

TD du 21/01/2025

Exercice 021

• $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$

$u: \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ u(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \end{cases}$

(i) $\forall x \in \mathbb{R}_+, x \mapsto u(x,t)$ est $\mathcal{C}^\infty$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}_+, t \mapsto u(x,t)$ est $\mathcal{C}^\infty$ et intégrable car $O(1/t^2)$ en $+\infty$.

$t \mapsto \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -\frac{te^{-xt}}{1+t^2}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et intégrable

(iii) $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$

$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \right| = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$

$\forall L: [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*, x \in [a,b]$

$\forall t: \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \right| \leq \frac{t^2 e^{-at}}{1+t^2}$ intégrable

$\Rightarrow f$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt$

$$f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$$

$$= \left[-\frac{1}{x} e^{-xt} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$$

donc f vérifie $E: y'' = y = \frac{1}{x}$.

$$\bullet g: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$$

$\xrightarrow{1-\cos t}$
 $\xrightarrow{-\frac{1}{(x+t)^2}}$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos t)}{(x+t)} dt + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(x+t)^2} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(x+t)^2} dt$$

$$u: \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto \frac{1-\cos t}{(x+t)^2} \end{cases}$$

(i) $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto u(x, t)$ est $\mathcal{C}^\infty$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad t \mapsto u(x, t)$ est $\mathcal{C}^\infty$ et intégrable

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -2 \frac{(1-\cos t)}{(x+t)^3} \quad \text{intégrable et } \mathcal{C}^\infty$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{6(1-\cos t)}{(x+t)^4}$$

$$\forall L: \text{Saut } [a, b] \subset \mathbb{R}_+^T, \text{ so } f \in (0, b)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \left| \frac{f^2(t)}{2x^3} \right| \leq \frac{12}{(a+t)^4} \text{ intégrable}$$

$$\Rightarrow g \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{6(1-\cos t)}{(x+t)^4} dt$$

$$= \left[\frac{-2(1-\cos t)}{(x+t)^3} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-2 \sin t}{(x+t)^3} dt$$

$$= \left[\frac{\sin t}{(x+t)^2} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2} dt$$

$$= - \left(\frac{\cos t}{x+t} \right)_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{-\sin t}{x+t} dt = \frac{1}{x} - g(x)$$

$$g'(x) + g(x) = \frac{1}{x}$$

$$b) f \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ en } 0 \quad \text{Mq } g \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ en } 0$$

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(x+t)^2} dt$$

$$u: \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \longmapsto \frac{1 - \cos t}{(x+t)^2} \end{cases}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad x \mapsto u(x, t) \quad \text{est } \mathcal{C}^\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad t \mapsto u(x, t) \quad \text{est } \mathcal{C}^\infty$$

$$u \in (a, b) \subset \mathbb{R}_+$$

$$\forall t > 0 \quad |u(x, t)| \leq \frac{2}{(a+t)^2} \quad \text{intégrable}$$

$$\Rightarrow g \in \mathcal{C}^0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ donc en } 0.$$

$$d) \quad h = g - f \text{ vérifie}$$

$$h'' - h = 0.$$

$$h(x) = A \cosh x + B \sinh x$$

$$\text{Mg } h \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$u(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

On utilise le TCD à paramètre continu

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2} \quad \text{intégrable}$$

$$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{(t+x)^2} dt$$

$$\frac{1 - \cos t}{(t+x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\forall x \geq 1 \quad |u(x,t)| \leq \frac{2}{1+t/2} \quad \text{intégrable sur } [0, +\infty[$$

$$g(x) \rightarrow 0$$

$$h(x) \rightarrow 0$$

$$h = 0$$

$$f = g \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 1002.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x} = f_n(x)$$

$$a) \quad x \leq 0 \quad \sum e^{-n^2 x} \text{ diverge car } e^{-n^2 x} \not\rightarrow 0$$

$$x > 0 \quad e^{-n^2 x} = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ donc } f \text{ définie}$$

$$b) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$$

$$\sum f_n \text{ cv}$$

$$f_n(x) = -n^2 e^{-n^2 x^2}$$

$$\text{Soit } [a, b] \subset \mathbb{R}^+$$

$$\|f_n\|_{\infty}^{[a,b]} = n^2 e^{-n^2 a^2} \quad \text{tg } \sum cu$$

Th de dérivabilité

f est $\mathcal{C}^1$ donc $\mathcal{C}^0$.

$$f'(x) = \sum_{n \geq 0} -n^2 e^{-n^2 x} < 0 \quad \text{donc } f \downarrow$$

$x \rightarrow +\infty$:

$$\text{pour } x \in [1, +\infty[$$

$$|f_n(x)| \leq e^{-n^2}$$

$$\|f_n\|_{\infty}^{[1, +\infty[} \leq e^{-n^2} \quad \text{tg } \sum cu$$

$$\sum f_n \text{ CVM sur } [1, +\infty[$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$$

limite en 0:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x} \geq \sum_{n=0}^n e^{-n^2 x}$$

$\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1 + \dots$

$\forall A \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, n+1 \geq A$

et $\exists \alpha > 0$ ($\forall x \in]0, \alpha]$)

$$f(x) \geq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 x} \geq \frac{A}{2}$$

donc $f(x) \rightarrow +\infty$

d) Equivalents en $+\infty$

$$f(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} 1$$

Equivalents en 0^+

$$f(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(nx)^2}$$

$$x f(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} x e^{-(nx)^2}$$

$$\text{on pose } g(t) = e^{-t^2} \text{ et } g'(t) = -2t e^{-t^2}$$

$$x f(x^2) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

intégrable

$$\text{donc } f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

Exercice 1036

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \ln(1+x^n)$$

$\forall x \in]-1, 0[$, $|\ln(1+x^n)| \sim \frac{1}{n} |x^n|$
 by of line series

$$D_f =]0, 1[$$

$$u_n \Big|_{D_f} \rightarrow \mathbb{R} \quad \varphi^0$$

$$x \mapsto \ln(1+x^n)$$

$$\sum u_n \stackrel{\text{CVS}}{\Big/} \text{ sur }]-1, 1[$$

$$\text{Soit } (a, b) \subset]0, 1[$$

$$|\ln(1+x^n)| \leq \frac{1}{n}$$

by series CV

$$\sum u_n \text{ CVN}$$

$$y: t \mapsto \ln(1+x^t) \rightarrow$$

$$\ln(1+x^{n+1}) \leq \int_n^{n+1} \ln(1+x^t) dt \leq \ln(1+x^n)$$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} \ln(1+x^t) dt \leq \ln(1+x^n) \leq \int_{n-1}^n \ln(1+x^t) dt$$

$$\int_0^{\infty} \ln(1+x^t) dt \leq \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+x^n) \leq \ln 2 + \int_0^1 \ln(1+x^t) dt$$

$$u = x^t = e^{t \ln x}$$

$$du = \ln x \cdot x^t dt$$

$$dt = \frac{du}{\ln x \cdot x^t}$$

$$\text{donc } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^t)}{t} dt = \frac{1}{\ln x} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$$

pour plus de précision
car $\ln(1+u) \sim u$

$$(LL) f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} +\infty$$

$$\text{Donc } \frac{\ln(1+u)}{u} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^{n-1}}{n}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^{n-1}}{n} du$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{n} du$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^{n-1}}{n} \text{ CLS}$$

$$\bullet \frac{1}{n} (-1)^{n+1} \frac{u^{n-1}}{n} \text{ intégrable sur } (0,1)$$

$$\bullet \int_0^1 \left| (-1)^{n+1} \frac{u^{n-1}}{n} \right| du = \frac{1}{n} \left[\frac{u^n}{n} \right]_0^1 = \frac{1}{n^2} \text{ par suite}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right)$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \zeta(2)$$

$$= \frac{\pi^2}{12}$$

$$C(L) \sim \frac{\pi^2}{12 A(x)}$$

$$\sim \frac{\pi^2}{12 (x-1)}$$

Exercice 1080:

a) en 0: $\frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)} = g_n(x) \rightarrow$ intégrable

en $+\infty$ $g_n(x) \sim \frac{1}{x^2}$ intégrable

$$I(0) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan(x) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

b) $g_n(x) \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{si } x \in [0, 1] \\ \frac{1}{2(1+x^2)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$g \in \mathcal{M}$ sur $\mathbb{R}^+$

• domination $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^+$

$$|g_\alpha(x)| \leq \frac{1}{(1+x^2)}$$

intégrable sur $\mathbb{R}^+$

TCD

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha) = \int_0^{+\infty} g(x) = \int_0^1 g(x) dx = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

c) $u = \frac{1}{x}$

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\alpha+1}}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{du \sqrt{u^2}}{(1+u^2)^{\alpha+1} (1+\frac{1}{u^2})}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha du}{(u^\alpha+1)(u^2+1)}$$

$$2I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{(1+u^2) du}{(u^\alpha+1)(u^2+1)} = \frac{\pi}{2}$$

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{4} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+$$

Essência 1069

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\pi/2} x \cos t \cos(x \sin t) dt \\
 &= \operatorname{Re} \left(\int_0^{\pi/2} x \cos t e^{ix \sin t} dt \right) \\
 &= \int_0^{\pi/2} x (\cos t - i \sin t) dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} x e^{-it} dt \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \int_0^{\pi/2} t^n dt
 \end{aligned}$$

TITATSIQ

$\sum \psi_R$ via par construction.

u_n est intégrable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |u_n(x)| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^k}{k!} dx = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\bar{I}_{A+1}}{\bar{I}_A} = \frac{x}{A+1} \rightarrow 0 \quad A \rightarrow \infty$$

OK, send it Lambert.

$$I(x) = R_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \int_0^{\frac{\sqrt{x}}{2}} e^{-ikx} dx \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2n}}{(2n)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos h t \, dt$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2n}}{(2n)!} \frac{\sin(\frac{h\pi}{2})}{h}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2n}}{(2n)!} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$

On $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} (-1)^{n+1} dt$

TITATSUIQ $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^x t^{2n} dt = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$$- \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

$$I(x) = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

ICD a parametre e^x

$t \mapsto e^{-x \cos t} \cos(x \sin t) \rightarrow 0$

$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $e^{-x \cos t} \cos(x \sin t) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow +\infty$

$(\cos t > 0, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}])$
 $|e^{-x \cos t} \cos(x \sin t)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

quand $x \rightarrow +\infty$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

Exercice 1083:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} \sin t \, dt$$

$$f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{t} \sin t = \frac{e^{-xt}}{2t} (e^{+t} - e^{-t})$$

$t \mapsto f(x, t)$ φ^0 sur $]0, +\infty[$

en 0 $\frac{e^{-xt}}{t} \sin t \sim \frac{t}{t} = 1$ (Hauts saut de 1)

en $+\infty$ $\frac{e^{-xt}}{t} \sin t \sim \frac{e^{-xt} e^t}{2t} = \frac{e^{t(1-x)}}{2t}$

$x > 1$ $\frac{e^{t(1-x)}}{2t} \rightarrow 0 \left(\frac{1}{t^2} \right)$

$x = 1$ $= \frac{1}{2t}$

$x < 1$ $\rightarrow +\infty$

$$D =]1, +\infty[$$

Sur $x \neq +\infty$:

$x \mapsto f(x, t)$ est φ^0 sur D .

$t \mapsto f(x, t)$ est φ^M et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

$$f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Soit $a > 1$ $\forall x \in [a, +\infty[$

$$|f(x, t)| \leq \frac{e^{-at}}{t} \sin t \text{ intégrable sur } \mathbb{R}^+$$

Dans pour le T.C.D $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

c) Mon F est φ'

$t \mapsto f(x, t)$ est φM intégrable sur $\mathbb{R}^+$
 $x \mapsto f(x, t)$ est φ^0 sur D .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{t}{x} e^{-xt} \text{ sh}(t) = e^{-xt} \text{ sh}(t).$$

Soit $a > 1$ $t \geq t^* (a, +\infty)$

$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq e^{-act} \text{ sh}(t)$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$

$$F \text{ est } \varphi' \text{ et } F'(x) = \int_0^{+\infty} -e^{-xt} \text{ sh}(t) dt$$

$$= -\frac{1}{x} \left[e^{-xt} (1-x) - e^{-t(1+x)} \right]_{t=0}^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{x} \left[\frac{e^{-t(1+x)}}{1-x} \right]_{t=0}^{+\infty} = \frac{e^{-t(1+x)}}{1-x} \Big|_{t=0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)$$

$$F(x) = \frac{1}{x} \left(-\ln(x-1) + \ln(1+x) \right) + C$$

$$= \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1+x}{x-1} \right) + C \quad \text{or } F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } C=0$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{x-1} \right)$$