suite exo 836 (Liam)

$A \subset \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^n$, on pose $\rho(A,B) = \sup(d_A(y) - d_B(y), y \in \mathbb{R}^n)$

On veut mq $\rho(A,B) = \max(\sup_A d_B), \sup_B(d_A))$

On sait que $\exists (x_n, x_n')_{n\in\mathbb{N}} \in (A\times B)^{\mathbb{N}}$ tq $d_B(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup_{x\in A}(d_B(x))$

$d_A(x_n') \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup_{x\in B}(d_A(x))$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $d_B(x_n) = |\underbrace{d_A(x_n)}_{=0\ x_n\in A} - d_B(x_n)| \leq \rho(A,B)$

$d_A(x_n') = |d_A(x_n') - \underbrace{d_B(x_n')}_{=0}| \leq \rho(A,B)$

Par passage à la limite, $\begin{cases} \sup_A(d_B) \leq \rho(A,B) \\ \sup_B(d_A) \leq \rho(A,B) \end{cases}$

$\Rightarrow \max(\sup_B(d_A), \sup_A(d_B)) \leq \rho(A,B)$

Si $\sup_B(d_A), \sup_A(d_B) \in \mathbb{R}_+$:

$\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ tq $|d_A(y_n) - d_B(y_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \rho(A,B)$

Soit $n \in \mathbb{N}$:

1er cas : $d_A(y_n) > d_B(y_n)$:

Par l'absurde, on suppose $(d_A(y_n) - d_B(y_n)) > \sup_B(d_A)$

Soit $(a,b) \in A\times B$, $d_A(y_n) - d_B(y_n) \leq \|y_n - a\| - d_B(y_n)$

$\leq \|y_n - b + b - a\| - d_B(y_n)$

$\leq \|y_n - b\| + \|b-a\| - d_B(y_n)$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists b \in B$, $\|y_n - b\| - d_B(y_n) \leq \varepsilon$

On prend $\varepsilon = (d_A(y_n) - d_B(y_n) - \sup_B(d_A)) \times \frac{1}{2}$

On obtient alors : $d_A(y_n) - d_B(y_n) \leq \frac{d_A(y_n) - d_B(y_n) - \sup_B(d_A)}{2} + \|b-a\|$

$d_A(y_n) - d_B(y_n) \leq \frac{d_A(y_n) - d_B(y_n) - \sup_B(d_A)}{2} + d_A(b)$

$\leq \frac{d_A(y_n) - d_B(y_n) + \sup_B(d_A)}{2}$

$\Rightarrow d_A(y_n) - d_B(y_n) \leq \sup_B(d_A)$

ABSURDE

Donc $d_A(y_n) - d_B(y_n) \leq \sup_B(d_A)$, $|d_A(y_n) - d_B(y_n)| \leq \sup_B(d_A)$

2e cas : $d_B(y_n) \geq d_A(y_n)$

$|d_B(y_n) - d_A(y_n)| \leq \sup_A(d_A)$ par symétrie des hypothèses.

$|d_A(y_n) - d_B(y_n)| \leq \max(\sup_A(d_B), \sup_B(d_A))$

Par passage à la limite : $\rho(A,B) \leq \max(\sup_A(d_B), \sup_B(d_A))$

Si $\sup_B(d_A) = +\infty$ ou $\sup_A(d_B) = +\infty$, $\max(\sup_B(d_A), \sup_A(d_B)) = +\infty$

Donc $\rho(A,B) \leq \max(\sup_B(d_A), \sup_A(d_B))$

donc on a l'égalité.

exco 875 (Mathilde)

$f : t \longmapsto \frac{\ln t}{1+t^2} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

<u>en 0</u> : $f(t) \underset{0}{\sim} \ln(t)$ et $\int_0^1 |\ln t|\, dt = \left[t(|\ln t|-1)\right]_0^1 = -1$ par croissance comparée.

<u>en $+\infty$</u> : $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ car $\frac{\ln t}{1+t^2} \times t^{3/2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[+\infty]{} 0$ par ______

$\Longrightarrow$ Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\, dt$ cvge donc f intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$I = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$ $\quad \begin{cases} u = \frac{1}{t} \\ du = -\frac{dt}{t^2} = -dt\,u^2 \end{cases}$

$= -\int_{+\infty}^{0} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)du}{1+\frac{1}{u^2}} \times \frac{1}{u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)du}{1+u^2} = -\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\ln u\, du}{1+u^2}}_{I} \Longrightarrow 2I = 0 \Longrightarrow I = 0$

exco 878 (Victor)

f u-$\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$, Mq si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\lim_{\pm\infty} f = 0$.

f intégrable sur $\mathbb{R} \Longleftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f|$ cvge $\Longleftrightarrow \int_{-\infty}^0 |f|$ cvge <u>et</u> $\int_0^{+\infty} |f|$ cvge

Par contraposée :

<u>hyp</u> : $f \underset{+\infty}{\not\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall A \in \mathbb{R}_+, \exists x > A, |f(x)| \geq \varepsilon$

Pour $A = 1$: $\exists x_0, |f(x_0)| \geq \varepsilon$

$A = x_0 + 2\alpha, \exists x_1 > x_0, |f(x_1)| \geq \varepsilon$

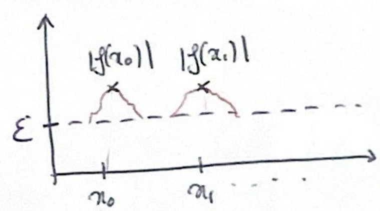
On construit $(x_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}, \forall n, |f(x_n)| \geq \varepsilon$

ce α

f u-$\mathcal{C}^0 \Longleftrightarrow \exists \alpha > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}_+, |x-y| \leq \alpha$

$\Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$\Longrightarrow |f(x)| - |f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$



$x = x_n$ pour $n \in \mathbb{N}$

$\forall y \in [x_n - \alpha, x_n + \alpha], |f(y)| \geq |f(x_n)| - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2}$

Pour $n \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^{x_n+\alpha} |f| \geq \sum_{k=0}^{n} \int_{x_k-\alpha}^{x_k+\alpha} |f| \geq \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\int_{x_k-\alpha}^{x_k+\alpha} \frac{\varepsilon}{2}\,dt}_{\frac{\varepsilon}{2} \times 2\alpha} \geq \varepsilon\alpha(n+1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

Donc $\int_0^{+\infty} |f|$ ne converge pas.

exo 903 (Hugo) + M. Fagebaume

a) • $\mathcal{L}^r \subset \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$

• $0 \in \mathcal{L}^r$

• Soit $f,g \in \mathcal{L}^r$, $\lambda \in \mathbb{R}$, mq $f+\ .\ g \in \mathcal{L}^r$

$\hookrightarrow f+\ \ g \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$

$\hookrightarrow |f+\ \ g|^r = \exp(\ \ln|f+\lambda g|)$

wlog: f,g à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ quitte à remplacer f par $|f|$

$f,g \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow f+g \in \mathcal{L}^1$

$f,g \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \underset{\in \mathcal{L}^1}{\max(f,g)} : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \max(f(x),g(x)) \end{cases}$

car $0 \leqslant \max(f,g) \leqslant f+g$.

$f,g \in \mathcal{L}^r \Rightarrow |f|^r, |g|^r \in \mathcal{L}^1$

$\max(|f|^r,|g|^r) \in \mathcal{L}^1 = \max(|f|,|g|)^r \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \max(f,g) \in \mathcal{L}^r$

$$f+g \leqslant \underbrace{2\max(f,g)}_{\in \mathcal{L}^r} \Rightarrow f+g \in \mathcal{L}^r$$

b) Mq $(\mathcal{L}^\alpha \cap \mathcal{L}^\beta) \subset \mathcal{L}^r$. $f \in \mathcal{L}^\alpha \cap \mathcal{L}^\beta$ ie $|f|^\alpha, |f|^\beta \in \mathcal{L}^1$

Soit $x \in I$:

◦ soit $|f(x)| \geqslant 1$: et alors $|f(x)|^r \leqslant |f(x)|^\beta$

sinon $|f(x)|^r \leqslant |f(x)|^\alpha$

en particulier, $\forall x \in I$, $|f(x)|^r \leqslant \underbrace{\underbrace{|f(x)|^\alpha}_{\in \mathcal{L}^1} + \underbrace{|f(x)|^\beta}_{\in \mathcal{L}^1}}_{\in \mathcal{L}^1}$

Donc $f \in \mathcal{L}^r$

exo 881 (Hugo)

$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. ↘

a. Mq $x f(x) \xrightarrow[+\infty]{} 0$:

On suppose qu'$\exists x_0 \in \mathbb{R}_+$, $f(x_0) < 0$

Soit $x \in \mathbb{R}_+ : x \geqslant x_0$, $\int_{x_0}^x f \leqslant \int_{x_0}^x f(x_0)\,dt = \underbrace{(x-x_0)\overbrace{f(x_0)}^{\leqslant 0}}_{x\to+\infty \ -\infty}$

Absurde car $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$: $\int_x^{2x} f \leqslant \int_x^{+\infty} f \xrightarrow{x\to+\infty} 0$.

$x f(2x) = \int_x^{2x} f(2x)\,dt \leqslant \int_x^{2x} f$. $x f(2x) \xrightarrow{+\infty} 0$

$2x f(2x) \xrightarrow{+\infty} 0$

$x f(x) \xrightarrow{+\infty} 0$

b) $F : x \longmapsto x(f(x)-f(x+1)) \in \mathcal{L}^1([1,+\infty[,\mathbb{R})$

$F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq f(x+1)$, $F \geq 0$.

<u>$x>1$</u> : $\displaystyle\int_1^x t(f(t)-f(t+1))\,dt$ $\quad \begin{cases} u(t) = -\displaystyle\int_t^{t+1} f \longrightarrow u'(t) = f(t)-f(t+1) \\ v(t) = t \longrightarrow v'(t) = 1 \end{cases}$

$$\int_1^x t\,u'(t)\,dt = \underbrace{[t\,u(t)]_1^x}_{A} - \underbrace{\int_1^x u(t)\,dt}_{B}$$

$$|A| = \left|-x\int_x^{x+1} f(t)\,dt - \int_1^2 f(t)\,dt\right|$$

$\displaystyle\left|-x\int_x^{x+1} f(t)\,dt\right| \leq x\int_x^{x+1} f(t)\,dt \leq x\,f(x) \longrightarrow 0$ et $\displaystyle\int_1^2 f$ cvge

Donc A cvge.

$$|B| = \left|\int_1^x\left(\int_t^{t+1} f(u)\,du\right)dt\right| \leq \int_1^x\left[\int_t^{t+1} f\right]dt \leq \int_1^x f(x) \leq \int_1^{+\infty} f$$

B cvge : $\displaystyle\int_1^{+\infty} x(f(x)-f(x+1))\,dx$ cvge.

exco 876 (Victor)

f $\mathcal{C}^0$, T-périodique. $\exists!\,\lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\lambda-f(t)}{t}\,dt$ cvge.

<u>existence</u> : $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ cvge et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t}\,dt$ dvge.

On pose $\lambda = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt$ et $g : t \longmapsto f(t)-\lambda$.

<u>Lemme</u> : $G : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x g$, G est périodique.

↳ <u>démo</u> : soit $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x+T) - G(x) = \int_0^{x+T} g - \int_0^x g = \int_x^{x+T} g(t)\,dt = \int_0^T g = 0.$$

G continue donc bornée sur $[0,T]$ et donc sur $\mathbb{R}$.

On dispose de $M \in \mathbb{R}_+$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|G(t)| \leq M$.

$$\int_1^x \frac{g(t)}{t}\,dt = \left[\frac{G(t)}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{G(t)}{t^2}\,dt = \underbrace{\frac{G(x)}{x}}_{\xrightarrow[+\infty]{} 0} - G(1)$$

$\displaystyle\int_1^x \frac{|G(t)|}{t^2}\,dt \leq M\int_1^x \frac{dt}{t^2}$ qui converge. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{G(t)}{t^2}\,dt$ ACV

— $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{g(t)}{t}\,dt$ CV.

<u>Unicité</u> : $\mu \in \mathbb{R}$. $x > 1$

$$\int_1^x \frac{\lambda-f(t)}{t}\,dt - \int_1^x \frac{\mu-f(t)}{t}\,dt = (\lambda-\mu)\int_1^x \frac{dt}{t}$$

$$\int_1^x \frac{\mu-f(t)}{t}\,dt = \underbrace{\int_1^x \frac{\lambda-f(t)}{t}}_{CV} + \underbrace{\underbrace{(\mu-\lambda)}_{\neq 0}\int_1^x \frac{dt}{t}}_{DV}$$

donc le tout diverge.

exo 872 (Hugo)

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\,dt$ cvge

Par l'absurde, supposons que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sin t + \sqrt{t}}\,dt$ cvge

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt - \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sin t + \sqrt{t}} = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{t}(\sin t + \sqrt{t})}\,dt = A.$$

$$A \geqslant \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}\,dt}_{B} \quad \text{et} \quad B = \int_1^{+\infty} \frac{1-\sin(2t)}{2(1+\sqrt{t})\sqrt{t}}\,dt = \underbrace{\int_1 \frac{dt}{2(t+\sqrt{t})}}_{\text{diverge}} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{2(\sqrt{t}+t)}\,dt}_{C}$$

$x \in \mathbb{R}_+^*$: $$C = \int_1^x \frac{\sin(2t)}{2(\sqrt{t}+t)}\,dt = \underbrace{\left[-\frac{\cos(2t)}{4(\sqrt{t}+t)}\right]_1^x}_{\xrightarrow[+\infty]{} 0} + \underbrace{\int_1^x \frac{\cos(2t)}{4(\sqrt{t}+t)^2}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)dt}_{\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4t^2}}$$

Donc C converge, donc B diverge

$$\int_1^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt - \underbrace{\int_1^x \frac{\sin t}{\sin t + \sqrt{t}}}_{DV}\,dt \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$$

Moralité : $\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \sim \frac{\sin t}{\sin t + \sqrt{t}}$ mais $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t} + \sin t}\,dt$ ne sont pas de m̂ nature.

$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ de nature diff.

$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ CV $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}$ CV, $\alpha > 1$.