

Exercice 595.

Soit E euclidien et p, q deux projecteurs orthogonaux. mq poq est diagonalisable.

a) Soit $u = poqop$.

mq $u \in \mathcal{J}(E)$.

Soit $(x, y) \in E^2$,

p, q orthogonaux $\Rightarrow p$ et q autoadjoints
 $((p, q) \in \mathcal{J}(E)^2)$.

$$\Rightarrow (u(x) | y) = (p(q(p(x))) | y)$$

$$= (q(p(x)) | p(y))$$

$$= (p(x) | q(p(y)))$$

$$= (x | p(q(p(y))))$$

$$= (u | u(y)) \Rightarrow \boxed{u \in \mathcal{J}(E)}$$

b) mq $sp(u) \subset [0, 1]$.

p projecteur orthogonal $\Rightarrow p \in \mathcal{J}^+(E)$

$$(\Leftrightarrow sp(p) = \{0, 1\} \subset \mathbb{R}^+)$$

q projecteur orthogonal $\Rightarrow q \in \mathcal{J}^+(E)$.

De plus, $\|p(x)\| \leq \|x\|$, $\forall x \in E$.

$$\|q(x)\| \leq \|x\|$$

$$\Rightarrow \|u(x)\| = \|poqop(x)\| \leq \|x\|$$

donc $\lambda \in sp(u) \Rightarrow |\lambda| \leq 1$.

mq $u \in \mathcal{Y}^+(E) \Rightarrow \forall n \in E, (u|n)|n) \geq 0$.

$$(u|n)|n) = (p \circ q \circ p|n)|n)$$

$$= (q \circ p|n)|p|n) \geq 0$$

car $q \in \mathcal{Y}^+(E)$.

ceci $\boxed{(p|u) \in [0,1]}$.

[c]

prop. $\mathcal{E}$ incliné.

F, G deux sous-espaces de E .

$$\Rightarrow (F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$$

démo $\left\{ \begin{array}{l} F \subset F+G \Rightarrow (F+G)^\perp \subset F^\perp \\ G \subset F+G \Rightarrow (F+G)^\perp \subset G^\perp \end{array} \right.$

$$\Rightarrow (F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$$

et, par $z \in F^\perp \cap G^\perp$, $(z|x+y) = (z|x) + (z|y)$

$\begin{array}{c} \swarrow \text{EF} \\ \searrow \text{EG} \end{array}$
 $\Rightarrow (x+y) \in F+G$

$= 0 + 0 = 0$

$$\Rightarrow z \in (F+G)^\perp$$

$$\Rightarrow F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$$

$$\underline{\text{CU}} \quad \boxed{(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp}$$

Où $(\text{Im } p + \text{Ker } q)^\perp = \text{Im } p^\perp \cap \text{Ker } q^\perp$

$$= \text{Ker } p \cap \text{Im } q$$

$\Rightarrow \text{Im } p + \text{Ker } q$ et $\text{Ker } p \cap \text{Im } q$ sont supplémentaires orthogonaux.

[d] m_q p_q est diagonalisable.

p_q stabilise $(\text{Im } p + \text{Ker } q) = F$

car $p_q(F) \subset \text{Im } p \subset F$.

et p_q stabilise $\text{Ker } p \cap \text{Im } q = G$

car $p_q(G) = \{0\} \subset G$.

$n \in G \Rightarrow p_q(n) = \begin{cases} p(n) & \text{car } n \in \text{Im } q \\ 0 & \text{car } n \in \text{Ker } p \end{cases}$

m_q p_q diagonalisable revient à $p_q|_F$ et $p_q|_G$ diagonalisables.

• $p_q|_G = 0_{\mathcal{L}(G)}$ donc diagonalisable.

• $p_q|_F$ avec $F = \text{Im } p + \text{Ker } q$.

$\text{Im } p$ est stable par $u = p \circ q \circ p$
et diagonalisable $\Rightarrow \exists$ base de vecteurs propres
de u de $\text{Im } p$ $(e_1, \dots, e_r)$ famille libre de F .
On complète $(e_1, \dots, e_r)$ en une base de F
avec des vecteurs de $\text{Ker } q$: $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_s)$

$\forall i \in [1, r], e_i \in \text{Im } p \Rightarrow p(e_i) = e_i$
 $\Rightarrow p_q(e_i) = p \circ q \circ p(e_i)$
 $= u(e_i)$
 $= \lambda_i e_i$
 $\Rightarrow e_i$ est un vecteur propre de p_q .

et par $e_{r+1}, \dots, e_s \in \text{Ker } q$,

$p_q(e_{r+1}) = \dots = p_q(e_s) = 0$

Donc $(e_1, \dots, e_s)$ base de F de vecteurs propres
de $p_q|_F \Rightarrow p_q|_F$ diagonalisable.

[cd. p_q diagonalisable].

Exercice 561. (Relyan)

Soit $A \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} B & L \\ \frac{L'}{L' \mid L} \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{Y}_m(\mathbb{R})$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A .
et $\mu_1, \dots, \mu_{m-1}$ de B .

tg $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ et $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_{m-1}$.

On pose $F_k = \text{vect}(X'_1, \dots, X'_k)$
avec $X'_k = \begin{pmatrix} X_k \\ 0 \end{pmatrix}$ et X_k vecteur propre
associé à μ_k .

dim $F_k = k$.

Théorème de Carrant-Fischer:

$$\max_{\substack{X \in F_k \\ X \neq 0}} \left(\frac{(AX|X)}{(X|X)} \right) = \lambda_k$$

$$0 \leq \forall X \in F_k, \quad \frac{(AX|X)}{(X|X)} = \frac{(BX'|X')}{(X'|X')}$$

$$\text{avec } X = \begin{pmatrix} X' \\ 0 \end{pmatrix} \in F_k$$

$$\Rightarrow \max_{\substack{X' \in \text{vect}(X_1, \dots, X_k) \\ X' \neq 0}} \left(\frac{(BX'|X')}{(X'|X')} \right) = \mu_k \geq \lambda_k \quad (\text{exo 558 question 1})$$

Carrant-Fisher

$$\max_{\dim W = k} \left(\min_{X \in W, X \neq 0} \lambda(X) \right) = \lambda_{n-k+1}$$

$$G_k = \text{vect}(X'_k, \dots, X'_n) \text{ avec } X'_i = \begin{pmatrix} X'_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dim G_k = n - k + 1$$

$$\min_{X \in G_k, X \neq 0} \left(\frac{(AX|X)}{(X|X)} \right) \leq \lambda_{k+1}$$

$$\forall X \in G_n \setminus \{0\}, X = \begin{pmatrix} X' \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{(AX|X)}{(X|X)} = \frac{(BX'|X')}{(X'|X')}$$

$$\min_{X \in \text{vect}(X_1, \dots, X_n)} \frac{(BX'|X')}{(X'|X')} \leq \lambda_{k+1}$$

$$\text{vect}(X_1, \dots, X_{k+1})^\perp$$

$$\mu_k \Rightarrow \mu_k \leq \lambda_{k+1}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n$$

Exercice 658. (Gabriel R.)

Soient $(f, g) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f \nearrow, g \nearrow$
 Soit $\lambda > 0$

$$\|mg \quad \exists! (u, v) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \lambda u + f(u+v) = \lambda v + g(v-u) = 0$$

Analyse

$$\text{Soit } (u, v) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \lambda u + f(u+v) = \lambda v + g(v-u) = 0.$$

$$\Rightarrow \lambda(u-v) + f(u+v) = g(v-u)$$

$$\text{On pose } n = u - v \Rightarrow \lambda n + f(n) = g(-n)$$

$$\Rightarrow (\lambda \text{id}_{\mathbb{R}} + f)(n) = \varphi(n)$$

$$\text{avec } \varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto g(-n) \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi$ est $\downarrow$ et C^0 .

or, $\lambda \text{id}_{\mathbb{R}} + f$ est C^0 et $\nearrow$ (car $\lambda > 0$)

Comme f est $\nearrow$, $f(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

$$\text{donc } \begin{cases} (\lambda \text{id}_{\mathbb{R}} + f)(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \\ (\lambda \text{id}_{\mathbb{R}} + f)(n) \xrightarrow[n \rightarrow -\infty]{} +\infty \end{cases}$$

$$\text{et } f(x) \not\rightarrow_{x \rightarrow \infty} -\infty \text{ car } \varphi \downarrow$$

$$f(x) \not\rightarrow_{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ car } \varphi \downarrow$$

$$\text{Soit } \phi = \lambda \text{id}_{\mathbb{R}} + f - \varphi \text{ str } \nearrow \text{ et } \text{co.}$$

$$\phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty \text{ et } \phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Comme ϕ est str $\nearrow$, par le corollaire du TVI, $\exists ! n \in \mathbb{R}$ tel q $\phi(n) = 0$.
 de $\lambda n + f(n) = g(-n)$

$$\text{De plus, } \begin{cases} \lambda n + f(n) = -\lambda v \\ f - \lambda n + g(-n) = -\lambda u \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = n - \frac{g(-n)}{\lambda} \\ v = -n - \frac{f(n)}{\lambda} \end{array} \right.$$

Synthese $(u, v) = \left(n - \frac{g(-n)}{\lambda}, -n - \frac{f(n)}{\lambda} \right)$
 avec n l'unique réel tq

$$\lambda n + f(n) = g(-n).$$

$$\text{On a } \lambda u + f(u-v) = \lambda n - \frac{\lambda g(-n)}{\lambda} + f(n - \frac{g(-n)}{\lambda} + n + \frac{f(n)}{\lambda})$$

$$\text{de } \lambda u + f(u-v) = \lambda n - \frac{g(-n)}{\lambda} + f(n + \frac{\lambda n + f(n) - g(-n)}{\lambda})$$

$$\underbrace{\lambda n + f(n) - g(-n)}_{=0}$$

$$= \lambda n - g(-n) + f(n) = 0.$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } \lambda v + g(v-u) &= -\lambda n - \lambda \frac{f(n)}{\lambda} + g\left(-n - \frac{f(n)}{\lambda} - \frac{g(n)}{\lambda}\right) \\
 &= -\lambda n - f(n) + g(-n) = 0.
 \end{aligned}$$

Exercice 679 (Laura)

Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue.
 Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = l$.

Soit $\varepsilon > 0$.

$\exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*} \forall n \geq \alpha, |f(n) - l| \leq \varepsilon$.

Soit $n > \alpha$,

$$\begin{aligned}
 \text{on a : } \frac{1}{n} \int_0^n f(t) dt - l &= \frac{1}{n} \left[\int_0^n f(t) dt - ln \right] \\
 &= \frac{1}{n} \left[\int_0^n (f(t) - l) dt \right]
 \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{n} \int_0^n f(t) dt - l \right| &\leq \frac{1}{n} \int_0^n |f(t) - l| dt \\
 &= \frac{1}{n} \underbrace{\int_0^\alpha |f(t) - l| dt}_{= \beta} + \frac{1}{n} \int_\alpha^n \underbrace{|f(t) - l|}_{\leq \varepsilon} dt \\
 &\leq \frac{1}{n} \beta + \frac{1}{n} \varepsilon (n - \alpha) \\
 &= \frac{1}{n} \beta + \varepsilon \underbrace{\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)}_{\leq 1}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{n} \int_0^n f(t) dt - l \right| \leq \frac{1}{n} \beta + \varepsilon$$

$$\text{avec } \frac{1}{n} \beta \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \exists \alpha' \in \mathbb{R}^{+*} \forall n \geq \alpha', \left| \frac{1}{n} \beta \right| \leq \varepsilon$$

et $\forall n > \max(d, d')$,

$$\left| \frac{1}{n} \int_0^n f(t) dt - l \right| \leq 2\varepsilon$$

$$\boxed{f(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{n} \int_0^n f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l}$$

valeur moyenne de f sur $[0, n]$

équivalent de Cesàro $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \Rightarrow v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$

moyenne arithmétique des $(n+1)$ premiers termes

Exercice 585 (Relya)

Soient $f_1, \dots, f_p$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ linéairement indépendantes.

On f combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_p$

$$\text{Ker } f \supset \text{Ker } f_1 \cap \dots \cap \text{Ker } f_p$$

Ⓜ On suppose disposer de $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^n$
t.q. $f = \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i$

Alors, $\forall x \in \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(f_i), \forall i \in \{1, \dots, p\}, f_i(x) = 0$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \bigcap_{i=1}^p \text{Ker } f_i \subset \text{Ker } f. \text{ ob.}$$

Ⓜ $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \exists a_i \in \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathbb{R}^n, f_i(u) = (a_i, u)$
et $\exists a \in \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathbb{R}^n, f(u) = (a, u)$
(caractérisation des formes linéaires d'un espace)
Supposons que $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } f_i \subset \text{Ker } f$.

$$\Rightarrow \forall n \in \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(f_i), f(n) = 0 = (n|a) \\ \Rightarrow n \perp a \\ \Rightarrow n \in a^\perp.$$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(f_i) \subset a^\perp.$$

$$\text{et } \text{vect}(a) \subset \left(\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(f_i) \right)^\perp$$

$$\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(f_i) = \text{vect}(a_{1, \dots, p})^\perp$$

$$a \in \text{vect}(a_{1, \dots, p}) \Rightarrow \exists (d_1, \dots, d_p) \in \mathbb{R}^p \text{ tq} \\ a = \sum_{i=1}^p d_i a_i$$

$$\forall n \in \mathbb{R}^n, f(n) = \left(\sum_{i=1}^p d_i a_i | n \right) = \sum_{i=1}^p d_i (a_i | n) \\ = \sum_{i=1}^p d_i f_i(n)$$

$$\Rightarrow f = \sum_{i=1}^p d_i f_i \Rightarrow f \text{ est comb linéaire des } f_i \\ (\text{on a supposé que } f \text{ était bien une forme linéaire}).$$

Exercice 662 (Korin).

$$f: n \mapsto e^{-n^2} \quad (C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}).$$

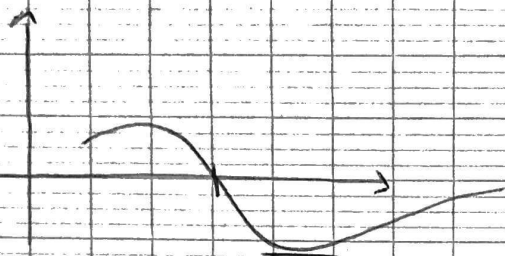
$$\boxed{a)} \text{ Soit } n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(n) = -2ne^{-n^2} \\ f^{(n)}(n) = -2e^{-n^2} - 4n^2e^{-n^2} \\ = (-2 - 4n^2)e^{-n^2}$$

$$(\text{Récurrence}) f^{(n+1)}(n) = P_n(n) \exp(-n^2) \\ - 2nP_n(n) \exp(-n^2) \\ = \exp(-n^2) [P_n(n) - 2nP_n(n)]$$

// polynôme
P_{n+1}(n)

$$P_{n+1}(x) = P_n'(x) - 2xP_n(x)$$

$$\text{B)} \begin{cases} f^{(n)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 & (\text{distance comparée}) \\ f^{(n)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 & (a) \end{cases}$$



Par théorème de Rolle $f^{(n+1)}$ admet
admet un nombre de zéro strictement
supérieur à celui de $f^{(n)}$.

Donc P_{n+1} admet strictement plus de
racine que P_n (ce sont des racines réelles)
En itérant, P_{n+1} a au moins $n+1$ racines.

$$\text{De plus, } \deg P_{n+1} = \deg P_n + 1$$

$$= \dots = n+1$$

$$(\text{car } \deg P_0 = 0$$

$$\deg P_1 = 1)$$

Donc P_{n+1} admet $n+1$ racines réelles.

Exercice 664 (Laura).

Déterminer les $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$,
 $2nf(n) = \int_0^n f(u) du$.

Analyse Soit une telle f .

$$\text{On pose } \forall n \in \mathbb{R}, F(n) = \int_0^n f(u) du$$

(T&I).

$f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par T&A.

et $\forall n \in \mathbb{R}, F'(n) = f(n)$.

$$\text{d'où } 2n f(n) = \int_0^n f(t) dt \Leftrightarrow 2n F'(n) = F(n)$$

$$\Leftrightarrow F'(n) - \frac{F(n)}{2n} = 0$$

• pour $n > 0 \Leftrightarrow F(n) = A e^{\frac{1}{2} \ln(n)} + \text{constante}$ avec $A \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(n) = F'(n) = \frac{A}{2n} e^{\frac{1}{2} \ln(n)} \text{ avec } A \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow f(n) = \frac{A}{2\sqrt{n}}$$

• pour $n < 0, F(n) = A' e^{\frac{1}{2} \ln(-n)}, A' \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow f(n) = -\frac{A'}{2n} \sqrt{-n} = -\frac{A'}{2\sqrt{-n}}$

$$f(n) = \begin{cases} \frac{A}{2\sqrt{n}}, & n > 0 \\ -\frac{A'}{2\sqrt{-n}}, & n < 0 \end{cases}$$

pas de recollent continu possible sauf
par $A = A' = 0$.

la seule f_x solution est donc $f = 0$.

Exercice 655 (Oscar).

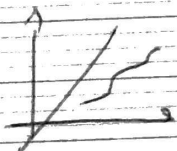
$$f: (0,1) \rightarrow (0,1) \rightarrow \text{Mg} \exists n \text{ tq } f(n) = n$$

• 1^{er} cas $f(0)$
 On pose $g(n) = f(n) - n$
 $g(0) \geq 0$
 $\rightarrow$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$
 par raisonnement
 Triv : $\exists n \in [0, 1], f(n) = n$

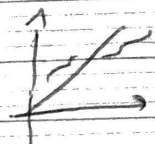
• 2^e cas $f \nearrow - (\text{cas } g \searrow)$



* Supposons $\forall n \in [0, 1], f(n) > n$
 $\forall (n, y), n > y \Rightarrow f(n) > f(y)$
 Soit $\varepsilon > 0, 1 - \varepsilon \leq f(1 - \varepsilon) \leq f(1) \leq 1$
 par $\varepsilon \rightarrow 0, 1 \leq f(1) \leq 1 \Rightarrow f(1) = 1$



* Supposons $\forall n \in]0, 1[, f(n) > n$,
 $\Rightarrow$ m raisonnement $f(0) = 0$



* Soit $n_0 \in]0, 1[$
 Soit $\alpha > 0$ tq
 $f(n_0 - \alpha) \geq n_0 - \alpha$
 $f(n_0 + \alpha) \leq n_0 + \alpha$
 $f(n_0 - \alpha) \leq f(n_0) \leq f(n_0 + \alpha)$
 $n_0 - \alpha \leq f(n_0) \leq n_0 + \alpha$
 $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow f(n_0) = n_0$

* Soit $A = \{n \in [0, 1], f(n) > n\}$

$f(n) \neq n, \forall n$
 $\begin{cases} 0 \in A \cap A \neq \emptyset \\ A \text{ bornée par 1} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Ajouter une borne
 sup -
 Choix $\alpha = \sup(A)$

1^{er} cas $\alpha \in A$: $f(\alpha) < \alpha$.

$\exists (u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $u_n \rightarrow \alpha$
et $f(u_n) > u_n, \forall n$.

$u_n < \alpha \Rightarrow f(u_n) < f(\alpha)$

Quand $u_n \rightarrow \alpha$, $\alpha \leq f(\alpha)$ contradiction
(passage à la limite) avec $\alpha \notin A$.

Donc $f(\alpha) = \alpha$.

2^{er} cas $\alpha \in A$: $\Rightarrow f(\alpha) > \alpha$.

$\alpha = \sup A$

$\alpha < 1$ donc $\forall n \in]\alpha, 1[\exists f(n) < n$

Quand $n \rightarrow \alpha^+$ $f(n) < f(\alpha) < n$

$\Rightarrow f(\alpha) < \alpha$ absurde

$\Rightarrow f(\alpha) = \alpha$

Exercice 608 (Macéo)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et A semblable à A^{-1} .

mq $\underbrace{\text{Tr}(A^2)}_{(1)} \geq n$ avec égalité $\Leftrightarrow$ (2) A est la matrice d'une symétrie orthogonale.

(1)

Théorème spectral : $A = P D P^T$ avec $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$
 $P \in GL_n(\mathbb{R})$
 $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

$A \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow d_1, \dots, d_n \neq 0$.

et $A \sim A^{-1} \Rightarrow \text{Sp}(A) = \text{Sp}(A^{-1})$

et $A^{-1} = P D^{-1} P^T$ avec $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/d_n \end{pmatrix}$

($A A^{-1} = P D P^T P D^{-1} P^T = I_n$)

$\forall i \in [1, n]$, attribue $j \in [1, n]$ unique

tq $d_i = \frac{1}{d_j}$ $\Rightarrow d_i d_j = 1$

D'autre part, $d_i^2 + d_j(\omega)^2 \geq 2d_j(\omega)d_i$

$$\text{Tr}(A^2) = \text{Tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n d_i^2$$

$$\begin{aligned} \text{et } \text{Tr}(A^2) &\geq \sum_{i,j=1}^n (2d_j(\omega)d_i - d_j(\omega)^2) \\ &\geq 2n - \sum_{i=1}^n d_j(\omega)^2 \end{aligned}$$

et, lorsque i parcourt $\{1, n\}$, j aussi.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Tr}(A^2) &\geq 2n - \text{Tr}(A^2) \\ \Rightarrow \boxed{\text{Tr}(A^2) \geq n} \end{aligned}$$

(2) égalité ssi $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\Leftarrow} \quad A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \quad \text{soit } A \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow A = A^{-1} = A^T$$

Donc $D^{-1} = D$

et $\forall i \in \{1, n\}, \frac{1}{d_i} = d_i \Rightarrow d_i \in \{-1, 1\}$

$$\Rightarrow \text{Tr}(A^2) = \text{Tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n d_i^2 = n \text{ ok.}$$

$$\boxed{\Rightarrow} \quad \text{On suppose } \text{Tr}(A^2) = n.$$

$$\Rightarrow d_i^2 + d_j(\omega)^2 = 2d_j(\omega)d_i$$

$$\Rightarrow (d_i - d_j(\omega))^2 = 0.$$

$$\Rightarrow d_i = d_j(\omega) = \frac{1}{d_i} \Rightarrow d_i \in \{-1, 1\}$$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/d_n \end{pmatrix} = D^{-1}.$$

$$A = A^T = A^{-1}$$

A est orthogonale

Soit $u_A \in \mathcal{E}(A) \hat{=} A$.

$$u_A \circ u_A = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$$

$$\rightarrow A^2 = I_n \text{ or } A^2 = A \circ A^{-1} = I_n$$

$\Rightarrow A$ est matrice d'une symétrie orthogonale

Exercice 599 (Kelyan)

[a] Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$.
 Montrer $\det(MM^T) \geq 0$.

$$\begin{aligned} (MM^T)^T &= MM^T \Rightarrow MM^T \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}) \\ \text{et } \forall X \in M_{n,n}(\mathbb{R}), X^T MM^T X &= \|M^T X\|^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow MM^T \in \mathcal{L}_n^+(\mathbb{R}) \\ &\Rightarrow \boxed{\det(MM^T) \geq 0} \text{ ok.} \end{aligned}$$

~~S. p.c.n. :~~

$$\begin{aligned} \forall X \in \text{Ker}(MM^T), MM^T X &= 0 \\ \Rightarrow X^T MM^T X &= 0 \\ \Rightarrow \|M^T X\|^2 &= 0 \\ \Rightarrow M^T X &= 0 \\ \Rightarrow X &\in \text{Ker}(M^T) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall i \in \{1, n\}, \sum_{k=1}^n m_{k,i} u_k = 0$$

$\in M_n(\mathbb{R})$

ou autre méthode $\text{rg}(MM^T) \leq p \leq n$
 $\Rightarrow MM^T$ non inversible
 $\Rightarrow \det(MM^T) = 0$.

$$b) A = (a_{ij}) \text{ avec } a_{ij} = \text{card}(A_i \cap A_j)$$

$$MM^T = \left(\sum_{k=1}^p m_{ik} m_{jk} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$\forall (i, j) \in \{1, n\} \times \{1, p\}, m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } b_j \in A_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(X = (b_1, \dots, b_p))$$

$$MM^T[i, j] = \sum_{k=1}^p \underbrace{m_{ik} m_{jk}}_{=1 \text{ si } b_k \in A_i \cap A_j}$$

$$= \text{card}(A_i \cap A_j)$$

$$\Rightarrow MM^T = A$$

$$\Rightarrow \det A \geq 0$$