

Exercice 660: (Nathan)

$$f:]0,1[\rightarrow \mathbb{R}, e^x$$

$$f(0) = f(1) = 0.$$

Pour $\forall a \in \mathbb{R}$, $f' + af$ s'annule sur $]0,1[$

On pose $g(x) = e^{ax} f(x)$

Par opérations, g ad e^x , et

$g(0) = g(1) = 0$. Par le théorème de Rolle, $\exists c \in]0,1[, g'(c) = 0$.

Or, $g'(x) = e^{ax} (f'(x) + a f(x))$,

d'où $g'(c) = 0$,

et donc

$$f'(c) + a f(c) = 0$$

Exercice 663: (Hugo)

$$t \mapsto (\cos t)^{100}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$(\cos x)^{100} = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^{100}$$

$$= \frac{1}{2^{100}} \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} e^{ikx} e^{i(100-k)x}$$

$$m := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t)^{100} dt = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{2^{100}} \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(2k-100)t} dt$$

$$= 0 \text{ sauf si } 2k = 100$$

$$m = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{2^{100}} \binom{100}{50} 2\pi$$

d'où

$$m = \frac{1}{2^{100}} \binom{100}{50}$$

Exercice 707. (Lama)

Analyse: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^x$$

Soit $x \in \mathbb{R}, y=0$.

$$f(x) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

$$\text{Soit } (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^x \Leftrightarrow \frac{f(x+y)}{e^{x+y}} = \frac{f(x)}{e^x} + \frac{f(y)}{e^y}$$

$$\text{On pose } g: x \mapsto \frac{f(x)}{e^x}.$$

$$\text{On a } g(x+y) = g(x) + g(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi, g est linéaire. (démonstration plus loin)

$$\text{On pose } (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = ax + b.$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow g(0) = 0 \Rightarrow b = 0.$$

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = axe^x.$$

$$\exists l \in \mathbb{R}, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} l \text{ par hypothèse.}$$

$$\text{Or, } \frac{f(x)}{x} = ae^x \xrightarrow{x \rightarrow 0} a$$

Synthèse: Soit $a \in \mathbb{R}$

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto axe^x$$

f est C^∞ par opérations, donc dérivable en 0, et

$$\begin{aligned} f(x+y) &= a(x+y)e^{x+y} = axe^y e^x + aye^x e^y \\ &= f(x)e^y + f(y)e^x \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 744: (Gabriel R)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx = 1$.

Montrons que $\int_0^1 f^2 \geq 4$

Soit $z \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 (x+z) f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx + z \int_0^1 f(x) dx = 1+z$$

Par Cauchy-Schwarz,

$$(z+1)^2 = \left(\int_0^1 (x+z) f(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x) dx \times \underbrace{\int_0^1 (x+z)^2 dx}_{= \frac{(z+1)^3 - z^3}{3}}$$

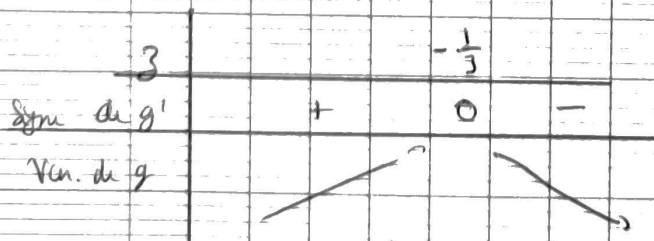
Comme $(z+1)^3 - z^3 \neq 0 \forall z \in \mathbb{R}$, on peut

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto \frac{z(z+1)^2}{(z+1)^3 - z^3}$, or $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$g'(z) = \frac{z(z+1)(3z^2 + 3z + 1) - 3z(z+1)^2(2z+1)}{((z+1)^3 - z^3)^2}$$

Le dénominateur est positif sur $\mathbb{R}$.

Le numérateur est positif $\Leftrightarrow 2(3z^2 + 3z + 1) - 3(z+1)(2z+1) \geq 0$
 $\Leftrightarrow (\dots \text{calcul} \dots)$
 $\Leftrightarrow z \leq -\frac{1}{3}$



$g(-\frac{1}{3}) = (\dots \text{calcul} \dots) = 4$

d'où $4 \leq \int_0^1 f^2$

Retour au 707 (N. Fagebaum)

$$\begin{aligned} f \text{ dérivable en } 0 &\Rightarrow g \text{ dérivable en } 0 \\ &\Rightarrow f \text{ dérivable en } 0 \end{aligned}$$

$$g(0) = 0.$$

$$g(n+y) = g(n) + \underbrace{g(y)}_{\xrightarrow{y \rightarrow 0} 0}$$

$$g(n+y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} g(n) \Rightarrow g \text{ est continue en } x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

De plus, on a $g(nx) = ng(n)$,
et par récurrence immédiate,
 $g(nx) = ng(n), \forall n \in \mathbb{N}.$

$$\begin{aligned} g(n+(-n)) &= g(0) = 0 \\ \Rightarrow g(n) &= -g(-n) \end{aligned}$$

$$g(n) = g\left(p \times \frac{n}{p}\right) = pg\left(\frac{n}{p}\right) \Rightarrow g\left(\frac{n}{p}\right) = \frac{g(n)}{p}$$

$$\text{d'où } g\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}g(n)$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}g(1), \text{ puis, par densité de } \mathbb{Q} \text{ dans } \mathbb{R},$$

et continuité de g , $g(n) = ng(1), \forall n \in \mathbb{R}.$

ou bien:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{n}{p}\right) &= \frac{1}{p}g(n) \\ \Rightarrow \frac{g\left(\frac{n}{p}\right)}{\frac{n}{p}} &= \frac{g(n)}{n} \end{aligned}$$

Or, pour $p \rightarrow +\infty$, $\frac{g\left(\frac{n}{p}\right)}{\frac{n}{p}} \rightarrow g'(0) = a.$

$$\text{d'où } \frac{g(n)}{n} = a \Rightarrow g(n) = ax.$$

Exercice 703: (Karam)

Soient $(f, g) \in \mathcal{C}^0([0,1], [0,1])^2$, $f \circ g = g \circ f$.
Montrons que $\exists c \in [0,1], f(c) = g(c)$.

Par le TVI (considérons $x \mapsto x - f(x)$),
 f admet un point fixe a dans $[0,1]$.

$f(g(a)) = g(f(a)) = g(a)$, donc $g(a)$ est un point fixe de f .
a priori de f

Ainsi, $f(g(g(a))) = g(f(g(a))) = g^2(a)$, donc $g^2(a)$ est un point fixe de f .

En itérant de même, on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$
que $g^n(a)$ est un point fixe de f .

On pose $h: [0,1] \rightarrow [0,1]$,
 $x \mapsto f(x) - g(x)$

Par l'absurde, supposons que $\forall x \in [0,1], h(x) > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$.
 $h(g^k(a)) = g^k(a) - g^{k+1}(a) > 0$
 $\Rightarrow (g^k(a))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

De plus, elle est bornée, donc par le théorème de la limite monotone,
 $\exists c \in [0,1], g^k(a) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c$.

Par continuité de h ,

$h(g^k(a)) \rightarrow h(c)$, et $h(g^k(a)) = g^k(a) - g^{k+1}(a) \rightarrow 0$

Par unicité de la limite, $h(c) = 0$, ce qui est absurde.

On fait le même raisonnement si $h < 0$. On conclut donc
l'existence de $c \in [0,1], f(c) = g(c)$

Exercice 755: (Gabriel R)

On cherche les $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)^2 = \int_0^x (f^2 + f'^2) + 2024 \quad (*)$$

Analyse: Soit f vérifiant les hypothèses.

f est C^1 sur $\mathbb{R}$. En dérivant (*), il vient:

$$2f(x)f'(x) = f^2(x) + f'^2(x)$$

d'où $(f - f')(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, i.e. $f = f'$,

et donc $f = Ae^x$, $A \in \mathbb{R}$.

De plus, f vérifie (*): pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} A^2 e^{2x} &= \int_0^x (A^2 e^{2t} + A^2 e^{2t}) dt + 2024 \\ &= 2A^2 \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^x + 2024 = A^2 e^{2x} - A^2 + 2024. \end{aligned}$$

D'où $A^2 = 2024$, donc $A = \pm \sqrt{2024}$.

Synthèse: Les fonctions $x \mapsto \sqrt{2024} e^x$ et $x \mapsto -\sqrt{2024} e^x$ sont clairement solutions.

Exercice 718: (Balea)

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}_+)^3$, $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) \in [0, \frac{\pi}{2}]^3$.

Par l'inégalité arithmético-géométrique:

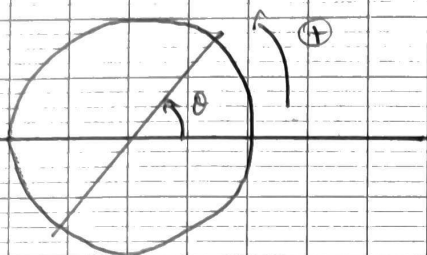
$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \left(\frac{1}{3} (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) \right)^3$$

De plus, par concavité du sinus sur $[0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\frac{1}{3} (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) \leq \sin \left(\frac{1}{3} (\alpha + \beta + \gamma) \right) = \frac{1}{2}$$

d'où $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}$

Exercice 693: (Hugo)



On se place dans un plan
quelconque des la Terre, dans le
référentiel géocentrique supposé galiléen.

$$\text{On pose } T : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\theta \mapsto T(\theta)$$

$$\text{et } \varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$$

$$\theta \mapsto T(\theta) - T(2\pi - \theta)$$

Soit $\theta_0 \in [0, 2\pi]$

• si $\varphi(\theta_0) = 0$, ok.

• Sinon, si $\varphi(\theta_0) > 0$

$$T(\theta_0) - T(2\pi - \theta_0) > 0,$$

$$\text{et donc } \varphi(2\pi - \theta_0) = T(2\pi - \theta_0) - T(\theta_0) < 0$$

Par le TVI,

$$\exists \theta_1 \in [0, 2\pi], T(\theta_1) = T(\theta_1 + 2\pi)$$

Exercice 678: (Zoe)

Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, de densité $\mathcal{C}^1$. $\int_0^1 f(r) e^r dr = \int_0^1 f(r) e^{-r} dr = 0$.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\int_0^1 \sinh(a+r) f(r) dr = \frac{1}{2} \int_0^1 f(r) e^r dr e^{ar} - \frac{1}{2} \int_0^1 f(r) e^{-r} dr e^{-ar} = 0$$

d'où le résultat.

Par l'absurde, supposons que f ne s'annule pas sur $]0, 1[$.

Alors, supposons $f \geq 0$ sur $]0, 1[$.

$$\text{On a } \underbrace{\int_0^1 f(r) e^r dr}_{\geq 0} = 0, \text{ donc } f(r) e^r = 0, \forall r \in]0, 1[$$

Ceci est absurde, donc f s'annule sur $]0, 1[$.

Par l'abondance, supposons que f ne s'annule qu'une fois,
en $a \in]0, 1[$.

+ Si f ne change pas de signe sur $]0, 1[$, on traite comme au
premier cas l'abondance.

+ Sinon, p.li., on suppose $f \leq 0$ sur $]0, a[$, et $f \geq 0$ sur $]a, 1[$.

$$\int_0^1 sh(r-x) f(x) dx = 0$$

Or, $sh(r-x) \leq 0$ sur $]0, a[$, et $f(x) \leq 0$ sur $]0, a[$,

$sh(r-x) > 0$ sur $]a, 1[$, et $f(x) \geq 0$ sur $]a, 1[$.

d'où $r \mapsto sh(r-x) f(x)$ est positive et continue,

donc $\forall r \in]0, 1[, sh(r-x) f(x) = 0$, abond.

D'où le résultat.

Exercice 675: (Lucas)

$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, décroissante, $\frac{f'(n)}{f(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$

a)

Pour n suffisamment grand, comme $f(n) \geq 0 \forall n \in \mathbb{R}^+$,

on a $f'(n) \leq 0$, donc f décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$f \in \mathcal{D}^1([n, n+1])$, donc $\exists c_n \in]n, n+1[$, par le TAF

$$\frac{f'(c_n)}{f(c_n)} = \frac{f(n+1) - f(n)}{f(c_n)} \quad \text{et} \quad f(n+1) \leq f(c_n) \leq f(n)$$

$$\text{Donc} \quad \frac{f(n+1) - f(n)}{f(c_n)} \geq \frac{f(n+1) - f(n)}{f(n+1)}$$

$$\text{Or,} \quad \frac{f'(c_n)}{f(c_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty, \quad \text{d'où} \quad 1 - \frac{f(n)}{f(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

$$\text{Ainsi,} \quad \frac{f(n+1)}{f(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

b) Par le critère de d'Alembert, elle converge.

Exercice 634: (Heldan)

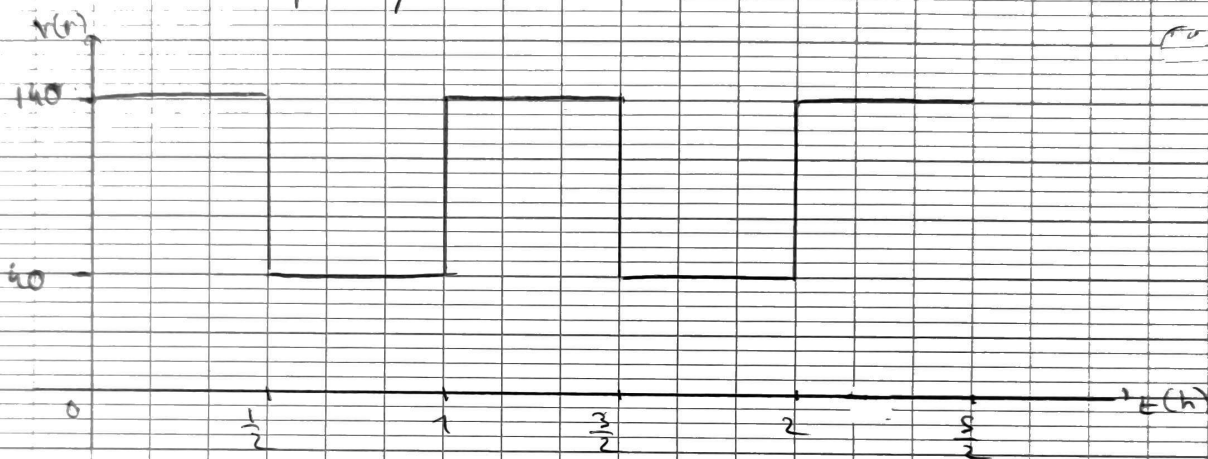
$$\forall x \in [0, \frac{3}{2}], \int_x^{x+1} v(t) dt = 30 \quad \text{où } v \text{ est la vitesse de la voiture dans le référentiel terrestre supposé galiléen}$$

On pose $f: x \mapsto \int_x^{x+1} v(t) dt$.

$$\forall x \in [0, \frac{3}{2}], f'(x) = v(x+1) - v(x) = 0$$

$$\Rightarrow v(x+1) = v(x),$$

d'où v est 1 période.



On pose
$$v(t) = \begin{cases} 140 & \text{sur } [0, \frac{1}{2}] \cup [1, \frac{3}{2}] \cup [2, \frac{5}{2}] \\ 40 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\forall x \in [0, \frac{3}{2}], \int_x^{x+1} v(t) dt = 30$$

$$\text{et } \int_0^{2,5} v(t) dt = 250.$$

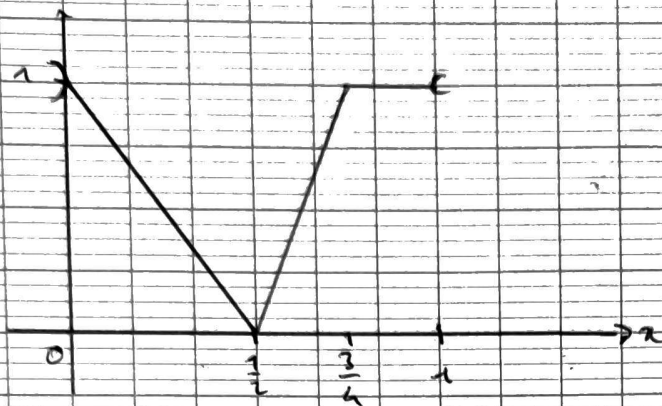
Exercice 661: (Sule)

a) $\exists ? f \in C^0([0,1], [0,1])$, f surjective ?

Par l'absurde, s'il en existe une, par le théorème des bornes atteintes, l'image de f serait un segment, d'où l'absurdité.

Il n'en existe pas.

b) $\exists ? f \in C^0([0,1], [0,1])$ surjective?



$$f(x) = \begin{cases} 1-2x & \forall x \in]0, \frac{1}{2}[\\ -2+4x & \forall x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

comment.

~~Exercice 682: (Lucas)~~

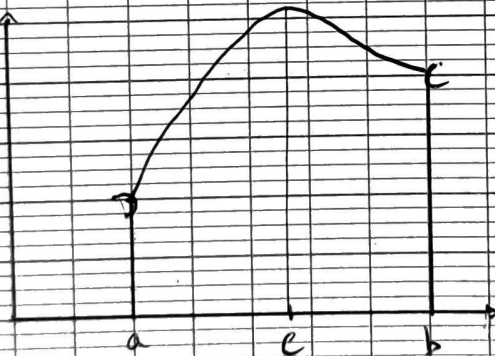
~~Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$~~

Exercice 682: (N. Fagebaume)

Par contraposée,

f pas monotone $\Rightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b,$

$f([a,b])$ n'est pas un intervalle ouvert.



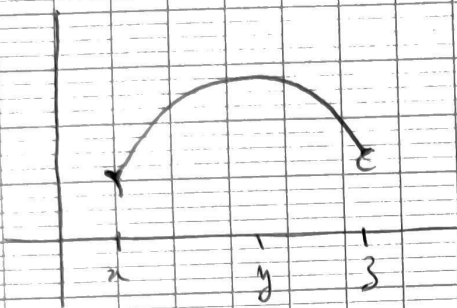
$$f([a,b]) =]f(a), f(c)]$$

f pas monotone $\Rightarrow \exists x < y < z,$

$$f(x) \leq f(z) < f(y) \text{ ou } f(z) \leq f(x) < f(y)$$

$$\text{ou } f(y) < f(x) \leq f(z) \text{ ou } f(y) < f(z) \leq f(x)$$

exli: $f(x) \leq f(z) \leq f(y)$.



Par $f([x, z])$ n'est pas un ouvert

sur $[x, z]$, TBA $\Rightarrow f$ admet un min en $c \in]x, z[$.

$f([x, z])$ est de la forme $[x, f(c)]$ ou $[f(c), x]$ qui ne sont pas des intervalles ouverts.
D'où le résultat.

Exercice 730: (Hugo)

$f \in \mathcal{D}([a, b], \mathbb{R})$. On pose

$$g: x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{et} \quad h: x \mapsto \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

$$g(a) = f'(a)$$

$$h(b) = f'(b).$$

$$f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}).$$

exli, on suppose $f'(a) \leq f'(b)$.

$$\forall x \in]f'(a), f'(b)[, \exists c \in [a, b],$$

$$f'(c) = x.$$

$$\text{soit } x \in [f'(a), f'(b)].$$

$$g(b) = h(a)$$

$$[f'(a), f'(b)] = [f'(a), g(b)] \cup [h(a), f'(b)]$$

$$\exists d \in [a, b], g(d) = x \text{ ou } h(d) = x$$

$$\text{si } g(d) = x$$

$$d = a \Rightarrow g(d) = f'(a) = x$$

$$g(d) = \frac{f(d) - f(a)}{d - a}$$

$$\text{TAF: } \exists c \in [a, b], f'(c) = \frac{f(d) - f(a)}{d - a} = x$$