

Exercice 825: $M_q \subset O_n(\mathbb{Q})$ dense dans $O_n(\mathbb{R})$

$$A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),$$

$$\exists (g_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n} \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} / \exists \delta \in D_n(\{-1, 1\})$$

$$q: \left(\prod_{i=1}^{n-2} \prod_{j=i+1}^n R_{i,j}(\theta_{ij}) \right) A = 0$$

$$R_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \cos(\theta_{ij}) & \dots -\sin(\theta_{ij}) \\ & & \vdots & \ddots \vdots \\ & & \sin(\theta_{ij}) & \dots \cos(\theta_{ij}) \end{pmatrix}$$

Démo: Par récurrence:

$$H(z) = \underline{OK}.$$

$H(n-1) \Rightarrow H(n)$:

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$R_{12}(\theta_{12})A = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$$

$$R_{12}(\theta_{12}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{12}) & -\sin(\theta_{12}) \\ \sin(\theta_{12}) & \cos(\theta_{12}) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} & \\ & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$R_{12}(\theta_{12})A = \begin{pmatrix} a_{11}\cos(\theta_{12}) - a_{21}\sin(\theta_{12}) & \vdots & \vdots \\ a_{11}\sin(\theta_{12}) + a_{21}\cos(\theta_{12}) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

On pose : $r_1 = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}$, $\exists \theta_{12} \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta_{12}) = -\frac{a_{11}}{r_1}, \quad \sin(\theta_{12}) = \frac{a_{21}}{r_1}$$

Donc :

$$R_{12}(\theta_{12}) A = \left(\begin{array}{c|c} r_1 & L_1 \\ \hline 0 & \tilde{A}_1 \\ a_{31} & \\ \vdots & \\ a_{n1} & \end{array} \right)$$

On répète :

$$R_{1j}(\theta_{1j}) \times \dots \times R_{12}(\theta_{12}) \times A = \left(\begin{array}{c|c} r_j & L_j \\ \hline 0 & \tilde{A}_j \\ \vdots & \\ a_{j+1,j} & \\ \vdots & \\ a_{n,j} & \end{array} \right)$$

Avec :

$$\cos(\theta_{1,j}) = -\frac{r_{j-1}}{r_j}$$

$$\sin(\theta_{1,j}) = \frac{a_{j,1}}{r_j}$$

$$\text{et } r_j = \sqrt{r_{j-1}^2 + a_{j,1}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^j a_{i,1}^2}$$

on aura $r_n = \pm 1$

Donc : $\exists (\theta_{1,j})_{2 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$(A \in O_n(\mathbb{R}))$

$$\left(\prod_{j=2}^n R_{1j}(\theta_{1,j}) \right) A = \left(\begin{array}{c|c} r_n & L_n \\ \hline 0 & \tilde{A}_n \\ \vdots & \end{array} \right)$$

D'après H(n-1) :

$$\exists (\theta'_{ij})_{1 \leq i < j \leq n-1} \in \mathbb{R}^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}, \exists D \in O_{n-1}(\{1,2\})$$

$$\text{tg : } \left(\prod_{i=2}^{n-2} \prod_{j=i+1}^{n-1} R'_{ij}(\theta'_{ij}) \right) \tilde{A}_n = D$$

(6)

→ comme en l'énoncé 2.

On a: $R'_{ij}(\theta'_{ij}) \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \tilde{A}_n = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\pi} & \frac{i+1}{\pi} & R'_{ij}(-\theta'_{ij}) \\ i=n-2 & j=n-1 & \end{array} \right) D$$

$\hookrightarrow = R'_{ij}(\theta_{ij})^{-1}$

D'où:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\pi} & \frac{i+1}{\pi} & R'_{ij}(\theta_{ij}) \\ j=2 & & \end{array} \right) A = \left(\begin{array}{c|c} R_n & L_n \\ \hline 0 & \frac{1}{\pi} \frac{i+1}{\pi} R'_{ij}(-\theta'_{ij}) D \\ 0 & \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\pi} & \frac{i+1}{\pi} & R'_{i+1,j+1}(-\theta'_{ij}) \\ i=n-2 & j=n-1 & \end{array} \right) \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} R_n & L_n \\ \hline 0 & D \end{array} \right)}_B$$

$\in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

$BB^T = I_n$

Donc: $R_n^2 + \|L_n\|^2 = 1, \text{ or } R_n = \pm 1 \Rightarrow L_n = 0$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\pi} & \frac{i+1}{\pi} & R'_{i+1,j+1}(-\theta'_{ij}) \\ j=n & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\pi} & \frac{i+1}{\pi} & R'_{i+1,j+1}(-\theta'_{ij}) \\ i=n-2 & j=n-1 & \end{array} \right)$$

Donc: $B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow H(n)$.

Bel: $\forall n \in \mathbb{N}^*, H(n)$ est vérifiée.

$A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \exists (\theta_{ij}), 1 \leq i, j \leq n \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}},$

$\exists D \in D_n(\{-1, 1\}),$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\pi} & \frac{i+1}{\pi} & R'_{ij}(\theta_{ij}) \\ i=1 & j=i+1 & \end{array} \right) A = D$$

$$\Rightarrow A = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\pi} & \frac{i+1}{\pi} & R'_{ij}(-\theta_{ij}) \\ j=n-1 & j=n & \end{array} \right) D$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket, \quad \forall j \in \llbracket i+1, n \rrbracket,$$

$$t_{ij} = \tan\left(-\frac{\theta_{ij}}{2}\right) \in \mathbb{R}$$

$$Q = \mathbb{R} \Rightarrow \exists (t_{ij}(k))_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, \quad t_{ij}(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} t_{ij}$$

$$R'_{ij}(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1-t_{ij}(k)^2}{1+t_{ij}(k)^2} & & -\frac{2t_{ij}(k)}{1+t_{ij}(k)^2} \\ & & \ddots & \\ & \frac{2t_{ij}(k)}{1+t_{ij}(k)^2} & & \frac{1-t_{ij}(k)^2}{1+t_{ij}(k)^2} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{Q})$$

$$A_k = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{\pi} & \frac{i+1}{\pi} \\ i=n-1 & j=n \end{array} R'_{ij}(k) \right) \begin{array}{c} D \\ \in \mathcal{O}_n(\mathbb{Q}) \end{array} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{Q})$$

Or:

$$\prod_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\frac{n(n-1)}{2} + 1} \prod_n(\mathbb{R})$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n \right) \hookrightarrow \prod_{i=1}^{\frac{n(n-1)}{2} + 1} \pi_i \quad \text{est } \frac{n(n-1)}{2} + 1 \text{ linéaire, en dim. finie}$$

Donc : $\mathbb{C}^0$.

$$\text{Donc : } \lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = \left(\prod \prod R'_{ij}(-\theta_{ij}) \right) D = A.$$

D'où : $\overline{\mathcal{O}_n(\mathbb{Q})} = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Ex 862: (autre feuille), existe de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos(x)}}$

→ Existence:

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\cos(x)}} \in \mathcal{C}^0\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right)$$

→ Problème en $\frac{\pi}{2}$:

$$\cos(x) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\pi}{2} - x$$

$$\frac{1}{\sqrt{\cos(x)}} \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - x}}$$

comme $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, par

comparaison avec intégrale

de Riemann convergente: OK

Ex 846:

E espace de dim. finie, $A \subset E$ compact $\neq \emptyset$.

$$\forall (a, b) \in A^2, \|a - b\| = \max\{\|x - y\|; (x, y) \in A\}$$

$$B = \{\|x - y\|, (x, y) \in A^2\}$$

Comme A est borné, donc $\exists r > 0$, $A \subset B(0_E, r)$

$$\forall x, y \in A, \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2r$$

Donc B est majoré

$$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$$

$\Rightarrow B$ admet une borne sup. M .

$$\exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}, u_n \rightarrow \pi$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in B, \exists (a_n, b_n) \in A^2,$$

$$\|a_n - b_n\| = u_n$$

$$\Rightarrow \|a_n - b_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in (A^{\mathbb{N}})^2$$

et A compact, donc B -W.:

$$\exists \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \text{ strict. } \nearrow, a_{\varphi(n)} \rightarrow a.$$

$$\exists \psi: \text{ ————— } b_{\varphi \circ \psi(n)} \rightarrow b$$

(avec $\varphi \circ \psi$ strict. $\nearrow$).

$$\text{Comme } a_{\varphi(n)} \text{ log, } a_{\varphi \circ \psi(n)} \rightarrow a$$

$$A \text{ fermé} \Rightarrow (a, b) \in A^2$$

$$\|a_n - b_n\| \rightarrow \|a - b\|$$

$$\text{ ————— } \rightarrow \sup B$$

$$\text{Par unité de l'axe: } \|a - b\| = \sup B = 1.$$

$$\text{D'où il } \exists \text{ de } (a, b) \in A^2, \|a - b\| = \max\{\|x - y\|, (x, y) \in A^2\}$$

Exo 850:

$$E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) / f(0) = 0\}$$

$$\text{pour } f \in E, \text{ pose } \|f\| = \|f + f'\|_{\infty}$$

(7)

1) on $\| \cdot \|$ norme:

→ Séparation: Soit $f \in E$:

$$\rightarrow \|f\| \geq 0$$

$$\rightarrow \text{si } \forall t \in [0, 1], f(t) = 0$$

$$\Rightarrow f'(t) = 0$$

$$\Rightarrow \|f\| = 0.$$

$$\rightarrow \|f\| = 0 \Leftrightarrow \|f + f'\|_\infty = 0$$

$$\Rightarrow \forall t \in [0, 1], f(t) + f'(t) = 0.$$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } f(t) = \lambda e^{-t}, \forall t \in [0, 1]$$

$$\text{On: } f(0) = \lambda = 0$$

$$\text{d'où } f(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

→ Homogénéité: Soit $\lambda \in \mathbb{R}, f \in E$:

$$\|\lambda f\| = \|\lambda f + \lambda f'\|_\infty = |\lambda| \|f\| \quad \underline{\text{OK}}$$

→ IT: Soit $f, g \in E$:

$$\|f + g\| = \|f + g + f' + g'\|_\infty$$

$$\leq \|f + f'\|_\infty + \|g + g'\|_\infty \quad \underline{\text{OK}}$$

IT.

2) on $\exists a > 0, \|f\|_\infty \leq a \|f\| \quad (\forall f \in E).$

$$\text{On a: (IT): } \|f\| \geq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

↳ mauvais sens → problème

$$\forall f \in E, \text{ on a: } \forall t \in [0, 1]: f(t) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \int_0^t f'(x) dx$$

↳ donc $C^1 \rightarrow \text{TFI}$:

$$\Rightarrow |f(t)| \leq \int_0^t |f'(x)| dx$$

$$\leq \|f'\|_{\infty} \underset{0 \leq t \leq 1}{\quad}$$

$$\Rightarrow |f(t)| \leq t \|f'\|_{\infty} \leq \|f'\|_{\infty}$$

Par passage à la borne sup :

$$\|f\|_{\infty} \leq \|f'\|_{\infty}$$

Donc: $\|f\| \geq 2 \|f\|_{\infty}$

Donc: $\|f\|_{\infty} \leq \frac{1}{2} \|f\|$

c) Il $\|\cdot\|_{\infty}$ et $\|\cdot\|$ ne sont pas équivalents:

On pose:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], f_n(t) = t^n$$

$$f_n \in E$$

$$\cdot \|f_n\|_{\infty} = 1$$

$$f_n'(t) = n t^{n-1}$$

$$\Rightarrow f_n(t) + f_n'(t) = t^{n-1}(t+n)$$

$$\Rightarrow \|f_n + f_n'\|_{\infty} = n+1$$

Donc: $\frac{\|f_n\|}{\|f_n\|_\infty} = 1+n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

On reprend 2):

(E): $g = f + f'$

(H): $f + f' = 0 \Rightarrow f(t) = c e^{-t}$

(SP): $f(t) = c(t) e^{-t}$

$\Rightarrow c'(t) e^{-t} = g(t)$

$c'(t) = e^t g(t)$

$\Rightarrow c(x) = \int_0^x e^t g(t) dt$

Donc: SP: $\left(\int_0^x e^t g(t) dt \right) e^{-x}$

Donc: (E): $f(x) = c e^{-x} + \left(\int_0^x e^t g(t) dt \right) e^{-x}$

De plus: $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$.

Donc: $f(x) = \left(\int_0^x e^t g(t) dt \right) e^{-x}$

$|f(x)| \leq \left(\int_0^x e^t \|g\|_\infty dt \right) e^{-x} = \|g\|_\infty (e^x - 1) e^{-x}$

Donc: $|f(x)| \leq \|g\|_\infty (1 - e^{-x}) \leq \|g\|_\infty$

$\hookrightarrow \forall x \in [0, 1] \Rightarrow \|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty = \|f\|$

exo 865:

convergence de $\int_2^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\ln(x)} dx$

$$f: x \in [2, +\infty[\rightarrow \frac{\cos(x)}{\ln(x)} \in \mathcal{C}^1([2, +\infty[, \mathbb{R}).$$

Soit $x \in [2, +\infty[$:

$$\int_2^x \frac{\cos(t)}{\ln(t)} dt \quad \left\{ \begin{array}{l} u'(x) = \cos(x) \Rightarrow u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = \frac{1}{\ln(x)} \Rightarrow v(x) = \frac{-1}{x \ln^2(x)} \end{array} \right.$$

$$= \left[\frac{\sin(t)}{\ln(t)} \right]_2^x + \int_2^x \frac{\sin(t)}{t \ln^2(t)} dt$$

On a:

$$* \left[\frac{\sin(t)}{\ln(t)} \right]_2^x = \frac{\sin(x)}{\ln(x)} - \frac{\sin(2)}{\ln(2)} \rightarrow - \frac{\sin(2)}{\ln(2)}$$

$$* [u = \ln(t)] \text{ (croisement)}$$

$$du = \frac{dt}{t}$$

$$t = x \rightarrow u = \ln(x)$$

$$t = 2 \rightarrow u = \ln(2)$$

$$\left| \int_2^x \frac{\sin(t) dt}{t \ln^2(t)} \right| \leq \int_2^x \frac{dt}{t \ln^2(t)} = \int_{\ln(2)}^{\ln(x)} \frac{du}{u^2} : \text{convergent}$$

$$\text{Donc: } \int_2^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\ln(x)} dx \text{ cvg.}$$

exo 894:

$$n \in \mathbb{N}^*$$

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

1) Bonne définition:

$$f: t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}).$$

$$\rightarrow \underline{\text{en } +\infty}: f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}} \quad (2n > 1) \\ \text{donc OK.}$$

2) Soit $x \rightarrow 0$:

$$\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int_0^x \frac{(1+t^2) - t^2}{(1+t^2)^n} dt = I_{n-1} + \underbrace{\int_0^x \frac{-t^2}{(1+t^2)^n} dt}_{-J}$$

Calcul de J:

$$J = \int_0^x \underbrace{\left(\frac{-t \times 2t}{2} \times (1+t^2)^{-n} \times \frac{(-n+1)}{(-n+1)} \right)}_{\text{circled}} dt$$

$$= \frac{-1}{2(n-1)} \left(\underbrace{\left[t \times 2t (1+t^2)^{-n} \right]_0^x}_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ 0}} - \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} \right)$$

$$J \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{I_{n-1}}{2(n-1)} \Rightarrow I_n = I_{n-1} - \frac{I_{n-1}}{2(n-1)} = \frac{2n+3}{2n-2} I_{n-1}$$

Exo 829:

On a: $K = [a, b]^3$

$$f: K \rightarrow K, \quad \forall x, y \in K, x \neq y:$$

$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

$$\forall x, y \in K: \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$$

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$: f_i : application coordonnée (C^0).

problème
car a est
un triplet

$$g_i = f_i - \text{Id}$$

$$\Rightarrow g_i(a) = f_i(a) - a \geq 0$$

$$g_i(b) = f_i(b) - b \leq 0.$$

$$\exists a_i, f_i(a_i) = a_i$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} : \text{point fixe}$$

même: soit x, y 2 points fixes $\neq$:

$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

$$\|x - y\| \quad \text{Absurde}$$

$$x = y.$$

plutôt: On a: $f \in C^0$: $g \begin{cases} K \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|f(x) - x\| \end{cases}$
 C^0 sur $\perp$ compact.

→ Théorème des bornes alternées :

$$\exists c \in K, g(c) = \min_K g$$

$$r_q: g(c) = c.$$

$$\text{donc: } \|g(c)\| > 0$$

$$\text{Or: } \|f(f(c)) - f(c)\| \leq \|f(c) - c\|$$

$f(f(c))$

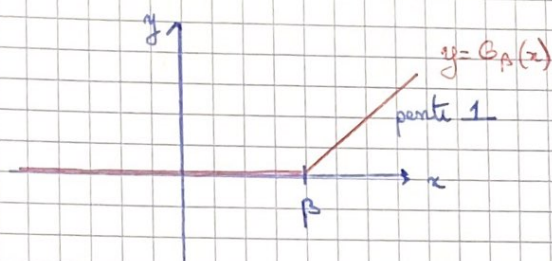
↳ contredit la minimalité de c

$$\text{Donc: } \underline{f(c) = c.}$$

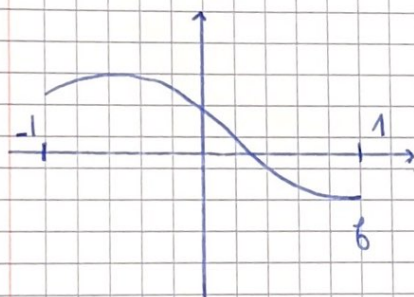
Exercice 859 (Léon)

Pour $\beta \in \mathbb{R}$, $G_\beta: x \mapsto \max(x - \beta, 0)$

$E = \text{Vect}_{\beta \in \mathbb{R}}(G_\beta) + \mathbb{R} \cdot 1$ ou 1 est la f.c.
 $x \mapsto 1$



Sait f lipschitzienne i.e. $\forall (x, y), |f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$
 . Sait $\varepsilon > 0$



On essaye d'approximer
 $f - f(-1)$

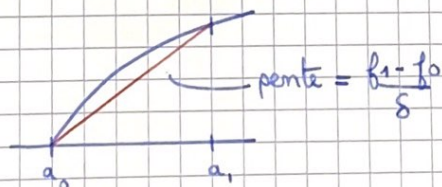
Sait $\sigma = \{-1, a_1, \dots, a_{m-1}, 1\}$

$a_0 = -1$ et $a_m = 1$

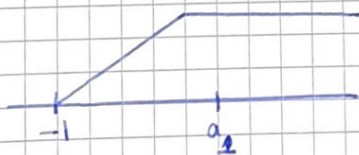
$a_k = 1 + \frac{2k}{n} \quad (8 = \frac{2}{n})$

On travaille sur $[a_0, a_1]$

(on pose $f_k = f(a_k)$)



On a aussi :



$(G_{a_0} - G_{a_1}) \leftarrow \text{Idu}$

On pose :

$$g: x \mapsto \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f_{k+1} - f_k}{\delta} (G_{a_k}(x) - G_{a_{k+1}}(x)) + f_0$$

Ann.

→ si $x = a_i$:

$$\begin{aligned} g(a_i) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_{k+1} - f_k}{\delta} (G_k(a_i) - G_{k+1}(a_i)) + f_0 \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} \frac{f_{k+1} - f_k}{\delta} (G_k(a_i) - G_{k+1}(a_i)) + \underbrace{0}_{\text{terme } i} + \underbrace{0}_{\text{terme } k > i \text{ car}} + f_0 \\ &= \underbrace{a_i - a_0}_{= \delta} - \underbrace{(a_i - a_{i+1})}_{= \delta} \\ &= \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } g(a_i) &= \sum_{k=0}^{i-1} (f_{k+1} - f_k) + f_0 \\ &= f_i \\ &= f(a_i) \end{aligned}$$

$G_k(a_i) = 0$
si $k > i$

→ soit $x \in]a_i; a_{i+1}[$

$$g(x) = ?$$

→ terme $k \leq i$: $G_k(x) = x - a_k$

→ terme $k > i$: $G_k(x) = 0$

Donc :

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=0}^{i-1} \frac{f_{k+1} - f_k}{\delta} (\overbrace{x - a_k - (x - a_{k+1})}^{\delta}) \\ &\quad + \frac{f_{i+1} - f_i}{\delta} (x - a_i) + 0 + f_0 \end{aligned}$$

$$g(x) = f_i + (f_{i+1} - f_i) \frac{(x - a_i)}{\delta}$$

$$g(x) - f(x) = f(a_i) - f(x) + (f(a_{i+1}) - f(a_i)) \frac{(x - a_i)}{\delta} \leq \delta$$

$$\begin{aligned} |g(x) - f(x)| &\leq |f(a_i) - f(x)| + |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \times 1 \\ &\leq \alpha |a_i - x| + \alpha \delta \leq 2\alpha \delta \end{aligned}$$

Pour avoir : $|g(x) - f(x)| \leq \varepsilon$
on prend $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2\alpha}$

ou $\delta = \frac{2}{m}$
 $\Rightarrow m \gg \frac{4\alpha}{\varepsilon}$

Exercice 865

$$\int_2^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\ln(x)} dx$$

$f: x \mapsto \frac{\cos(x)}{\ln(x)} \in \mathcal{B}'([2, +\infty[, \mathbb{R})$
est réel