

$\mathcal{P}(0, \pi)$ est compact

où $R \leq \pi \rightarrow$ suite rage (5)

exo 7746:

$$f(x) = e^x \sin(x)$$

$$f(x) = \text{Im} (e^x e^{-ix})$$

$$= \text{Im} (e^{(1+i)x})$$

$$= \text{Im} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((1+i)x)^n}{n!} \right)$$

$$= \text{Im} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}^n}{n!} x^n e^{i n \frac{\pi}{4}} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}^n}{n!} x^n \sin(n \frac{\pi}{4})$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$a_n = \frac{1}{n!}; b_{2n} = 0$$

$$b_{2n+2} = \frac{(-1)^n}{(2n+2)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \text{ où } c_n = \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} b_{2k+2} a_{n-(2k+2)}$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{(2k+2)!} \frac{1}{(n-2k-2)!} = \frac{\sqrt{2}^n}{n!} \sin(n \frac{\pi}{4})$$

exo 7789:

a_n : nb de mots avec les lettres 0 et 1
sans 0 consécutifs

$$a_0 = 1$$

$$f: x \mapsto \sum_n a_n x^n \text{ de } \mathbb{R} \subset \mathbb{V} \mathbb{R}$$

(3)

1) Rq $R > 0$:

On a : $a_n \leq$ nb mots avec n lettres 0 ou 1
 $= 2^n$

$$\Rightarrow a_n \leq 2^n$$

$\rightarrow$ Rq $x < \frac{1}{3}$:

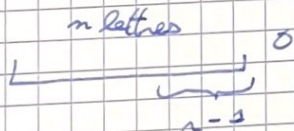
$$\sum_n 2^n x^n = \sum_n \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ qui csg.}$$

$$\Rightarrow R \geq \frac{1}{3}$$

2) n lettres $\begin{matrix} 0 \\ \text{ou} \\ 1 \end{matrix}$

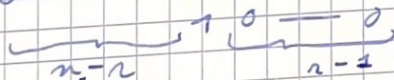
$\rightarrow$ si la $n+1^{\text{e}}$ lettre est 1 : a_n choix possibles

$\rightarrow$ si 0 :



le mot commençant 0 il n'y a pas $n-1$ 0 à la fin
 du mot de n lettres

nb de mots de n lettres avec $n-1$ 0 à la fin :



a_{n-2} choix possibles.

$$\rightarrow a_n = a_{n-2}$$

On trouve
$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_n + a_{n-1} - a_{n-2} \\ &= 2a_n - a_{n-2} \end{aligned}$$

$$3) \quad a_{n+n+1} - 2a_{n+n} + a_n = 0$$

$$\sum_0^{\infty} a_{n+n+2} x^n - 2 \sum_0^{\infty} a_{n+n} x^n + \underbrace{\sum_0^{+\infty} a_n x^n}_{f(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^{n+2}} \sum_0^{\infty} a_{n+n+2} x^{n+n+2} - \frac{2}{x^n} \sum_0^{\infty} a_{n+n} x^{n+n} + f(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Or: } \sum_0^{+\infty} a_{n+n+2} x^{n+n+2} &= f(x) - \sum_0^n a_k x^k \\ \sum_0^{\infty} a_{n+n} x^{n+n} &= f(x) - \sum_0^{n-2} a_k x^k \end{aligned}$$

$$f(x) \left(\frac{1}{x^{n+2}} - \frac{2}{x^n} + 1 \right) = \sum_0^n a_k x^k \times \frac{1}{x^{n+2}} - 2 \sum_0^{n-2} a_k x^k \times \frac{1}{x^n}$$

$$\text{Or a: } \forall k \in [0, n-2], \quad \underline{a_k = 2^k}$$

car tous les ~~trms~~ convergent, et $\underline{a_n = 2^n - 2}$.

Donc:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-2x+x^{n+2}} \left((2^n - 2) x^n + \sum_0^{n-2} (2x)^k - 2x \sum_0^{n-2} (2x)^k \right) \\ &= \frac{1}{1-2x+x^{n+2}} \left((2^n - 2) x^n + \frac{1 - (2x)^{n-1}}{1-2x} - 2x \frac{1 - (2x)^{n-1}}{1-2x} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{1-2x+x^{n+2}} \left((2^n-2)x^2 + 1 - (2x)^{n-2} \right)$$

1175

$$a) I_n = \int_0^{+\infty} \underbrace{t^{2n+1}}_{f_n(t)} e^{-t^2} dt.$$

$f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparée.

faux problème de convergence en 0.

D'après la bonne définition de I_n .

$$\text{On pose : } u = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{u} \\ dt = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{2n+1}{2}}}{2\sqrt{u}} e^{-u} du$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{u^n e^{-u}}{2} du = \frac{1}{2} \Gamma(n+1)$$

$$I_n = \frac{n!}{2}$$

$$b) F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(xt) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n+1} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} dt$$

$$\text{à justifier} \rightarrow = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} dt}_{= I_n = \frac{n!}{2}}$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n!}{2(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Justification de l'interversion :

$$\text{On pose : } a_n := \frac{(-1)^n n!}{2(2n+1)!}$$

TD

1198: Série

Règle de d'Alembert: (pour les séries)

$$\frac{x^{2n+3} |a_{n+1}|}{x^{2n+1} |a_n|} = \frac{(n+1)!}{(2n+3)!} \times \frac{(2n+1)!}{n!} x^2$$

$$\sim \frac{x^2}{4n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc le rayon de convergence $R = +\infty$.

c) $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(xt) dt$

On pose: $f(x, t) \mapsto e^{-t^2} \sin(xt)$.

- $x \mapsto f(x, t) \in \mathbb{R}$
- $t \mapsto f(x, t) \in \mathbb{R}$
- $\frac{\partial f}{\partial x}$?

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = t e^{-t^2} \cos(xt)$ est bien $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

- type de domination: $|t e^{-t^2} \cos(xt)| \leq t^2 e^{-t^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Donc: $F'(x) = \int_0^{+\infty} \overset{\uparrow}{t e^{-t^2}} \overset{\downarrow}{\cos xt} dt$.

$$\stackrel{\text{IPP}}{=} \left[-\frac{e^{-t^2}}{2} \cos xt \right]_{t=0}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x \sin(xt) e^{-t^2} dt$$

$$= +\frac{1}{2} - \frac{x}{2} F(x)$$

Donc: $F'(x) + \frac{x}{2} F(x) = \frac{1}{2}$.

Solution de l'équation homogène:

$$F_H(x) = \lambda e^{-x^2/4}$$

Solution particulière: variation de la constante

On considère $y(x) = \lambda(x) e^{-x^2/4}$.

On reporte dans l'équation:

$$\lambda'(x) e^{-x^2/4} - \frac{x}{2} \lambda(x) e^{-x^2/4} + \frac{x}{2} \lambda(x) e^{-x^2/4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc: } \lambda'(x) = \frac{1}{2} e^{x^2/4}$$

$$\text{Donc } \lambda(x) = \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t^2/4} dt$$

Ainsi:

$$F(x) = \lambda e^{-x^2/4} + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-\frac{x^2-t^2}{4}} dt$$

$$\text{Or: } F(0) = \lambda = 0$$

$$\text{Donc: } F(x) = \frac{1}{2} \int_0^x e^{-\frac{x^2-t^2}{4}} dt$$

Ex 7751: $a_0 = 0$; $a_1 = 2$, $\forall n \geq 2$, $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$

$$S(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$$

$$\forall R > 0,$$

$$\forall x \in]-R, R[$$

$$\forall x \in]-R, R[: S(x)^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$$

$$\text{où } b_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$$

$$\rightarrow b_0 = b_1 = 0$$

$$\Rightarrow S(x)^2 = \sum_{n \geq 2} a_{n-1} x^n = S(x) - x$$

$$\forall n \geq 2: b_n = a_{n-1}$$

$$2) \quad x^2 - x + x = 0 \quad \Delta = 1 - 4x$$

$$S(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$$

$$S(0) = 0$$

$$\text{donc } S(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$$

$$S(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$$

$$\text{DSE de } \sqrt{1-4x} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-4x)^n}{n!} \frac{1}{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{2} - n + 1 \right)$$

$$= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{n!} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \frac{(2n-2)!}{(n-1)! 2^{n-2}} x^n$$

$$= 1 - \sum_{n \geq 2} \frac{2 x^n (2n-2)!}{(n-1)! n!}$$

$$= 1 - \sum_{n \geq 2} \frac{2 x^n \binom{2n-2}{n-2} \frac{1}{n}}{1}$$

$$S(x) = \sum_{n \geq 2} x^n \binom{2n-2}{n-2} \frac{1}{n}$$

on écrit les coeff d'1 DSE: $\forall n \geq 2, a_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-2}$

$$4) \quad P_n = x_1 x \dots x x_k x \dots x x_n$$

→ peut composer les produit en k:

$$P_n = \underbrace{(x_1 x \dots x x_k)}_{C_k \text{ possibilités}} \times \underbrace{(x_{k+1} x \dots x x_n)}_{C_{n-k}}$$

Donc: $C_n = \sum_{k=1}^{n-2} C_k C_{n-k}$ et $C_0 = 0$ et $C_1 = 1$
 $\Rightarrow C_k = a_k \quad \forall k.$

Ex 70.8P:

$$g(x, t) = \frac{t^{x-2}}{e^t - 2} \quad \text{et } F(x) = \int_0^\infty g(x, t) dt$$

$$d\mathcal{D}_F : x \rightarrow \infty : g(x, t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$x \rightarrow 0 : g(x, t) \sim \frac{t^{x-2}}{e} \sim \frac{1}{t^{2-x}}$$

$$2-x < 2$$

$$\Rightarrow x > 2$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_F =]2, +\infty[.$$

b) Let $x > 2$:

$$g(x, t) = t^{x-2} \cdot t \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} t^{x-1} e^{-nt}$$

c) $\forall x > 2$:

$$F(x) = \int_0^\infty \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (t^{x-1} e^{-nt})}_{v_n(t)} dt \quad \rightarrow \text{CVS}$$

$$\Rightarrow v_n(t) \underset{t \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right) \Rightarrow \text{integrable sur } \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty t^{x-2} e^{-nt} dt = \frac{1}{n^x} \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du \quad \begin{matrix} \uparrow \\ u=nt \end{matrix}$$

$$\Rightarrow F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du = \Gamma(x) \zeta(x) \rightarrow e^\infty.$$

20.11.3:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin(xt)}{\Delta h(t)}}_{g(x,t)} dt$$

a) $g \in C^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^*_+)$

$$x \rightarrow 0: g \sim x$$

$$x \rightarrow +\infty: g = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\text{Ed: } g = R$$

$x \mapsto g(x,t)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$

$t \mapsto g(x,t) \in C^0_{\text{pm}} \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ (et intégrable)}$

soit $q \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \frac{\partial^q g}{\partial x^q}(x,t) \right| \leq \frac{t^q}{\Delta h(t)}$$

$\varphi(t) \in C^0_{\text{pm}}$ et int ble sur $\mathbb{R}_+$

$\Rightarrow g$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Delta h(t)} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (xt)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) dt$$

$$= \sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n (xt)^{2n+1}}{(2n+1)! \Delta h(t)}}_{u_n(t)} dt$$

$$\sum u_n \xrightarrow{\text{CVS}} \frac{\sin(xt)}{\Delta h(t)} \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

(5)