}^m a_k^2 + \sum_{k \neq l} a_k a_l e^{i(l-k)\theta}$

D'où $\int_0^1 P^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m a_k^2$

Idem pour Q : $\int_0^1 PQ \leq \pi \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2}$
 $= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{a_k b_l}{k+l}$

$\int_{-\pi}^{\pi} (.) d\theta = 0$

c). $\left(\frac{a_k b_l}{k+l} \right)_{(k,l)}$ ~~so~~ so ~~alle~~ $\Leftrightarrow \left(\frac{|a_k| |b_l|}{k+l} \right)_{(k,l)}$ ~~so~~ so ~~alle~~

Avec la logique précédente: $\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{|a_k| |b_l|}{k+l} \leq \pi \sqrt{\sum_{k=1}^m |a_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m |b_k|^2}$
 $\leq \pi \sqrt{AB}$

D'où $\sum_{(k,l) \in \mathbb{N}^2} \left(\frac{|a_k| |b_l|}{k+l} \right)$ converge d'où la famille est so ~~alle~~ alle