

Exercice 78-1

$E : \mathcal{C}^0([a, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

Soit $T \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ tel $\forall f \in E, f \geq 0 \Rightarrow T(f) \geq 0$
~~q~~ T est lipschitzien.

i. ~~q~~ $\exists k \in \mathbb{R}, \|T(f) - T(g)\| \leq k \|f - g\|_\infty$
 $\|T(f - g)\|$

$\Rightarrow$ ~~q~~ $\exists k \in \mathbb{R}, \|T(f)\| \leq k \|f\|_\infty$.

Soit $f \in E$. On pose $\begin{cases} f_+ := \max(f, 0) \\ f_- := \max(-f, 0) \end{cases}$

Alors $f = f_+ - f_-$ et $|f| = f_+ + f_-$

$$\begin{aligned} \|T(f)\| &= \|T(f_+) - T(f_-)\| \\ &\leq \|T(f_+)\| + \|T(f_-)\| \end{aligned}$$

Car f_+ et $f_- \geq 0$ donc $\begin{cases} \|T(f_+)\| = T(f_+) \\ \|T(f_-)\| = T(f_-) \end{cases}$
 $\Rightarrow \|T(f)\| \leq T(f_+) + T(f_-)$

On définit $\tilde{T} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 1$

$$\begin{cases} f_+ \leq \|p\|_\infty \tilde{T} \\ f_- \leq \|p\|_\infty \tilde{T} \end{cases}$$

$$\text{donc } |T(f)| \leq 2 T(\|p\|_\infty \tilde{T}) \\ \leq 2 \|f\|_\infty T(\tilde{T}) \quad \forall f \in E.$$

↓
linéarité

d'où T est $2T(\tilde{T})$ lipschitzien

Exercice 825

Soit $O_n(\mathbb{Q})$ dense dans $O_n(\mathbb{R})$.

1^{er} essai :

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. On a vu que $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$,

$$A = P \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & R(\theta_1) & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & R(\theta_p) \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, R(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix}$$

$$\text{Or, en notant } t_i = \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \quad \begin{cases} \cos \theta_i = \frac{1-t_i^2}{1+t_i^2} \\ \sin \theta_i = \frac{2t_i}{1+t_i^2} \end{cases}$$

$t_i \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc $\exists (k_i/h_i)_{h \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^n$,

$$k_i(h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} k_i$$

Soit $R_i(\lambda) := \begin{bmatrix} \frac{1-t_i(\lambda)^2}{1+t_i(\lambda)^2} & -\frac{2t_i(\lambda)}{1+t_i(\lambda)^2} \\ \frac{2t_i(\lambda)}{1+t_i(\lambda)^2} & \frac{1-t_i(\lambda)^2}{1+t_i(\lambda)^2} \end{bmatrix}$

et $B_k := \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & R_1(\lambda) & \\ & & & & R_p(\lambda) \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{Q})$

On, $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $P_{ij} \in \mathbb{R}$ donc :

$$\exists (P_{ij}(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{m \times m}, \quad P_{ij}(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} P_{ij}$$

En notant $P_k := (P_{ij}(\lambda))_{1 \leq i,j \leq n} : P_k \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} P$

donc par l'° du déterminant, $\det(P_k) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \det P \neq 0$

donc nécessairement, $\exists K \in \mathbb{N}$, $\forall k \geq K$, $\det(P_k) \neq 0$

$\Rightarrow (P_k)_{k \geq K}$ est une suite de matrices de $GL_n(\mathbb{Q})$ qui converge vers $P \in GL_n(\mathbb{R})$.

On pose alors $A_k := P_k B_k P_k^{-1}$

$\Rightarrow$ En fait, ne semble pas fonctionner si $P \notin GL_n(\mathbb{R})$.

2^{ème} essai : Réduire sur n ?

exercice 560 $\Rightarrow \exists$ un pla stable par $A \in O_n(\mathbb{R})$ ou bien un dnoe réductible.

3ème année

petites valeurs de n

$$n=3$$

$$A =$$

→ A suivre...

Exercice 852

$E := \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme
inférieure $N_\infty(f) := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

$$F := \{ f \in E : f(0) = f(1) \}$$

* Soit $f \in F$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}} \xrightarrow{N_\infty} f$

$$\Rightarrow N_\infty(f_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0,1], |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

En particulier : pour $x=0$ et $x=1$:

$$\begin{cases} |f_n(1) - f(1)| \rightarrow 0 \\ |f_n(0) - f(0)| \rightarrow 0 \end{cases}$$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = f_n(1)$ car $f_n \in F$.

d'où par unicité de la limite : $f(0) = f(1)$

Au final, $f \in F$

$$\text{donc } \boxed{F = F}$$

* $f \in F \Leftrightarrow \exists R > 0, B_0(f, R) \subset F$.

Soit $f \in F$ et $R > 0$. Soit $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $g(t) = f(1) - \frac{R}{2}t$
 $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$

$$\sup_{x \in [0,1]} |g-f| = \frac{r}{2} \sup_{x \in [0,1]} |x| = \frac{r}{2} < r$$

$$\text{donc } g \in B_0(f, r)$$

pour:

$$\begin{cases} g(0) = f(0) \\ g(1) = f(1) - \frac{r}{2} < f(1) = f(0) = g(0) \end{cases}$$

Donc $g \notin F$. On en déduit que $\boxed{F^\circ = \emptyset}$.

Exercice 296

A, B 2 parties de E et on définit

$$\begin{cases} A \neq \emptyset \\ B \neq \emptyset \end{cases}$$

$$A+B := \{a+b; (a,b) \in A \times B\}$$

1) Supposons que A est un ouvert. ~~Si~~ $A+B$ est un ouvert.

Soit $(a,b) \in A \times B$.

$$\exists r > 0, B_0(a, r) \subset A$$

$\Rightarrow$

~~$$B_0(a+b, r) \subset A+B$$~~

$$\text{Soit } x \in B_0(a+b, r) \Leftrightarrow \|x - a - b\| \leq r$$

$$\Leftrightarrow x - b \in B_0(a, r) \subset A$$

$$\text{Donc } x = \underbrace{x-b}_{\in A} + \underbrace{b}_{\in B} \in A+B$$

2) $A := \mathbb{N}$; $B := \left\{ \frac{1}{n} - n ; n \geq 2 \right\}$

$$A+B = \left\{ p - n \frac{1}{n} ; p \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$$

A fermé.

B fermé.

Car $A+B$ n'est pas fermé car $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \notin A+B$
 $= n - n + \frac{1}{n} \in A+B$

3) Soit A et B 2 compacts.

$\Rightarrow A+B$ est un compact.

Fermé.

Soit $(a_n + b_n) \in (A+B)^{\mathbb{N}} \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow c$. $\Rightarrow c \in A+B$.

Pour B -W : $\exists \varphi \nearrow, a_{\varphi(n)} \rightarrow a \in A$

Pour B -W appliqué à $(b_{\varphi(n)})$, $\exists \psi \nearrow$,

$b_{\varphi \circ \psi(n)} \rightarrow b$

$(a_{\varphi \circ \psi(n)})$ est extraite de $(a_{\varphi(n)})$ donc converge

donc $a_{\varphi \circ \psi(n)} + b_{\varphi \circ \psi(n)} \rightarrow a + b = c \in A+B$

unicité de la limite

OK

$\Rightarrow A+B$ est borné.

Soit $(a, b) \in A \times B$.

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

$$\leq R + R'$$

donc $A+B$ est borné.

OK

Exercice 793

a) $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire $\wedge n = \deg P \geq 1$.

$\Rightarrow$ Supposons P scindé sur $\mathbb{R}$.

On écrit
$$P(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| = \prod_{i=1}^n |z - \lambda_i| \geq \prod_{i=1}^n \underbrace{| \operatorname{Im}(z - \lambda_i) |}_{= \operatorname{Im}(z)} \quad \text{car } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

$$\text{donc } |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$$

$\Leftarrow$ Supposons qu' $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$

Par l'absurde, supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, P(\lambda) = 0$

$$\text{Alors } |P(\lambda)| = 0 \geq \underbrace{|\operatorname{Im}(\lambda)|}_{\neq 0}^n$$

Absurde

b) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (M_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ avec $\forall k \in \mathbb{N}, A_k \mathbb{R}$ -diagonalisable et $A_k \rightarrow A$.

$\forall k \in \mathbb{N}, X_{A_k}$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

* On a vu (cf. ex. 799) que $A \mapsto X_A$ est l'application sur $M_n(\mathbb{R})$.

* Par le a), $\forall z \in \mathbb{C}, |X_{A_k}(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$

Par passage à la limite $k \rightarrow +\infty$ et l'éc. de $A \mapsto X_A$:

$$\forall z \in \mathbb{C}, |X_A(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$$

donc par le a), X_n est c.a.d. sur $\mathbb{R}$.

c) Soit A limite d'une suite de matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par le b), X_n est c.a.d. sur $\mathbb{R}$.
 $\Rightarrow$ donc A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Supposons A trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), \exists T \in T_n^+(\mathbb{R}), A = P T P^{-1}$$

$$\text{Soit } \forall h \in \mathbb{N}, T_h := T + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h} E_{ii}$$

$\exists K_0 \in \mathbb{N}, \forall h \geq K_0, T_h$ est diagonalisable

(cf cours) $\Rightarrow \forall h \geq K_0, A_h = P T_h P^{-1}$ est diagonalisable. Or, $B \mapsto P B P^{-1}$ est l'a.c. linéaire en dimension finie.

$$\text{donc } (T_h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} T) \Rightarrow (A_h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} A)$$

donc toute matrice trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est limite d'une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables.

$$\text{Donc : } \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; M \text{ diagonalisable}\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; M \text{ IR-trigonalisable}\}$$

Exercice 795

a) $p \in]-1, +\infty[$, $t \in [0, 1]$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Cas 1 : $kx + (1-t)y \geq 0$

$$|kx + (1-t)y|^p = \sum_{h=0}^p \binom{p}{h} |kx|^h |(1-t)y|^{p-h}$$

$$p \notin \mathbb{N}$$

On se ramène au cas où $x, y \geq 0$.

Sol $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto |x|^p = (1 \cdot x)^p + (1 \cdot 0)^p$

est fonction

$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^p$

est convexe car :

$$f''(x) = p(p-1)x^{p-2} \geq 0$$

puisque $p > 1$.

donc $(tx + (1-t)y)^p \leq tx^p + (1-t)y^p$

$$\Rightarrow |tx + (1-t)y|^p \leq t|x|^p + (1-t)|y|^p.$$

b) $\|tx + (1-t)y\|_p = \left(|tx_1 + (1-t)y_1|^p + |tx_2 + (1-t)y_2|^p \right)^{1/p}$
 où $(x, y) \in \mathbb{B}^2$
 où $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\|_p \leq 1\}$

$$\leq \left(t \underbrace{(|x_1|^p + |x_2|^p)}_{= \|x\|_p^p} + (1-t) \underbrace{(|y_1|^p + |y_2|^p)}_{= \|y\|_p^p} \right)^{1/p}$$

$$\leq t \|x\|_p + (1-t) \|y\|_p$$

car $\|x\|_p \leq 1$
 $\|y\|_p \leq 1$

donc $tx + (1-t)y \in \mathbb{B}$

$\Leftrightarrow \mathbb{B}$ est convexe

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2)$

$$\|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p : \text{homogénéité de séparation ok.}$$

ce qd $\Rightarrow \| \cdot \|_p$ est une norme.

d) Si $p=2$: ok.

- Plus généralement, si $\|\cdot\|_p$ est euclidien :

$$(\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2) = 2\|x\|_p^2 + 2\|y\|_p^2.$$

on, pour $\begin{cases} x := (1, 0) \\ y := (0, 1) \end{cases}$

$$\Rightarrow 2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}} = 4 \quad (\Leftrightarrow) \quad \boxed{2^{\frac{2}{p}} = 2}$$

Possible $\boxed{\text{ssi } p=2}$.