TD du Jeudi 16 Janvier

Exercice 1007 (Victor)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrons que $\int_1^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{x^{2n}} dx$ converge.

En justifiant a posteriori,

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \left[\frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}} \right]_1^{+\infty} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{2n-1}$$

converge par le critère spécial des séries alternées.

Appliquons le théorème de convergence dominée aux sommes partielles

Posons $\forall n\in\mathbb{N}$ $S_n \left| \begin{array}{l} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \to \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k a_k}{x^{2k}} \end{array} \right. \in \mathcal{C}^0([1;+\infty[;\mathbb{R})$. Ainsi

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement puisque $\forall x \in [1;+\infty[$

$$|S_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{2k}} \leq a_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x^{2k}} = \frac{a_0}{x^2} \times \frac{1-\frac{1}{x^{2n}}}{1-\frac{1}{x^2}} \leq \frac{a_0}{x^2-1}.$$

Posons $\varphi \left| \begin{array}{l} [2;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \to \frac{a_0}{x^2-1} \end{array} \right.$. Ainsi, φ est intégrable sur $[2;+\infty[$,

ce qui entraîne que $\int_2^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{x^{2n}} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_2^{+\infty} \frac{a_n}{x^{2n}} dx$

Montrons que $\int_1^{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{x^{2n}} dx$ converge, ie c'est

que $S \left| \begin{array}{l} [1;2] \to \mathbb{R} \\ x \to \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{x^{2n}} \end{array} \right. \in \mathcal{C}^0([1;2];\mathbb{R})$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$S_n|_{[1;2]} \in \mathcal{C}^0([1;2];\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. De plus, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU} S$ sur $[1;2]$

puisque $\forall x \in [1;2]$, $|R_n(x)| \leq \frac{a_{n+1}}{4} \leq a_{n+1}$ et

$0 \leq \|S - S_n\|_\infty^{[1;2]} = \|R_n\|_\infty^{[1;2]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Exercice 1008 (Adam):

a). Posons $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt$ et $f_n \left| \begin{array}{l}]0;1] \to \mathbb{R} \\ x \to \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} \end{array} \right.$. Ainsi $\forall t \in]0;1]$

$|f_n(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$, avec $\varphi \left| \begin{array}{l}]0;1] \to \mathbb{R} \\ t \to \frac{1}{\sqrt{t}} \end{array} \right. \in \mathcal{L}^1(]0;1];\mathbb{R})$.

De plus, $\forall t \in]0;1]$, $f_n(t) = \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après le théorème de la convergence dominée $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 0\,dt = 0$

b) Posons $u = nt$. Ainsi, $du = n\,dt$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{n}\int_0^n \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^n \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

Donc, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge (par comparaison avec les séries de Riemann)

c) Posons $\forall k \in \mathbb{N}$ $f_k \left| \begin{array}{l}]0;1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto (-1)^k \frac{n^k t^{k-\frac{1}{2}}}{k!} \end{array}\right.$ intégrable sur $]0;1]$. De plus,

$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_\infty^{]0;1]}$ converge et $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \in \mathcal{C}^0(]0;1];\mathbb{R})$

Enfin, $\int_0^1 \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{n^k t^k}{k!\sqrt{t}}\,dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^1 f_k(t)\,dt$

et $\int_0^1 \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{n^k}{k!}\int_0^1 t^{k-\frac{1}{2}}\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{n^k}{k!}\left[\frac{t^{k+\frac{1}{2}}}{k+\frac{1}{2}}\right]$

Donc, $\int_0^1 \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}\,dt = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^k(-1)^k}{k!(2k+1)}$

Exercice 370 (Mathilde):

Posons $\forall n\in\mathbb{N}$ $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt$, $f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} (1-\frac{t^2}{2n})^n \text{ si } t\in[0;n] \\ 0 \text{ si } t\in]n;+\infty[\end{cases} \end{array}\right.$ et

$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}} \end{array}\right.$. Ainsi, les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers f.

De plus, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$.

L'hypothèse de domination est la suivante. $\forall t\in[0;n]$

$1-\frac{t^2}{2n} \le e^{-\frac{t^2}{2n}}$, id est $|f_n(t)| = \left(1-\frac{t^2}{2n}\right)^n \le e^{-\frac{t^2}{2}} = f(t)$

avec f intégrable. Par le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^{n} \left(1-\frac{t^2}{2n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Montrons que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sqrt{n}\,W_n = \int_0^{+\infty} f_n$.

Posons $u = \sin(t)$. Ainsi, $du = \cos(t)\,dt$

$$W_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\cos(t)\,dt = \int_0^1 (1-u^2)^n\,du$$

Posons $v = \frac{u}{\sqrt{2n}}$. Ainsi, $dv = \frac{du}{\sqrt{2n}}$ et

$$W_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2n}}\int_0^{\sqrt{2n}} \left(1-\frac{v^2}{2n}\right)^n dv = \int_0^{+\infty}\left(1-\frac{t^2}{2n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,\sqrt{2n}]}\,dt$$

Toutes les hypothèses restent valables. D'après le théorème de convergence dominée, $W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$

Pour p impair, $W_p \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi 2}{p-1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2(p-1)}} \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$.

Pour p pair, $\sqrt{\frac{\pi}{2p}} \underset{p\to+\infty}{\sim} W_{p+1} < W_p < W_{p-1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$; donc

$W_p \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$.

Exercice 1017 (ddam) :

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \left| \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ x \to \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{a}{n^2x^2}\right) \end{array}\right.$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$0 \leq \ln\left(1+\frac{a}{n^2x^2}\right) \leq \frac{a}{n^2x^2}$, avec $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\left(\frac{a}{n^2x^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ le terme général d'une série convergente. Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}^*$ ($D = \mathbb{R}^*$)

2. Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \to \ln\left(1+\frac{a}{n^2x^2}\right) \end{array}\right.$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $\forall x \in [b,+\infty[\,\cap\,\mathbb{R}_+^*$,

$f_n'(x) = \frac{\frac{2a}{n^2x^3}}{1+\frac{a}{n^2x^2}}$ et $|f_n'(x)| \leq \frac{2a}{n^2|x|^3} \leq \frac{2a}{n^2b^3}$

Donc, puisque $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$, $\left(\frac{2a}{n^2b^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est le terme général d'une série convergente, $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ converge normalement sur $[b;+\infty[$. Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement et les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$

sur $\mathbb{R}^+$

3. Pour $\ln\left(1+\frac{a}{n^2x^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{n^2x^2}$, a-t-on $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{a}{n^2x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2 a}{6x^2}$?

Soit $b\in\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $\forall x\in[b;+\infty[$,

$x^2\ln\left(1+\frac{a}{n^2x^2}\right) \le x^2\frac{a}{n^2x^2} \le \frac{a}{n^2}$; il y a convergence normale, i.e. est uniforme. De plus, $x^2\ln\left(1+\frac{a}{n^2x^2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{a}{n^2}$, avec $\left(\frac{a}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le terme général d'une série convergente. D'après le théorème de la double limite,

$\sum_{n=0}^{+\infty} x^2\ln\left(1+\frac{a}{n^2x^2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a}{n^2} = a\frac{\pi^2}{6}$. Donc,

$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{a\pi^2}{6x^2}$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x\ln\left(1+\frac{a}{n^2x^2}\right)$

Soit $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ t\mapsto \ln\left(1+\frac{a}{t^2}\right) \end{array}\right.$. Ainsi, g est décroissante et $g\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*,\mathbb{R}_+)$

En $+\infty$, $\ln\left(1+\frac{a}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{a}{t^2}$, avec $\left| \begin{array}{l} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t\mapsto \frac{a}{t^2} \end{array}\right. \in \mathcal{L}^1([1;+\infty[)$

En 0^+ : $\ln\left(1+\frac{a}{t^2}\right) \underset{t\to0^+}{\sim} -2\ln(t)$, avec $\left| \begin{array}{l}]0;1] \to \mathbb{R} \\ t\mapsto -2\ln(t) \end{array}\right. \in \mathcal{L}^1(]0;1];\mathbb{R})$.

Donc, g est intégrable sur $]0;+\infty[$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$,

$\int_{nx}^{(n+1)x} g \le x\ln\left(1+\frac{a}{n^2x^2}\right) \le \int_{(n-1)x}^{nx} g$ et

$\int_{x}^{+\infty} g \le \sum_{n=1}^{+\infty} x\ln\left(1+\frac{a}{n^2x^2}\right) \le \int_0^{+\infty} g$. De plus,

$\int_x^{+\infty} g \xrightarrow[x\to0^+]{} \int_0^{+\infty} g$. Donc, $xf(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} \int_0^{+\infty} g$ et

$f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} g$

Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $g(t) = \ln(t^2+a) - 2\ln(t)$.

Soit $A\in\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $\int_0^A -2\ln(t)\,dt = -2\left[t\ln(t)-t\right]_0^A = -2(A\ln(A)-A)$

et $\int_0^A \ln(t^2+a)\,dt = \left[t\ln(t^2+a)\right]_0^A - \int_0^A \frac{2t^2}{t^2+a}\,dt = A\ln(A^2+a) - 2\int_0^A \frac{t^2+a-a}{t^2+a}\,dt$

donc $\int_0^A \ln(t^2+a)\,dt = A\ln(A^2+a) - 2\int_0^A \left(1 - \frac{1}{\frac{t^2}{a}+1}\right)dt = A\ln(A^2+a) - 2A + 2\left[\sqrt{a}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right)\right]_0^A$

Enfin, $\int_0^A \ln(t^2+a)\,dt = A\ln(A^2+a) - 2A + 2\sqrt{a}\arctan\left(\frac{A}{\sqrt{a}}\right)$. Donc

$$\int_0^A g = A\ln\left(\frac{A^2+a}{A^2}\right) + 2\sqrt{a}\arctan\left(\frac{A}{\sqrt{a}}\right) = A\ln\left(1+\frac{a}{A^2}\right) + 2\sqrt{a}\arctan\left(\frac{A}{\sqrt{a}}\right) \xrightarrow[A\to+\infty]{} \pi\sqrt{a}$$

Enfin, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi\sqrt{a}}{x}$.

Exercice 084 (Lebesgue) :

a) Posons $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n = \int_1^e \ln^n(t)\,dt$ et $f_n \left| \begin{array}{l} [1;e] \to \mathbb{R} \\ t \to \ln^n(t) \end{array}\right.$. Ainsi, $\forall t\in[1;e[$,

$f_n(t) = \ln^n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; pour $t=e$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n(e)=1$

Posons $f \left| \begin{array}{l} [1;e] \to \mathbb{R} \\ x \to \begin{cases} 0 \text{ si } t\in[1;e[\\ 1 \text{ si } t=e \end{cases} \end{array}\right.$. Donc, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVS} f$.

Soit $(n,t)\in\mathbb{N}\times[1;e]$. Ainsi, $\forall(t,n)\in[1;e]\times\mathbb{N}$,

$|f_n(t)| = |\ln(t)|^n \leq 1$, avec $\varphi \left| \begin{array}{l} [1;e] \to \mathbb{R} \\ t \to 1 \end{array}\right.$ intégrable sur $[1;e]$, ce

qui constitue l'hypothèse de domination. D'après le théorème de convergence dominée, $\int_1^e f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^e f$, i.e. $\int_1^e \ln(t)^n\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^e 0\,dt = 0$

Enfin, $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b) Posons $u=\ln(t)$ et $v=u^n$, i.e. $dt = e^u\,du$ et $dv = n\,u^{n-1}\,du$. Donc,

$I_n = \int_1^e \ln(t)^n\,dt = \int_0^1 u^n e^u\,du = \int_0^1 \frac{v^{\frac{1}{n}} e^{v^{\frac{1}{n}}}}{n}\,dv$

Posons $g_n \left| \begin{array}{l} [0;1] \to \mathbb{R} \\ v \to \begin{cases} 0 \text{ si } v=0 \\ v^{\frac{1}{n}} e^{v^{\frac{1}{n}}} \text{ si } v\in]0;1] \end{cases} \end{array}\right.$ et $g \left| \begin{array}{l} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \to \begin{cases} 0 \text{ si } x=0 \\ e \text{ si } x\in]0;1] \end{cases} \end{array}\right.$

Soit $(n,v)\in\mathbb{N}\times]0;1]$. Ainsi, $|g_n(v)| = v^{\frac{1}{n}} e^{v^{\frac{1}{n}}} \leq e$, avec

$\varphi \left| \begin{array}{l} [1;e] \to \mathbb{R} \\ t \to e \end{array}\right.$ intégrable sur $]0;1]$. D'après le théorème de

convergence dominée, $\int_0^1 v^{\frac{1}{n}} e^{v^{\frac{1}{n}}}\,dv \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 e = e$; enfin, $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}$

Exercice 947 (Mathilde) :

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Par convexité de $\begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{vmatrix}$,

$$1 + \frac{x}{n} \leq e^{\frac{x}{n}} \quad \text{et} \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$$

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} \, dx$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \begin{vmatrix} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} (1+\frac{x}{n})^n e^{-\alpha x} & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x \in]n ; +\infty[\end{cases} \end{vmatrix}$ et $f \begin{vmatrix} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{x(1-\alpha)} \end{vmatrix}$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$. L'hypothèse de domination est donnée par $\forall n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(x)| \leq f(x)$, avec f intégrable sur $[0 ; n]$ puisque continue sur $[0 ; n]$.

Si $\alpha > 1$, le théorème de convergence dominée s'applique puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donc, $u_n = \int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} f = \frac{1}{\alpha - 1}$.