

Exercice géville 2025 (Jules)

4) $N =$ nombre de mots à 7 lettres - nombre de mots avec AAAA ou BBBB
 $= 3^7 - 3 \times 3^3 \times 2 = 2025$
 ↳ A ou B

Ex 941 (Achille)

a) $x \mapsto x^a e^{-nx}$ continue sur $[0, +\infty[$

En $+\infty$: $x^a e^{-nx} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées, donc $\int$ est bien def par comparaison.

$I_n = \int_0^{\infty} \frac{x^a e^{-nx}}{\sqrt{1+x^b}} dx$ mg bien def ?

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{x^a e^{-nx}}{\sqrt{1+x^b}} \leq x^a e^{-nx} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{x^a e^{-nx}}{\sqrt{1+x^b}} dx$ cvg en $+\infty \Rightarrow I_n$ existe

b) $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, y_n(t) = t^a e^{-nt} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \forall t$

$f_n \xrightarrow{cv} 0$ sur $\mathbb{R}_+$, f_n est intégrable et $|f_n(t)| \leq |f_1(t)|$.

TCD: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = 0$ ↳ dépend pas de n

c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $I_n = \int_0^x t^a e^{-nt} dt$ $\left\{ \begin{array}{l} u = nt \\ \frac{du}{n} = dt \end{array} \right. \Rightarrow I_n = \int_0^{nx} \left(\frac{u}{n}\right)^a e^{-u} \frac{du}{n} = \frac{1}{n^{a+1}} \Gamma(a+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

d) $I_n - I_n \geq 0$ par Q2.
 Mg $I_n - I_n \leq \frac{\Gamma(a+b+1)}{n^{a+b+1}}$

On a $\int_0^x \left(t^a e^{-nt} - \frac{t^a e^{-nt}}{\sqrt{1+t^b}} \right) dt = \int_0^x \frac{(\sqrt{1+t^b} - 1) t^a e^{-nt}}{\sqrt{1+t^b}} dt$

$\left\{ \begin{array}{l} u = nt \\ \frac{du}{n} = dt \end{array} \right.$

alors $A = \int_0^x \frac{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{u}{n}\right)^b} - 1 \right) \left(\frac{u}{n}\right)^a e^{-u}}{\sqrt{1 + \left(\frac{u}{n}\right)^b}} du$

$\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{u}{n}\right)^b} - 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{u}{n}\right)^b}} \leq \left(\frac{u}{n}\right)^b$

$1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq x$

$f(x) = x^{-1} + \frac{1}{\sqrt{1+x}}$
 $f'(x) = 1 - \frac{1}{2(1+x)^{3/2}} \geq 0$

$f \nearrow$ et $f(0) = 0 \Rightarrow f \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$

$A \leq \int_0^x \left(\frac{u}{n}\right)^{a+b} e^{-u} \frac{du}{n} \Rightarrow A \leq \frac{1}{n^{a+b+1}} \Gamma(a+b+1)$

D'où $0 \leq I_n - I_n \leq \frac{1}{n^{a+b+1}} \Gamma(a+b+1)$

$I_n \sim I_n / \Leftrightarrow I_n = I_n \times o(I_n) \Leftrightarrow I_n - I_n = o(I_n)$

Mg $\frac{1}{n^{a+b+1}} \Gamma(a+b+1) = o(I_n)$

$0 \leq 1 - \frac{I_n}{I_n} \leq \frac{\Gamma(a+b+1)}{n^{a+b+1}} \times \frac{n^{a+1}}{\Gamma(a+1)} \rightarrow 0$

d'où $I_n \sim J_n$

Ex 939 (Nathan)

On va utiliser le TCD.

$$\int_0^{\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n f(t) dt = \int_0^{\infty} \underbrace{1_{[0, n]}(t)}_{\substack{\text{avec un DL eq marche} \\ \rightarrow f_n(t)}} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n f(t) dt$$

$$f_n(t) \xrightarrow{ws} t \mapsto e^{-t} f(t) \quad (i)$$

$$\forall t \quad \left| \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n f(t) \right| \leq e^{-t} f(t) \quad (ii)$$

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \stackrel{?}{\leq} e^{-t} \quad n \text{ en } \left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq e^{-t/n} \quad (*) \quad \left(\begin{array}{l} \text{par croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ \text{ou majoration } \ln(1+x) \leq x \quad \forall x \in]-1, +\infty[\end{array} \right)$$

$$f_n(t) = n \ln \left(1 - \frac{t}{n}\right) + t$$

$$f_n'(t) = n \times \frac{-1/n}{1 - t/n} + 1 = 1 - \frac{1}{1 - t/n} = \frac{-t/n}{1 - t/n} \leq 0$$

Alors $f_n \searrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$f_n(0) = 0 \text{ donc } \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad f_n(t) \leq 0 \quad (*)$$

D'où l'hypothèse de domination. Par le TCD on a le résultat.

Ex 948 (Jules)

$$a) |I_n| \leq \|f\|_{\infty}^{(0,1)} \underbrace{\int_0^1 x^n}_{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$b) f(1) \neq 0$$

$$\text{Si } f \in \mathcal{C}^1, \text{ IPP : } I_n = \left[\frac{f(x) x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx$$

$$= \frac{f(1)}{n+1} \quad \underbrace{\int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ d'après la question a)}}$$

Si f n'est pas $\mathcal{C}^1$

$$(n+1) I_n = \int_0^1 (n+1) x^n f(x) dx$$

$$u = x^{n+1} \quad du = (n+1) x^n dx \quad \leftarrow \int_0^1 \underbrace{f(u)^{1/(n+1)}}_{f_n} du$$

$$f_n \xrightarrow{ws} g \text{ où } g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]0, 1] \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \mathcal{M} \text{ sur } [0, 1].$$

$$\text{et } |f_n(0)| \leq \|f\|_{\infty} \text{ intégrable sur } [0, 1]$$

$$f_n \in \mathcal{L}^1$$

$$\text{Par le TCD : } (n+1) I_n \rightarrow \int_0^1 g(u) du = f(1)$$

$$\text{Donc } I_n \sim \frac{f(1)}{n+1}$$

c) $f(1)=0, f \in C^0$

$$\sum_{k=0}^{n-1} I_k = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 x^k f(x) dx = \int_0^1 f(x) \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} x^k}_{= \frac{1-x^n}{1-x}} dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{1-x} dx - \underbrace{\int_0^1 \frac{f(x) x^n}{1-x} dx}_{= K_n}$$

$\frac{f(x)}{1-x} = -\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} -f'(1)$ ← existence

D'après a): $K_n \rightarrow 0$

donc $\sum_{n \geq 0} I_n$ ex et $\sum_{k=0}^{+\infty} I_k = \int_0^1 \frac{f(x)}{1-x} dx$

Ex sur 2025 (gabriel Rivalin)

$$9 \times (-8+7+6) \times 5 \times \left(\frac{4!}{3} + 2 - 1 \right)$$

$$= 9 \times (8+7-6) \times 5 \times \left(\frac{4!}{3} - 2 - 1 \right)$$

$$= 2025$$

et propriété

$$\sqrt{2025} = 45 \text{ et } 45^2 = 2025 \text{ c'est le 1^{er} depuis l'an 1}$$

Ex 868 (Alice)

a) $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos(2nt) \ln(\sin t) dt$

En 0: $\sin t \sim t \rightarrow \ln(\sin t) \sim \ln(t)$ or $|\ln(t)| = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

Par comparaison avec une $\int$ Riemann: I_n conv en 0

En $\frac{\pi}{2}$: Pas de problème de def.

b) $n I_n - (n+1) I_{n+1} = n \int_0^{\pi/2} \cos(2nt) \ln(\sin t) dt - (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos(2(n+1)t) \ln(\sin t) dt$

$$= n \left[\frac{\sin 2nt}{2n} \ln(\sin t) \right]_0^{\pi/2} - (n+1) \left[\frac{\sin(2(n+1)t)}{2(n+1)} \ln(\sin t) \right]_0^{\pi/2}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2nt) \frac{\cos t}{\sin t} - \sin(2(n+1)t) \frac{\cos t}{\sin t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 2 \cos(n+1)t \ln(\sin t) \frac{\cos t}{\sin t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [\cos(2n+2)t + \cos(2nt)] dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2n+2)t}{2n+2} \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2nt)}{2n} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= 0$$

et $I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos 2t \ln(\sin t) dt = - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2t}{2} \frac{\cos t}{\sin t} dt = - \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt$

$$I_1 = - \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = - \left[\frac{1}{2} t \right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} = - \frac{\pi}{4}$$

et $n I_n = I_1 \Rightarrow I_n = -\frac{\pi}{4n}$

$$x = \tan t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

$$dt = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$x=0 \Rightarrow t=0$$

$$t \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \Rightarrow x \rightarrow +\infty$$

$$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2} = \frac{1}{1 - \sin^2} \Rightarrow \sin^2 = 1 - \frac{1}{1 + \tan^2}$$

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{1 + a \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)} \times \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2 + ax^2} = \int_0^\infty \frac{dx}{(a+1)x^2 + 1}$$

$$\begin{cases} u = \sqrt{a+1} x \\ \Rightarrow du = \sqrt{a+1} dx \\ u=0 \Rightarrow x=0 \\ u \rightarrow +\infty \Rightarrow x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{a+1}} \times \int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{a+1}} \left(\arctan u \right)_0^\infty \Rightarrow I = \frac{\pi}{2\sqrt{a+1}}$$

$$b) \sum_n \int_0^\pi \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2 t} = \sum_n \left(\frac{\pi}{\sqrt{1 + (n\pi)^\alpha}} \right) \text{ car si } \frac{\alpha}{2} > 1 \Rightarrow \alpha > 2$$

$$c) \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2 t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2 t}$$

$$\begin{cases} u = t - n\pi \\ du = dt \\ t = n\pi \Rightarrow u = 0 \\ t = (n+1)\pi \Rightarrow u = \pi \end{cases}$$

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{du}{1 + (u + n\pi)^\alpha \sin^2(u)}$$

$$u_n \leq \int_0^\pi \frac{du}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2 u}$$

et

$$u_n \geq \int_0^\pi \frac{du}{1 + ((n+1)\pi)^\alpha \sin^2 u}$$

Donc car si $\alpha > 2$

Rq : On a vu que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f \text{ wgt} \neq \int_0^\infty f \text{ wgt}$ (car $f(t) = \cos^2(t)$)
 $\hookrightarrow \int_0^\infty \cos^2 t \, dt \, DV$

Ici c'est $\neq$ car la fonction est positive, on a donc bien l'équivalence

$$\Leftrightarrow \text{OK } \left(\left\lfloor \frac{\alpha}{2} \right\rfloor + 1 \right) \pi$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty f \leq \int_0^\infty f$$

Ex 949 (Amoury)

On note $f_n(x) = \frac{e^{-nx} \cos x}{\sqrt{x}}$

$$f_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\bullet \quad n|f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow f_n(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

on pose $u = nx$

$$du = n dx$$

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} \cos(u/n)}{\sqrt{u}} \sqrt{n} \frac{du}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{-u} \cos\left(\frac{u}{n}\right)}{\sqrt{u}}}_{g_n(x)} du$$

$$g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$$

$$|g_n(x)| \leq \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$$

$$\sqrt{n} I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \quad \text{et } I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$