

TD 14/10/25

Ex 965, 938, 1048, 1001, 1014, 1043, 942.

Ex 965 (Gabriel R.)

a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$

on pose $t = \cos u$ on a $v_n = u_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(u) du$ (Wallis)

ona $|\sin^{2n+1}(u)| \leq 1 \rightarrow$ intégrable sur $[0, \pi/2]$

Par le TCD $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = 0}$

car on a la convergence simple: $\sin^{(2n+1)} \xrightarrow{cvs} \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \pi/2[\\ 1 & \text{si } x = \pi/2 \end{cases}$

b) $f_n: x \in [0, 1] \mapsto \frac{1}{v_n} \int_0^x (1-t^2)^n dt$ Cvg de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

• $f_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

• $f'_n(x) = \frac{1}{v_n} (1-x^2)^n > 0$ sur $[0, 1[$

• Donc f_n est croissante sur $[0, 1[$, on la prolonge en $x=1$ par $f_n(1)=1$.

• Soit $m \in \mathbb{N}$, $\frac{f_{m+1}(x)}{f_m(x)} \stackrel{?}{< 1}$: $0 \leq (1-t^2)^{m+1} \leq (1-t^2)^m$ donc $\frac{\int_0^x (1-t^2)^{m+1} dt}{\int_0^x (1-t^2)^m dt} \leq 1$.
on dérive

$$\begin{aligned} (\cdot)' &= \frac{(1-x^2)^{m+1} \int_0^x (1-t^2)^m dt - (1-x^2)^m \int_0^x (1-t^2)^{m+1} dt}{\left(\int_0^x (1-t^2)^m dt \right)^2} \\ &= \frac{(1-x^2)^m \left(\int_0^x (1-t^2)^m - (1-t^2)^{m+1} \right) - (1-x^2) \int_0^x (1-t^2)^m dt}{\left(\int_0^x (1-t^2)^m dt \right)^2} > 0 \end{aligned}$$

Doi $\left(\frac{f_{n+1}}{f_n} \right) \nearrow$ et $\frac{f_{n+1}(\frac{1}{2})}{f_n(\frac{1}{2})} = 1$

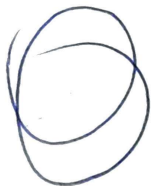
Donc sur $]0, 1[$, $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} < 1$.

$\Rightarrow f_{n+1}(x) < f_n(x)$ pour $\forall x \in]0, 1[$

Donc $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive donc converge

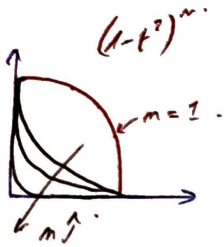
à limite? (Fagebaum)

On a $u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \Rightarrow u_{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n+2}}$



$$\in \text{O-a } f_n(x) = \frac{\int_0^x (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt} = 1 - \frac{\int_x^1 (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

$\underbrace{\int_0^1 (1-t^2)^n dt}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \quad \text{?}$



$$0 \leq \int_x^1 (1-t^2)^3 dt \leq \int_x^1 (1-t^2)^n dt \leq \frac{(1-x^2)^n}{21}.$$

$$x^n = o\left(\sqrt{\frac{x}{4-n}}\right) = o(xn).$$

$$\boxed{\begin{cases} f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ f_n(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \end{cases}}$$

Ex 338 (201) $f_n: x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

a) $f_n \xrightarrow{\text{cvx}} 0$ sur $\mathbb{R}_+$ par croissance comparée ($n! \gg e^{-x}$).

cvx? f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$,

$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}}{n!}.$$

$$= \frac{x^{n-1}e^{-x}}{n!} (n-x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \text{sur } x=1.$$

≥ 0

D'où $\|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+} = f_n(n) = \frac{n^n e^{-n}}{n!}$

On utilise Stirling: $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$

$$f_n(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

D'où $f_n \xrightarrow{\text{cvx}} 0$ sur $\mathbb{R}_+.$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} P(n+1) = 1.$

$$\text{D'où } \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f_n(t) dt = 1}$$

a, • Utiliser sur $[0, x]$ TIB / SFCVUSUS. • f_n continue sur $[0, x]$
• $f_n \xrightarrow{\text{cvx}} 0$ sur $[0, x]$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x f_n(t) dt = \int_0^x \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = 0.$

$$\text{D'où } \boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x f_n(t) dt = 0}$$

Ex 1048 (Thais).

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\cosh(x)} dx \quad \text{Existe-t-elle?}$$

→ en 0: OK

$$\rightarrow \text{en } +\infty? \quad \frac{x}{\cosh x} = \frac{2x}{e^x + e^{-x}} \sim \frac{2x}{e^x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow I \text{ conv.}$$

① Calcul $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\cosh(x)} dx \stackrel{?}{=} 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$
 $\int_0^{+\infty} u_n(x) dx$

Recherche de $u_n(x)$: $\frac{2x}{(e^x + e^{-x})} = \frac{2x}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{2x}{e^x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-e^{-2x})^n$

$$\left\| \frac{x}{\cosh(x)} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{x(-1)^n e^{-x-2nx}}_{u_n(x)} \right\|$$

$$\int_0^{+\infty} u_n(x) dx = (-2)^n \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x(2n+1)}}{2n+1} dx$$

$$= (-2)^n \left(\left[\frac{-x e^{-x(2n+1)}}{2n+1} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(2n+1)}}{(2n+1)} dx \right)$$

$$\int_0^{+\infty} u_n(x) dx = \frac{(-2)^n}{(2n+1)^2} \quad \left\| \left[\frac{e^{-x(2n+1)}}{(2n+1)^2} \right]_0^{+\infty} \right\|$$

TTTATSVIQ $I = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n$

Hyp: • $u_n(x)$ continue sur $[0, +\infty[$.

• $|u_n(x)| \sim o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ = intégrable

• $\sum u_n \xrightarrow{\text{cvs}} \frac{x}{e^x + e^{-x}}$

• $\int |u_n| = \frac{1}{(2n+1)^2}$ lg d'une série cvg

D'où $I = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

Ex 1001 (Nathan)

a) • pour $x < 0$. Dvq grossière.

• $x = 0$: OK

• $x > 0$: $u_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)} \sim o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ comparaison à Bézout: Cvg

D'où $D = \mathbb{R}_+$

b) lg $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*; \mathbb{R})$ th de dériva° version right: soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$

③ $u_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)}$ et $\sum u_n$ ~~est~~ est cvs.

$$\in \textcircled{B} u_n'(x) = \frac{e^{-nx}}{\ln(n)} (1-nx).$$

$$|u_n'(x)| \leq \frac{e^{-nx}}{\ln(n)} |nb-1| = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

C D'ici $\sum u_n$ CN sur $[a, b]$.

E-pm par le th de dérivation, $f \in \mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) ~~$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$~~ ~~Diverge par Bolzano~~

Et d'ici pour $S_n(x) = \sum_{k=2}^n \frac{x e^{-kx}}{\ln(k)}$ $\Rightarrow \frac{S_n(x)}{x} = \sum_{k=2}^n \frac{e^{-kx}}{\ln(k)}$

Donc $\frac{S_n(x)}{x}$ prolongeable par continuité en $x=0$ $\sim \frac{1}{\ln(n)}$
par $\text{th} \sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln(k)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ (Bolzano).

Or $\frac{S_n(x)}{x} \leq \frac{f(x)}{x}$ car séries à termes positifs.

Par l'absurde, si $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} l$ alors $l \geq \sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln(k)}$
par passage à la limite $n \rightarrow \infty$: or l'absurde.

Ex 1014 (Karrim) $f: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2}$

a) $\left\| \frac{\sin^2(nx)}{n^2} \right\|_{\infty}^{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{n^2}$ Tg d'une série vsg.

Par TCSFCVU/N $\Rightarrow$ fort continue sur $\mathbb{R}$

b) Par l'absurde, on suppose que f dérivable en 0.

$\rightarrow$ fort paire $\Rightarrow$ f' impaire donc $f'(0)=0$.

$\rightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} f'(0)=0$.

$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2 x}$: concavité du sin (!) sur $[0, \pi/2]$ $\sin x \leq \frac{2}{\pi} x$.

$\frac{f(x)}{x} \geq \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{\pi}{2x} \rfloor} \frac{\sin^2(nx)}{n^2 x} \geq \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{\pi}{2x} \rfloor} \frac{n^2 x^2 4}{\pi^2 n^2 x} = \frac{4}{\pi^2} \left\lfloor \frac{\pi}{2x} \right\rfloor \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} > 0$.

D'où l'absurde.

Ex 1043 (Gabriel R.)

Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n}$ avec $\frac{1}{n} \int_0^1 t^{n-1} dt$.

$\Rightarrow x \neq 0 [2\pi]$ sinon diverge.

$$O_2 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{inx} \int_0^1 t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 e^{inx} t^{n-1} dt.$$

On suppose que les fonctions f_k ne fonctionnent pas.

On pose $u_k = e^{ikx} t^{k-1}$.

$$S_m(t) = \sum_{k=1}^m u_k(t) = e^{ix} \frac{1 - (te^{ix})^m}{1 - te^{ix}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \int_0^1 S_m(t) dt &= \sum_{k=1}^m \int_0^1 e^{ikx} t^{k-1} dt \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{e^{ikx}}{k}. \end{aligned}$$

$$\text{et } \int_0^1 S_m(t) dt = \int_0^1 e^{ix} \frac{1 - (te^{ix})^m}{1 - te^{ix}} dt = \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 - te^{ix}} dt}_A + \underbrace{\int_0^1 \frac{(te^{ix})^m}{1 - te^{ix}} dt}_{B_m}.$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 - te^{ix}} dt = \int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 - t \cos x - it \sin x} dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{ix} (1 - t \cos x + it \sin x)}{(1 - t \cos x)^2 + (\sin x)^2} dt. \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{ix} - t}{1 + t^2 - 2t \cos x} dt = \int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 + t^2 - 2t \cos x} dt - \int_0^1 \frac{t}{1 + t^2 - 2t \cos x} dt.$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \frac{-2t + 2 \cos x}{1 + t^2 - 2t \cos x} dt \right) + \int_0^1 \frac{e^{ix} - \cos x}{1 + t^2 - 2t \cos x} dt.$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\ln(t^2 - 2t \cos x + 1) \right]_0^1 + i \sin x \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2 - 2t \cos x} \quad \text{c'est dérivable} \rightarrow \text{ok}$$

$$\begin{cases} 1 + t^2 - 2t \cos x = (t - \cos x)^2 + \sin^2(x). \\ t - \cos x = \sin x u. \\ dt = \sin x du. \end{cases}$$

$$A = -\frac{1}{2} \ln(2 - 2 \cos x) + i \sin x \int \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}}{\frac{1}{\tan^2 x} (1 + u^2)} du$$

$$A = -\frac{1}{2} \ln(2 - 2 \cos x) + i \sin x \left(\frac{1}{\sin x} \times \frac{1}{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\tan^2(x)}} \right)$$

cf corrigé.
(du corrigé)
↓

$$B_n = \int_0^1 e^{ix} \frac{(te^{ix})^n}{1-te^{ix}} dt = e^{i(n+1)x} \int_0^1 \frac{t^n}{1-te^{-ix}} dt.$$

$$|1-te^{ix}| = \sqrt{1-2t\cos x + t^2} =: g(t).$$

$f_n(t) \xrightarrow{\text{vers}} 0$ sur $[0,1[$

$$\text{On a } g'(t) = \frac{t - \cos x}{\sqrt{1-2t\cos x + t^2}} \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \cos x.$$

$$\text{D'où } \forall t \in [0,1], g(t) \geq g(\cos x) = |\sin x|.$$

$$\text{Donc } \left| \frac{1}{g} \right| \leq \frac{1}{|\sin x|} = |f_n(t)| \leq \frac{1}{|\sin x|} \text{ intégrable sur } [0,1[$$

$$\text{par le TCD: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = 0.$$

$$\text{D'où } \boxed{B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}.$$

$$\text{D'où } \int_0^1 S_n(t) dt = A + B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A.$$

$$\text{On en déduit } \boxed{\sum_{k=1}^n \frac{e^{ikx}}{k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A} \text{ (cf plus haut pour l'expression de A)}$$

Correction de la correction (expression de A).

$$\text{Bonne du chgt de variable: } t=0 \Rightarrow u = -\frac{1}{\tan x} = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$t=1 \Rightarrow u = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2-2t\cos x} = \frac{1}{2\sin x} \int_{\tan(x-\pi/2)}^{\tan(x/2)} \frac{du}{1+u^2}.$$

$$\text{Donc } A = -\frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(2\sin^2(x/2))}{2} + i \left(\arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \arctan\left(\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \right)$$

$$A = -\ln\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \ln(2) + i \left(\frac{x}{2} - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right) = -\frac{x}{2} + \frac{i\pi}{2}.$$

Façon laune (Logarithme complexe).

$$A = \int_0^1 \frac{e^{ix}}{1-te^{ix}} dt = -\left[\ln(1-te^{ix}) \right]_0^1 = -\ln(1-e^{ix}).$$

$$\text{Avec } 1-e^{ix} = e^{i(x-\pi/2)} 2\sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

angle
méth

Donc $A = i\left(\frac{\pi-x}{2}\right) - \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right).$

Ex 342 (Hugo) $f \in \mathcal{C}^0$, bornée; $u_n = \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-nx^2} dx.$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad |f(x) e^{-nx^2}| \leq M e^{-nx^2} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$

Chgt de variable: $\begin{cases} u = \sqrt{n}x = \sqrt{n} \times x \\ du = \sqrt{n} dx. \end{cases}$

$u_n = \int_0^{+\infty} \underbrace{f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)}_{f_n(u)} e^{-u^2} du.$

$f_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{\text{cvs.}} f(0) e^{-x^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}. |f_n(x)| \leq \frac{M e^{-x^2}}{\text{intégrable}}$

TC $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} f(0).$