

Exercice 935 (Fiche 11 2^e partie):

a) Soit $x > 0$, $\frac{n}{n^3+x} \sim \frac{1}{n^2}$
 Donc par comparaison, $\sum \frac{n}{n^3+x}$ CV
 f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$

b) On pose $g: t \mapsto \frac{t}{t^3+x} \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, g'(t) = \frac{t^3+x-3t^2 \cdot t}{(t^3+x)^2}$$

$$g'(t) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2t^3$$

un peu
plus tard
(*)

$$\left[\begin{array}{l} \text{Donc } \left(\frac{n}{n^3+x} \right)_n \text{ est } \searrow \text{ à partir du rang } N = \left\lfloor \left(\frac{x}{2} \right)^{1/3} \right\rfloor \\ \forall n \geq N+1, \int_n^{n+1} \frac{t}{t^3+x} dt \leq \frac{n}{n^3+x} \leq \int_{n-1}^n \frac{t}{t^3+x} dt \\ \sum_{n \geq N+1} \frac{n}{n^3+x} \text{ CV} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+x} dt \text{ CV} \quad \left(\frac{t}{t^3+x} \sim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^2} \right) \end{array} \right.$$

• Donc $\left(\frac{n}{n^3+x} \right)_n$ est $\nearrow$ de 0 à $N = \left\lfloor \left(\frac{x}{2} \right)^{1/3} \right\rfloor$

$$\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \int_n^{n+1} \frac{t}{t^3+x} dt \geq \frac{n}{n^3+x} \geq \int_{n-1}^n \frac{t}{t^3+x} dt$$

$$\text{Donc } \int_0^N \frac{t}{t^3+x} dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{n}{n^3+x} \leq \int_0^{N+1} \frac{t}{t^3+x} dt$$

$$\int_0^N \frac{t}{t^3+x} dt = \int_0^{N^{1/3}} \frac{u \cdot u^{1/3}}{(u^3+1)u} u^{1/3} du = \frac{1}{2} \int_0^{N^{1/3}} \frac{u}{u^3+1} du$$

$$t = u x^{1/3}$$

$$(1) \int_0^{\frac{N}{2^{1/3}}} \frac{u}{u^3+1} du \leq x^{1/3} \sum_{n=1}^N \frac{n}{n^3+x} \leq \int_0^{\frac{N+1}{2^{1/3}}} \frac{u}{u^3+1} du$$

$$N = \left\lfloor \left(\frac{x}{2} \right)^{1/3} \right\rfloor \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

De plus, $\left(\frac{x}{2} \right)^{1/3} - 1 \leq \left\lfloor \left(\frac{x}{2} \right)^{1/3} \right\rfloor < \left(\frac{x}{2} \right)^{1/3}$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{1/3} - \frac{1}{x^{1/3}} \leq \frac{\left\lfloor \left(\frac{x}{2} \right)^{1/3} \right\rfloor}{x^{1/3}} < \left(\frac{1}{2} \right)^{1/3}$$

Par encadrement $\frac{\left\lfloor \left(\frac{x}{2} \right)^{1/3} \right\rfloor}{x^{1/3}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{1/3}$

Donc, pour $x \rightarrow +\infty$ dans (1):

$$\int_0^{\left(\frac{1}{2} \right)^{1/3}} \frac{u}{1+u^3} du = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{1/3} \sum_{n=0}^N \frac{n}{n^3+x} \right)$$

(*) • $\forall n \geq N+1$

$$\int_n^{n+1} \frac{t}{t^3+x} dt \leq \frac{n}{n^3+x} \leq \int_{n-1}^n \frac{t}{t^3+x} dt$$

$$\int_{N+1}^{+\infty} \frac{t}{t^3+x} dt \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+x} \leq \int_N^{+\infty} \frac{t}{t^3+x} dt$$

$$\int_{\frac{N+1}{x^{1/3}}}^{\frac{+\infty}{x^{1/3}}} \frac{u}{u^3+1} du \leq x^{1/3} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+x} \leq \int_{\frac{N}{x^{1/3}}}^{\frac{+\infty}{x^{1/3}}} \frac{u}{u^3+1} du$$

$t = u x^{1/3}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/3} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+x} = \int_{\left(\frac{1}{2} \right)^{1/3}}^{\frac{+\infty}{x^{1/3}}} \frac{t}{t^3+1} dt$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x^{1/3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+x}}_{f(x)} = \int_0^{\frac{+\infty}{x^{1/3}}} \frac{t}{1+t^3} dt = C$$

Avant $f(x) \sim \frac{C}{x^{1/3}}$

• calcul de C :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3} dt &= \int_0^1 \frac{t}{1+t^3} dt + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{t}{1+t^3} dt}_{u = \frac{1}{t}} \\
 &= \int_0^1 \frac{t}{1+t^3} dt - \int_1^0 \frac{du/u}{1 + \frac{1}{u^3}} \\
 &= \int_0^1 \frac{t}{1+t^3} dt + \int_0^1 \frac{du}{1+u^3} \\
 &= \int_0^1 \frac{t+1}{1+t^3} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
 &\stackrel{u = t - \frac{1}{2}}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} \frac{du}{u^2 + \frac{3}{4}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan\left(\frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) \right]_{-\frac{1}{2}}^{1/2} \\
 &= \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
 &= \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

$$C = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Conclusion :

$$f(x) \sim \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{1}{x^{1/3}}$$

Exercice 346 (Fiche 12)

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \frac{\sin nx}{nx + x\sqrt{x}}$$

• Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

→ Soit $x \geq 1$, soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{x\sqrt{x}} \text{ intégrable sur } [1, +\infty[$$

Donc par majoration, f_n est intégrable sur $[1, +\infty[$

$$\rightarrow \text{En } 0, |f_n(x)| = \frac{\sin nx}{nx + x\sqrt{x}} \sim \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{x}}{n}} \rightarrow 1$$

faux problème de convergence

Conclure: f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

• Calcul de $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n$

$$\rightarrow \forall n \geq 1, f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx + x\sqrt{x}}$$

$$f_n \xrightarrow{\text{CVS}} 0 \text{ sur } [1, +\infty[$$

On avait déjà l'hypothèse de majoration, donc d'après le TCD

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} f_n(t) dt = \int_1^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = 0$$

$$\rightarrow \int_0^1 f_n(t) dt = \underbrace{\int_0^{1/n} f_n(t) dt}_{\leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} + \int_{1/n}^1 f_n(t) dt$$

On pose $g_n(x) = \frac{1}{nx + x\sqrt{n}}$ $g_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

$$\int_{1/n}^1 f_n(t) dt = \int_{1/n}^1 \min(nt) g_n(t) dt$$

$$= \left[-g_n(t) \frac{\cos(nt)}{n} \right]_{1/n}^1 + \int_{1/n}^1 g_n'(t) \frac{\cos(nt)}{n} dt$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \times \frac{\cos n}{n} - \frac{1}{n+1} \frac{\cos n}{n}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0} + \int_{1/n}^1 g_n'(t) \frac{\cos(nt)}{n} dt$$

$$\int_{1/n}^1 g_n'(t) \frac{\cos(nt)}{n} dt \leq \int_{1/n}^1 |g_n'(t)| \frac{dt}{n}$$

$$= -\frac{1}{n} \int_{1/n}^1 g_n'(t) dt$$

$$= -\frac{1}{n} [g_n(t)]_{1/n}^1$$

$$= -\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n\sqrt{n}}}$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 0$

Exercice 327 (Fiche 11 2^e partie)

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tq $\int_0^{+\infty} (f'(t)^2 + t^2 f(t)^2) dt$ existe

• tq f^2 intégrable sur $\mathbb{R}^+$

Par l'absurde, supposons f^2 pas intégrable

$$\int_0^{+\infty} f^2 = +\infty$$

Donc $\int_0^{+\infty} t^2 f^2 = +\infty$

En $+\infty$, $f^2(t) = o(t^2 f^3(t))$

$\forall n \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^n t^2 f^2(t) dt \leq \int_0^n (f'(t)^2 + t^2 f^2(t)) dt$
abuse car $f'^2(t) + t^2 f(t)^2$ est intégrable

cel: f^2 intégrable.

• Mg $\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt \leq 2 \sqrt{\int_0^{+\infty} f'(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt}$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$\int_0^x \underbrace{1}_x f^2(t) dt = \left[t f^2(t) \right]_0^x - 2 \int_0^x t f(t) f'(t) dt$

• On pose $g(x) = x f^2(x)$

$g'(x) = \underbrace{f^2(x)}_{\text{intégrable}} + 2x f(x) f'(x)$

$t^2 f(t)^2$ intégrable, $f'(t)^2$ aussi
 Donc $t f(t) f'(t)$ est intégrable

g admet une limite en $+\infty$

Si $c \neq 0$, $g(x) \xrightarrow{+\infty} c$

Donc $f^2(x) \sim \frac{c}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x} \rightarrow$ abuse, pas intégrable

Donc $\boxed{g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$

• $\int_0^x f^2(t) dt = x f^2(x) - 2 \int_0^x t f(t) f'(t) dt$
 $\leq x f^2(x) + 2 \left| \int_0^x t f(t) f'(t) dt \right|$

$$\int_0^x f^2(t) dt \leq_{CS} x f^2(x) + 2 \sqrt{\int_0^x f^2(t) dt} \sqrt{\int_0^x t^2 f^2(t) dt}$$

Par passage à la limite : $\int_0^{+\infty} f^2 \leq 2 \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2} \sqrt{\int_0^{+\infty} t^2 f^2(t) dt}$

Exercice 333 (Fiche 11 2^e partie) :

$g \in \mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{R})$, on pose $\psi(g) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{g(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{g(x)}{x} dx \right)$

a) définition de ψ :

Soit $g \in \mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{R})$, Soit $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{g(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{g(x)}{x} dx \\ &\stackrel{\substack{\varepsilon = -x \\ \text{dans la 1^{re}}}}{=} - \int_{\varepsilon}^1 \frac{g(-t)}{t} dt + \int_{\varepsilon}^1 \frac{g(x)}{x} dx \\ &= \int_{\varepsilon}^1 \frac{g(x) - g(-x)}{x} dx \end{aligned}$$

$h : x \mapsto \frac{g(x) - g(-x)}{x} \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(-x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} + \frac{g(-x) - g(0)}{-x - 0} \right) \\ &= 2g'(0) \end{aligned}$$

h est prolongeable par continuité en 0
 $\hat{h} \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$

D'où $\psi(g) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \int_0^1 \frac{g(x) - g(-x)}{x} dx \in \mathbb{R}$

Donc ψ est bien définie

$$b) \psi(g) = \int_0^1 \frac{g(x) - g(-x)}{x} dx$$

$$\forall x \in]0, 1] \quad g \in \mathcal{C}^1([x, -x], \mathbb{R})$$

D'après l'EAF, $\exists c_x \in]x, -x[$, $g'(c_x) = \frac{g(x) - g(-x)}{x - (-x)}$

$$\psi(g) = 2 \int_0^1 g'(c_x) dx$$

$$\text{Donc } |\psi(g)| \leq 2 \int_0^1 |g'(c_x)| dx$$

$$\forall x \in]0, 1] \quad c_x \in [-1, 1]$$

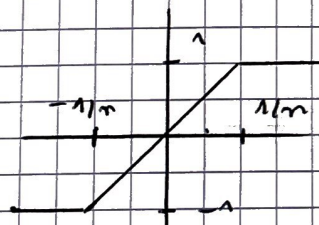
$$\text{Donc } |g'(c_x)| \leq \|g'\|_{\infty}^{[-1, 1]}$$

Donc, par majoration de l'intégrale $|\psi(g)| \leq 2 \|g'\|_{\infty}^{[-1, 1]}$

Mauvaise piste

c) $f_n \in \mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{R})$

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & |x| < \frac{1}{n} \\ -1 & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ 1 & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$



$$f_n \in \mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{R})$$

$$\|f_n'\|_{\infty}^{[-1, 1]} = 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f_n(x) - f_n(-x)}{x} dx &= \int_0^{1/n} \frac{2nx}{x} dx + \int_{1/n}^1 \frac{2}{x} dx \\ &= 2 + 2 \ln(n) \end{aligned}$$

Th de Weierstrass, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$,
(f_n continue) $\|f_n - P_n\| \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned} \psi(P_n) &= \int_0^1 \frac{P_n(x) - P_n(-x)}{x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{(P_n(x) - f_n(x)) - (P_n(-x) - f_n(-x))}{x} dx \\ &\quad + \int_0^1 \frac{f_n(x) - f_n(-x)}{x} dx \end{aligned}$$

$$\psi(p_n) = 2 + 2 \ln(n) + \int_0^1 \frac{p_n(x) - f_n(x)}{x} - \frac{p_n(1-x) - f_n(1-x)}{x} dx$$

$$\left(\frac{p_n(x) - f_n(x)}{x} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \left(\mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R}) \right)^{\mathbb{N}} \text{ CV vers } \vec{0}$$

$$\int_0^1 \frac{p_n(x) - f_n(x)}{x} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$$

Bonne idée

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\text{On pose } f_n : x \mapsto \begin{cases} 1 - (1-x)^n, & x \geq 0 \\ -1 + (1+x)^n, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Eno: } f'_n(x) = \begin{matrix} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} n \\ n(1-x)^{n-1} \end{matrix} \text{ pour } x \geq 0$$

$$f'_n(x) = \begin{matrix} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} n \\ n(1+x)^{n-1} \end{matrix} \text{ pour } x < 0$$

$$\text{Donc } f_n \in \mathcal{C}^1([-1,1], \mathbb{R})$$

$$\psi(f_n) = 2 \int_0^1 \frac{1 - (1-x)^n}{x} dx = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \frac{1 - (1-x)^{n-k}}{1 - (1-x)} (1-x)^k dx$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = 2H_n$$

Exercice 943 (Fiche 12)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_{-\infty}^0 \frac{n^3 t^2 e^{-t^2 n^2}}{1+t^2} dt$$

existence

$$f_n(t) = \frac{n^3 t^2 e^{-t^2 n^2}}{1+t^2} \text{ continue sur } [0, +\infty[$$

$$\rightarrow \text{En } +\infty \quad f_n(t) \sim \frac{n^3 t^2 e^{-t^2 n^2}}{t^2} = n^3 e^{-t^2 n^2} = 0 \quad \left(\frac{1}{t^2} \right) \text{ par cc}$$

N'ai l'existence de $I_n \quad \forall n \geq 1$.

• calcul de $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$

$$u = nt \quad du = n dt \quad I_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^2 e^{-u^2}}{1 + \frac{u^2}{n^2}} du$$

• Soit $g_n(u) = \frac{u^2 e^{-u^2}}{1 + \frac{u^2}{n^2}}$ continue sur $[0, +\infty[$

$$g_n(u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u^2 e^{-u^2} = g(u)$$

$$g_n \xrightarrow{C.V.S.} g$$

• $|g_n(u)| \leq g(u)$ avec g continue, $g(u) = o(1/u^2)$ donc g intégrable

On peut appliquer le TLD :

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du = I$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \underbrace{u}_{\substack{\uparrow \\ -u}} \underbrace{2u e^{-u^2}}_{\substack{\downarrow \\ -u e^{-u^2} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0}} du$$

$$\text{Donc } I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Exercice 969 (Fiche 12)

$$1) \text{ Mq } \forall n \in \mathbb{N}^*, e^n = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} + \frac{\sqrt[n]{n} n^n}{n!} \int_0^{\sqrt[n]{n}} \left(1 - \frac{t}{\sqrt[n]{n}}\right)^n e^t dt$$

→ Formule de Taylor avec intégrale(s) à l'ordre n

$$e^n = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} + \underbrace{\int_0^n e^t \frac{(n-t)^n}{n!} dt}_{I_n}$$

$$\rightarrow I_n = n^n \int_0^{\frac{n}{\sqrt[n]{n}}} \frac{e^t}{n!} \left(1 - \frac{t}{\sqrt[n]{n}}\right)^n dt$$

$$u = \frac{t}{\sqrt{n}} \quad du = \frac{dt}{\sqrt{n}}$$

$$I_n = \frac{n^n \sqrt{n}}{n!} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{\sqrt{n}t} dt$$

OK.

2) Limite de I_n ?

$$\rightarrow f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{\sqrt{n}t} & t \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{continue}$$

→ hypothèse de domination

$$f_n(t) = e^{n(1 - \frac{t}{\sqrt{n}})} + \sqrt{n}t$$

Pour $n \in [0, 1]$, par l'écrit de fonction

$$\ln(1-x) \leq -x - \frac{x^2}{2}$$

$$\ln\left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}}\right) \leq -\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n}$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow |f_n(t)| \leq e^{-t^2/2}$$

continue et intégrable.

$$\text{D'après le TCD: } \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{n} n^n}{n!} I_n \sim \frac{e^n}{2} + o(e^n)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \sim \frac{e^n}{2}$$