

Exercice 639 : (Mathieu)

a) η_g cos admet un unique point fixe :

On pose : $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto x - \cos(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = 1 + \sin(x) \geq 0.$$

$$\text{De plus sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi'(x) > 0.$$

Donc sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, φ est str. $\uparrow$.

$$\text{Or } \varphi(0) = -1 < 0 \text{ et } \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$$

Donc par le th. de la bijection,

$$\exists ! c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ tq } \varphi(c) = 0$$

$$\text{c'est-à-dire } \cos(c) = c.$$

b) $\eta_g \nexists f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable tq $f \circ f = \cos$

Si on $(f \circ f)(c) = \cos(c) = c$ par la a)

$$\underbrace{(f \circ f \circ f)}_{= \cos}(c) = f(c)$$

$$\text{donc } \cos(f(c)) = f(c)$$

$$\text{d'où par unicité du point fixe, } \underline{f(c) = c}$$

$$(f \circ f)'(c) = f'(c) \times \underbrace{f'(f(c))}_{= c'}$$

$$= (f'(c))^2 \geq 0.$$

$$\text{et } (f \circ f)'(c) = \cos'(c) = -\sin(c)$$

$$\text{Or } c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ donc } -\sin(c) < 0 : \text{ contradiction.}$$

Exercice 6.95 : Soit $f \in \mathcal{C}^0([0;1], [0;1])$ non constante

a) $f([0;1])$ est un segment $[a; b] \subset [0;1]$
donc $(a; b) \in [0;1]^2$

b) $\forall n, f \circ f = f \Leftrightarrow \forall x \in f([0;1]), f(x) = x$.

$\Rightarrow$ Supposons $f \circ f = f$:

Soit $y \in f([0;1]) : \exists x \in [0;1] \text{ tq } y = f(x)$
 $\Rightarrow (f \circ f)(x) = f(x) \Rightarrow f(y) = y$.

$\Rightarrow$ Soit $x \in [0;1] \Rightarrow f(x) \in f([0;1]) \Rightarrow f(f(x)) = f(x)$
donc $f \circ f = f$.

c) Supposons $f \circ f = f$ et $f([0;1]) = [a; b]$, avec $0 < a < b \leq 1$

Soit x tq $b > x > a$:

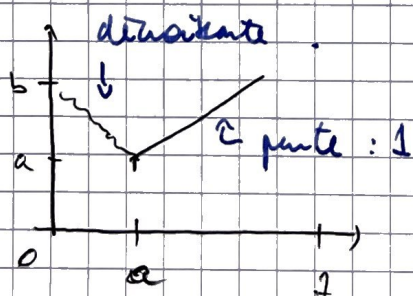
$a \in f([0;1]) \Rightarrow f(a) = a$

$x \in f([0;1]) \Rightarrow f(x) = x$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1$$

Soit x tq $x < a$: $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(x) - a}{x - a} \leq 0$.

car $x - a < 0$ et $f(x) \in [a; b]$ donc $f(x) \geq a$



Exercice 7.13 : (Victor)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

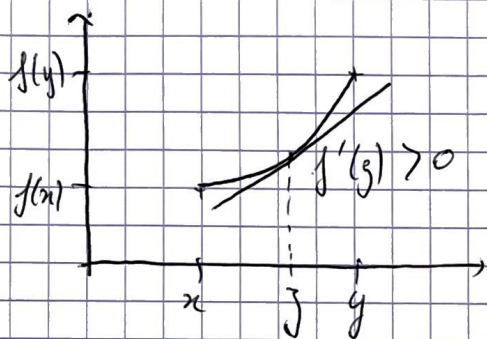
Hyp. f bornée et f'' positive.

Rq : f est constante

Par l'absurde : Supposons $\exists x < y, f(x) \neq f(y)$.

wlog : $f(y) > f(x)$

Par le TAF : $\exists z \in]x, y[$ tq $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z) > 0$.



Donc f étant convexe ($f'' \geq 0$), on a
 $f(x) \geq f'(z)(x - z) + f(z) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$
absurde car f bornée.

Exercice 686 : (Leonard)

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ tel que $f(0) = 1$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) \leq f(x)f(y)$

Analyse : Pour $h > 0$: $f(x+h) \leq f(x)f(h)$

$$f(x+h) - f(x) \leq f(x)(f(h) - 1)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq f(x) \frac{f(h) - 1}{h}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq f(x) \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

Par passage à la limite : $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq f(x) f'(0)$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq f(x) f'(0)$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \times f'(0)$
 donc f de la forme $x \mapsto e^{2x}$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ie $f(x) = e^x$ pour $x \geq 0$
 $x \mapsto e^{|x|}$ $f(x) = e^{-x}$ pour $x < 0$.

f est $\mathcal{C}^0$ mais non $\mathcal{C}^1$ et pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

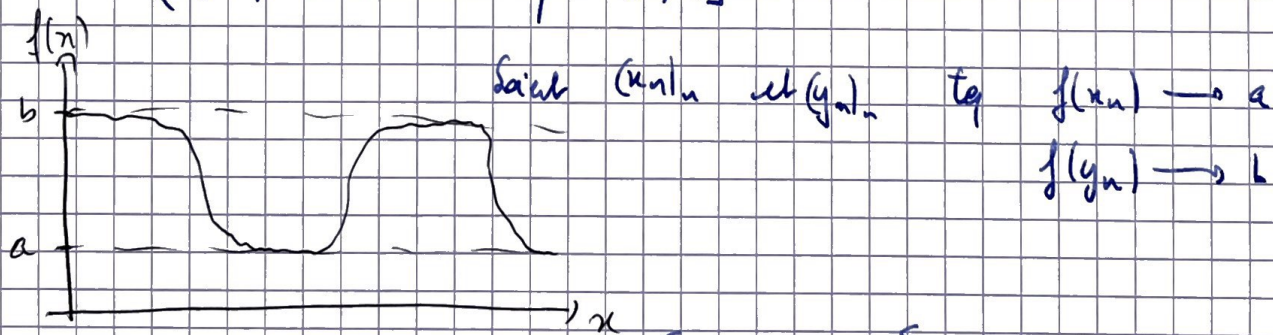
$$e^{|x+y|} \leq e^{|x|+|y|} = e^{|x|} e^{|y|}$$

IT et $\uparrow$ de exp

Exercice 683: (Leo)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ $A = \left\{ a \in \mathbb{R}, \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}, x_n \rightarrow +\infty \text{ et } f(x_n) \rightarrow a \right\}$.

Soient $(a, b) \in A^2$: $\exists \eta, [a, b] \subset A$:



Soit $c \in]a, b[$ $\xrightarrow{\varepsilon}$ $\xrightarrow{\varepsilon}$ on peut $\varepsilon \leq \min(c-a, b-c)$

On dispose de $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$:

$$f(x_n) \leq a + \varepsilon$$

$$f(y_n) \geq b - \varepsilon$$

par le TVI, on dispose de $z_n \in [x_n, y_n]$ ou $[y_n, x_n]$ tq
 $f(z_n) = c$

on a $f(z_n) = c, \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow f(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c$

de plus $z_n \geq \min(x_n; y_n)$ donc $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
donc $c \in A$.

Exercice 665 : (Anthony)

Il y a $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\cos(k)| \geq \frac{6n}{10}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\cos(k)| \geq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \cos(k) \right|$$

$$\stackrel{IT}{\geq} \left| \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik} \right) \right|$$

$$\geq \left| \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{in}}{1 - e^i} \right) \right|$$

$$\geq \left| \operatorname{Re} \left(\frac{e^{\frac{in}{2}}}{e^{i/2}} \frac{e^{-i\frac{n}{2}} - e^{i\frac{n}{2}}}{e^{-i/2} - e^{i/2}} \right) \right|$$

$$\geq \left| \operatorname{Re} \left(e^{i\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)} \right) \right|$$

$$\geq \left| \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)} \right| \left| \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{n-1}{2}} \right) \right|$$

$$\geq \left| \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right) \cos\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)} \right|$$

ne fonctionne pas :

IT trop grossier.

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} |\cos(k)| \geq \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(k)$$

$$\geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(2k) + 1}{2}$$

$$\geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2k)$$

$$\geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{2in}}{1 - e^{2i}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(e^{i(n-1)} \frac{\sin(n)}{\sin(1)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin(n)}{\sin(1)} \cos(n-1)$$

donc $u_n \geq \frac{4n}{10} \Leftrightarrow \frac{\sin(n)}{\sin(1)} \cos(n-1) \geq -\frac{n}{5}$ donc OK pour $n \geq 5$.

$n=1$: $\ast = \cos(0) = 1 \geq -\frac{1}{5}$

$n=2$: $\ast = \frac{\sin(2) \cos(1)}{\sin(1)} > 0 \geq -\frac{2}{5}$

$n=3$: $\ast = \frac{\sin(3) \cos(2)}{\sin(1)} \leq 0$

$$|\sin(3)| \leq \pi - 3$$

$$|\cos(2)| \leq \frac{1}{2}$$

$$|\sin(1)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc $|\ast| \leq \frac{\pi-3}{\sqrt{2}} \leq 0,1 \leq \frac{3}{5}$.

$$u=4: \frac{\sin(4) \cos(3)}{\sin(1)} > 0$$

Exercice 124 (Analyse) :

Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ $\mathcal{C}^2$: Supposons f majorée et
 $\exists \lambda > 0, f'' \geq \lambda f$.

a) Il y a une limite en $+\infty$:

$f'' \geq \lambda f \geq 0$ donc f est convexe $\Rightarrow f' \uparrow$: donc $f' \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} l'$
 ou $f' \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$

Par l'absurde, si $f' \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$:

$\forall A \in \mathbb{R}^{+*}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \geq x_0, f'(x) \geq A$.

Soit $A \in \mathbb{R}^{+*}, x \geq x_0, \int_{x_0}^x f'(t) dt \geq \int_{x_0}^x A dt$

$\Rightarrow f(x) \geq \underbrace{f(x_0) + (x-x_0)A}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty}$ absurde car f majorée.

donc $f' \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} l'$.

pour $x \geq x_0, \underbrace{l' - \varepsilon \leq f'(x) \leq l' + \varepsilon}$

$\int_{x_0}^x f'(t) dt \geq (l' - \varepsilon)(x - x_0)$: si $l' - \varepsilon > 0$ contradiction
 donc $l' - \varepsilon \leq 0$

$$\Rightarrow l' \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow l' \leq 0$$

De plus $f' \geq 0$, $f' \leq 0$
 donc $\forall n$, $f'(n) \leq l'$

$$f(n) \leq f(0) + l'n \Rightarrow l' \geq 0 \text{ donc } \underline{l' = 0}.$$

b) Pq $f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$: $f' \leq 0 \Rightarrow f \searrow$ et f majorée
 donc $f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l \in \mathbb{R}^+$

par l'absolue, on suppose $l > 0$:

$$f''(n) \geq 1 \quad f(n) \geq \alpha l$$

$$f'(n) \geq f'(0) + \alpha n$$

absolue car f' majorée.

$$\text{donc } \underline{l = 0}$$

c) $f: x \mapsto e^{-\sqrt{x}} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}$$

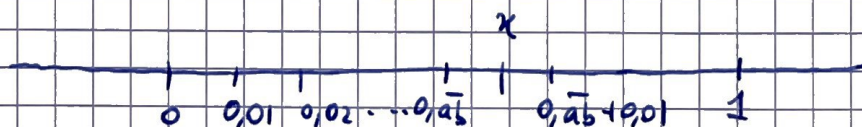
$$f''(x) = \frac{1}{4x^{3/2}} e^{-\sqrt{x}}$$

Exercice 759 (60) :

$$f: [0; 1] \rightarrow [0; 1] : f(0,12) = 0,21$$

$$f(0,123) = 0,213 \quad \text{Pq } f \text{ est en fait } \int_0^1 f(x) dx$$

$$(a; b) \in [0; 9]^2$$



$$n_f \notin \mathcal{C}^0 \text{ sur }]0, \bar{a}\bar{b} ; 0, \bar{a}\bar{b} + 0,01[= I_{ab}$$

$$\text{Soit } x \in I_{ab} : x = 0, \overline{ab} x_3 x_4 \dots$$

$$f(x) = 0, \overline{ba} x_3 x_4 \dots$$

$$f(x) = x - 0, \bar{a}\bar{b} + 0, \bar{b}\bar{a}$$

$$f|_{I_{ab}} : x \mapsto x - 0, \bar{a}\bar{b} + 0, \bar{b}\bar{a} \text{ est } \mathcal{C}^0$$

$$\text{Soit } x \in I_{ab} : 0, \bar{a}\bar{b} \leq x \leq 0, \bar{a}\bar{b} + 0,01$$

$$x = 0, \bar{ab} x_3 x_4 \dots$$

$$\text{pour } x \rightarrow 0, \bar{ab}, \quad x_3 x_4 \rightarrow 0$$

$$\text{donc } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0, \bar{ab}} 0, \bar{ba}$$

$$\text{et } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0, \bar{ab} + 0,01} 0, \bar{ba} + 0,01 \text{ donc } f \text{ est } \mathcal{C}^0.$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum \int_{0, \bar{ab}}^{0, \bar{ab} + 0,01} (x - 0, \bar{ab} + 0, \bar{b}\bar{a}) dx$$

$$= \int_0^1 x dx + \sum \int_{0, \bar{ab}}^{0, \bar{ab} + 0,01} (-0, \bar{ab} + 0, \bar{b}\bar{a}) dx$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{\substack{a \neq b \\ (a,b) \in ([0,1]^2)}} 0,01 \times (-0, \bar{ab} + 0, \bar{ba})$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{a < b} -0, \bar{ab} + 0, \bar{ba} + (-0, \bar{ba} + 0, \bar{ab}) = \frac{1}{2}.$$

9

Exercice 669 (Béatrice) :

Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $|a| \neq 1$:

Analyse : cas 1 : $|a| > 1$ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ en 0 tq

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - f(ax) = x$$

$$f(ax) = f(x) - x$$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{x}{a}$$

$$= f\left(\frac{x}{a^2}\right) - \frac{x}{a^2} - \frac{x}{a}$$

$$= f\left(\frac{x}{a^n}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{x}{a^k}$$

$$= \underbrace{f\left(\frac{x}{a^n}\right)}_{\rightarrow f(0)} - x \times \underbrace{\frac{1}{a} \frac{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^n}{1 - \frac{1}{a}}}_{\rightarrow \frac{1}{a-1}}$$

Par continuité de f en 0 et

par passage à la limite : $f(x) = f(0) - \frac{x}{a-1}$

cas 2 : $|a| < 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(ax) + x \\ &= f(a^2x) + ax + x \\ &= f(a^n x) + \sum_{k=1}^{n-1} a^k x \end{aligned}$$

et on retrouve les mêmes solutions que pour $|a| > 1$.

Synthèse : Les fonctions sont bien solution de l'équation.

Exercice 106 (n° Fragebatterie): $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2, a < b$:

$f([a; b])$ segment de longueur $b-a$

$$|f(b) - f(a)| \leq |b - a| \Rightarrow f \text{ Lipschitzienne} \\ \Rightarrow f \in C^0$$

tg $f(x) = x+1$ ou $-x+1$

Wlog: $f(0) = 0$ en remplaçant f par $g(x) = f(x) - f(0)$.
par $x > 0$:

$f([0; x])$ = segment de longueur x

$$f(0) = 0$$

$$\forall t \in [0; x], |f(t)| \leq t$$

$$\Rightarrow f(x) = \pm x$$

et f continue sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ continue sur $\mathbb{R}^*$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

donc $\frac{f(x)}{x}$ est sur $\mathbb{R}^{+*}$
sur $\mathbb{R}^{-*}$

$$f(x) = x \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}$$

$$f(x) = -x \text{ sur } \mathbb{R}^{-*}$$

Si $f([-1; 1])$ ne serait pas de longueur 2.

$$= [0; 1]$$

finalment: $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$
ou $f(x) = -x$ sur $\mathbb{R}$

cas général: $f(x) = x+1$
ou $f(x) = -x+1$.