

TD 15

Exercice 160: $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$

Pour $|x| < 1$:

$$|x|^{n^2} = o(|x|^n)$$

$$\left| \frac{|x|^{n^2}}{|x|^n} \right| = \left(\frac{|x|^n}{|x|} \right)^n$$

car pour $n \geq 1$, $\ln|x| < 0$ et croissance de exp
Donc par comparaison, $\sum |x|^n$ CV donc $\sum |x|^{n^2}$ CV

Pour $|x| \geq 1$, $x^{n^2} \not\rightarrow 0$

Donc $\sum x^{n^2}$ DV grossièrement.

Soit $x \in \mathbb{C}$, $0 < x < 1$

$$t \mapsto x^{t^2} = e^{t^2 \ln(x)} \text{ est } \mathcal{O}^{\infty}, \forall, \gamma > 0$$

Soit $h \geq 1$

$$\int_h^{h+1} e^{t^2 \ln(x)} dt \leq e^{h^2 \ln(x)} \int_{h-1}^h e^{t^2 \ln(x)} dt$$

$$\text{D'où: } \int_0^{n+1} e^{t^2 \ln(x)} dt \leq \sum_{k=0}^n x^{k^2} \leq \int_0^n e^{t^2 \ln(x)} dt + 1$$

$$\text{On pose } -u^2 = t^2 \ln(x)$$

$$u = \sqrt{-\ln(x)} t \text{ car } x < 1$$

$$\text{et } t \mapsto \sqrt{-\ln(x)} t \in \mathcal{O}^{\infty}(\mathbb{R}_+)$$

$$\int_0^n e^{t^2 \ln(x)} dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \int_0^{\sqrt{-\ln(x)} n} e^{-u^2} du$$

$$\text{donc } \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \int_0^{(n+1)\sqrt{-\ln(x)}} e^{-u^2} du \leq \sum_{k=0}^n x^{k^2} \leq \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \left(\int_0^{\sqrt{-\ln(x)} n} e^{-u^2} du \right) + 1$$

$$\text{Par passage à la limite, } \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln(x)}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \leq 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln(x)}}$$

i.e.

$$1 \leq \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln(x)}}} \leq 1 + \underbrace{\frac{2\sqrt{-\ln(x)}}{\sqrt{\pi}}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0}$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\ln x}}$$

soit pose $x = 1+y$

$$\ln(1+y) \sim y \quad \text{c-à-d} \quad \ln x \sim x-1$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{\infty} x^{-n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\ln x}}$$

Exercice 1170: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$

a) - Pour $|x| > 1$

$$(-1)^k x^{2k} \rightarrow 0$$

La série DVC croît

- Pour $|x| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

$$k:0 \quad x^{2k} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{0}$$

CSA: $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$ CV, $|RCV| = 1$

$$\begin{aligned} f(x^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x^2)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{2k} \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = -(f(x) - x) \end{aligned}$$

D'où $f(x^2) + f(x) = x$

c) $f(x) \rightarrow l, \quad 2l = 1, \quad |l = \frac{1}{2}$

d) $\exists x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[, f(x) > \frac{1}{2}$

$$f(x^2) + f(x^2) = x^2$$

$$f(x^2) - f(x) = x^2 - x = x(x-1)$$

$$\forall x \in [0; 1[$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} 2k x^{2k-1}$$

D'après CSA ici car il faudrait un 0 ou à étudier

Il n'y a pas besoin du CSA:

Puisque sur $(0; 1]$, $x(x-1) \leq 0$:

Si $x_0 > 0$:

$$f(x_0) \leq f(x)$$

Donc pour $x = x_0$:

$$f(x_0^{1/n}) \geq f(x_0) \geq \frac{1}{2}$$

On pose $x_n = x_0^{\frac{1}{n}}$ et $f(x_n) \geq f(x_0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$
et $x_n \rightarrow 1$, donc on a:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f \geq f(x_0) = \frac{1}{2} \text{ absurde}$$

Si $x_0 \in]-1; 0]$, sur $]-1; 0]$, $f(x_n) \geq f(x_0)$

$$f(x_n) \geq f(x_0) \geq \frac{1}{2}$$

$$x_n = |x_0|^{\frac{1}{n}}$$

$x_n \rightarrow 1$, $f(x_n) \geq f(x_0) \forall n$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \geq f(x_0) \geq \frac{1}{2}$
absurde

$$c) f(0,995) > 0,5008$$

$\Rightarrow f$ n'a pas de limite en 1

$$S_{2n+1} < S < S_{2n}$$

$$n=10, S_7, S_{2n+1} = 0,50088$$

$$S > 0,5008$$

Exercice 148:

$$\Phi \text{ RCV est somme de } f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{(n!)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!} = e^{|x|}$$

$$\text{On a donc RCV} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)} \right) = +\infty$$

1^{re} cas: $x \geq 0$:

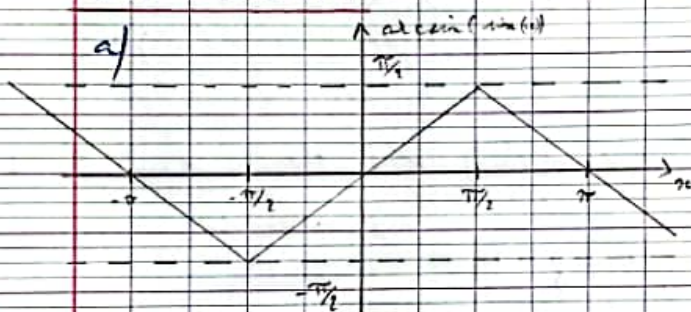
Donc $\exists y \in \mathbb{R}_+ \forall x = y^2$
 donc $f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!} = \text{ch}(y)$

2^{de} cas: $x < 0$:

$\exists y \in \mathbb{R}_+ \forall x = -y^2$
 $f(-y^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} = \cos y$

On a donc: $f(x) = \begin{cases} \text{ch}(\sqrt{x}) & \text{pour } x \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & \text{pour } x < 0 \end{cases}$

Exercice 149:



b) $REV = \pm$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)}$$

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{\pm}{2^{2n+1}(2n+1)} \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{2n+1} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{\sin(x)^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)} \right) dx \quad (\text{TITAT SUITE})$$

$$\arctan(\sin(x)) = \arctan(x) \quad [0; \pi/2]$$

Donc $S = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{2} dx = \frac{\pi^2}{8}$

Exercice 10.89: (TD 14)

$f \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(0) = 0$

On veut: $\exists g \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\frac{f(x) - f(0)}{x} = g(x)$
On pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$

prolongement par continuité: $g(0) = f'(0)$
 $\Rightarrow g$ def. sur $\mathbb{R}$ (c.e. $f'(0) = 0$)

$$\int_0^x f'(x-t) dt = g(x)$$

$$\int_0^x \underbrace{f'(x-t)}_{h(x,t)} dt = \left[\frac{f(x-t)}{-1} \right]_0^x = \frac{f(x)}{-1} = -f(x)$$

Montrons que h est $\mathcal{C}^r \Leftrightarrow h$ est $\mathcal{C}^k$ $\forall k \leq r$

Pour: $h: (0; 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(t, x) \mapsto h(x, t) = f'(x-t)$$

On a: $-x \mapsto h(x, t)$ $\mathcal{C}^r$ car $f \in \mathcal{C}^r$

$$\left. \begin{array}{l} -t \mapsto h(x, t) \\ -t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \\ \vdots \\ -t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \end{array} \right\} \text{EM int\grave{e}grable}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x^{k-1}} = f^{(k)}(x-t)$$

Continue en tant que fonction de 2 variables.

- hyp. de domination en version Boole Z\grave{e}ro:

$$\forall t \in [0; 1]$$

$$\Rightarrow \text{TBA}$$

$$\Rightarrow g \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Exercice 1032: $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt$

a) $f(x, t) = \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}$

En $x \rightarrow +\infty$: $|f(x, t)| \sim \frac{\pi/2}{1+t^2}$ Riemann intégrable en t

En $x \rightarrow 0$: $f(x, t) \sim \frac{tx}{1+t^2} = x$ pour $x \neq 0 \rightarrow$ intégrable
 $x=0 \rightarrow f(0) = 0$

Donc F est déf. sur $\mathbb{R}$.

F impaire car $\arctan$ impaire (et $\frac{1}{1+t^2}$ paire)
check la parité

b) $x \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$t \mapsto f(x, t)$ GM sur $\mathbb{R}_+$

$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$??

$f(x, t) = \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{t}{1+t^2} \times \frac{1}{1+t^2}$ GM sur $\mathbb{R}_+$

- hyp. de dom. $|\frac{\partial f}{\partial x}| \leq \frac{1}{1+t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$

- Ch de dérivation

F est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+(tx)^2)} = \frac{a}{1+t^2} + \frac{b}{1+(tx)^2}$

$\frac{a}{1+t^2} + \frac{b}{1+(tx)^2} = \frac{a + a t^2 x^2 + b + b t^2}{(1+t^2)(1+(tx)^2)} = \frac{a+b + t^2(ax^2+b)}{(1+t^2)(1+(tx)^2)}$

$\begin{cases} a+b=1 \\ ax^2+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(1-x^2)=1 \\ b=-ax^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{1-x^2} \\ b = \frac{x^2}{1-x^2} \end{cases} \quad (x \neq \pm 1)$

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\frac{1}{1+t^2}}{1-x^2} - \frac{x^2}{1-x^2} \times \frac{1}{1+t^2} \right) dt$$

$$= \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} - \frac{x^2}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

$u = \frac{1}{t}$
 $t = \frac{1}{u}$
 $dt = -\frac{du}{u^2}$

$= \frac{\pi}{2}$

$$F'(x) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{x^2}{1-x^2} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1-x^2}{(1-x)(1+x)} \right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+x}$$

Si $x < 0$: $F'(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1-x}$

F est $\mathcal{C}^1$ donc F' est $\mathcal{C}^0$ d'où $F'(1) = \frac{\pi}{4}$

d) Pos $x \geq 0$: $F(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x)$ et bien $F(0) = 0$
 donc $k = 0$

Et 2: $x < 0$: $F(x) = -\frac{\pi}{2} \ln(1-x)$

$$F: \begin{cases} x \rightarrow \frac{\pi}{2} \ln(1+x) \text{ pour } x \geq 0 \\ x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \ln(1-x) \text{ pour } x < 0 \end{cases}$$

$$F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t(1+t^2)} dt$$

IPP: $u(t) = \frac{\arctan t}{t}$, $u'(t) = \frac{1}{t(1+t^2)} - \frac{\arctan t}{t^2}$

$v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $v(t) = \arctan t$

$$F(1) = \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2(t)}{t} dt}_{=0} - \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t(1+t^2)} dt}_{F(1)} + \int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt$$

Si on $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt = 2F(1) = \pi \ln 2$

Exercice 1145: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
 ϕR ?

$$x=0, \quad \phi h(0) = 0 \text{ OK}$$

$$x \neq 0, \quad u_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{2(n+1)}}{x^{2n} (2n+2)} = \frac{x^2}{(2n+2)}$$

D'identif: $\sim \frac{x^2}{4n^2} \rightarrow 0$
 Donc $R = +\infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\sqrt{e})^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/\sqrt{e})^{2n}}{(2n)!}$$

$$(\text{avec } \cosh u = \frac{1}{2} (e^u + e^{-u}))$$

Donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} (\cosh(\sqrt{e}x) + \cosh(\frac{x}{\sqrt{e}}))$

Exercice 1146:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

$$R = 1, \quad \frac{x^{n+1}}{x^n} = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1$$

$$R \cap R = 1$$

$$\forall x \in]-1; 1[$$

$$f(x) = x \times \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = x \times \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

Donc $\forall x \in]-1; 1[, f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$

b) $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = -x^n$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, e^{nx} \geq 1 \geq x$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x}{e^n} < 1$

$$\forall x \in \mathbb{R}, y = \frac{x}{e^n}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, g(x)$ est bien

→ Lemma: On a $\forall y \in]-1; 1[$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ny^n = \frac{y}{(1-y)^2}$$

b) Soit $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = \frac{xe^{-nx}}{(1-ye^{-x})^2}$

$$I = \int_0^{+\infty} g(x) dx$$

$$I = \int_0^{+\infty} \sum_{n \geq 1} n e^{-nx} x^n dx$$

$$I \stackrel{a)}{=} \sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} e^{-nx} x^n n dx$$

$$u = nx$$

$$du = n dx$$

$$\text{Donc } I = \sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{n}\right)^n du$$

$$I = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-u} u^n du}_{\Gamma(n+1) = n!}$$

$$I = \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$$

Justification du TITATSIQ:

$$u_n(x) = n e^{-nx} x^n$$

→ par le b, CVS sur $\mathbb{R}^+$

→ $u_n(x)$ est intégrable

$$\rightarrow \int_0^{+\infty} |u_n(x)| dx = \frac{n!}{n^n} = b_n$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = e^{-n \ln(1 + \frac{1}{n})} \underset{1}{=} e^{-1}$$

Comme g est d'une série CV par d'Abel

Exercice 1155:

$$F: x \mapsto \int_0^{\infty} e^{-xv} \operatorname{ch}(2vt) dv$$

a) On pose $f(x, v) = e^{-xv} \operatorname{ch}(2vt)$

f est positive (à voir)

$t \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^\infty$ (80%) à x fixé dans $\mathbb{R}$

$x \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^\infty$ ——— v ———

Hypothèses:

Soit $0 < a \in \mathbb{R}^+$

Soit $(x, t) \in [0, a] \times \mathbb{R}^+$

$$|f(x, v)| = \frac{1}{2} (e^{2vt-xv} + e^{-2vt-xv})$$

$$|f(x, v)| \leq \frac{1}{2} (e^{-v^2} + e^{-2vt-xv})$$

$$\leq \frac{1}{2} e^{-v^2} \left(1 + e^{1-\frac{2a}{v}} \right) \underset{v \geq \frac{1}{2a}}{\leq} \mathcal{O}\left(\frac{1}{v^2}\right)$$

Dans F est continue sur $\mathbb{R}^+$ dans une $\mathbb{R}$ pas grande

b) $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-vt} dt$ $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$I_{n+1} = \left(\int_0^{+\infty} \underbrace{t^{2n+1}}_{\downarrow} \times \frac{1}{t} e^{-vt} dt \right) \times \frac{1}{2}$$

$$\stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{1}{2} \left(\underbrace{\left(\int_0^{+\infty} t^{2n+1} e^{-vt} dt \right)}_{\substack{=0 \\ \text{car } vt \rightarrow 0 \\ \text{pour } t \rightarrow 0 \\ \text{par croissance compensée}}} \right) + \int_0^{+\infty} (2n+1) t^{2n} e^{-vt} dt$$

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2} \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-vt} dt}_{I_n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{2n+1}{2} I_{n-1} = \frac{((2n-1)+1)((2n-2)+1)}{2^2} I_{n-2}$$

$$= I_0 \times \frac{(2n-1) \times \dots \times 1}{2^n} = I_0 \frac{(2n)!}{2^n \times 2^{n-1}!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \frac{(2n)!}{2^n \times 2^{n-1}!}$$

c) DSE :

$$\text{ch}(2tx) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} x^{2n} \times \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

(a, t) $\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

Soit x fixé dans $\mathbb{R}$.

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \text{ch}(2tx) dt \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2n} dt \right) x^{2n} \times \frac{2^{2n}}{(2n)!}$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \right) \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{d) } R = +\infty \text{ de } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = e^{x^2}$$

$$\text{D'où } F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}$$