

(567) $A \in \mathcal{Y}_m^{++}(\mathbb{R})$
 $B \in \mathcal{A}_m(\mathbb{R})$

Mq AB diagonalisable sur $\mathbb{C}$

On a vu B diagonalisable ds $\mathbb{C}$

$$\exists C \in \mathcal{Y}_m^{++}(\mathbb{R}) \text{ tq } A = C^2$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } AB &= C^2 B \\ &= C(CBC)C^{-1} \end{aligned}$$

AB semblable à CBC

$$\begin{aligned} \text{Or } (CBC)^T &= C^T B^T C^T \\ &= -CBC \end{aligned}$$

$\Rightarrow CBC \in \mathcal{A}_m(\mathbb{R})$ diagonalisable ds $\mathbb{C}$

CCU: AB diag- ds $\mathbb{C}$

(569) $\dim(E) = 3$
 $f, g \in \mathcal{O}(E)$

a) Mq 1 esp(f)

- $\dim(E) = 3$ impair $\rightarrow f$ admet des vp réelles
- $f \in \mathcal{O}(E) \rightarrow$ les vp réelles sont ± 1

1^{er} cas: f n'a qu'une vp réelle $\lambda = \pm 1$

les 2 autres racines de χ_f sont $\mathbb{C}$ conj $(\alpha + i\beta), (\alpha - i\beta)$

Or $\det(f) = 1$ $\lambda(\underbrace{\alpha - i\beta)(\alpha + i\beta)}_{>0} = 1 \Rightarrow \lambda = 1$
 $(f \in \mathcal{SO}(E))$

2^{ème} cas: χ_f a 3 racines réelles valant 1 ou -1

Or $\det(f) = 1 \Rightarrow 1 \in \text{sp}(f) \quad ((-1)^3 = -1 !)$

b) $1 \in \text{sp}(u) \Rightarrow$ on pose w un vecteur propre de f associé à 1.

$\left. \begin{array}{l} f \text{ stabilise } \text{Vect}(w) \\ f \in \mathcal{O}(E) \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ stabilise } \text{Vect}(w)^\perp$

Soit $g: \text{Vect}(w)^\perp \rightarrow \text{Vect}(w)^\perp$ l'endo induit

fonctionne la norme $\Rightarrow g$ aussi

$g \in \mathcal{O}(\text{Vect}(w)^\perp)$

De plus ds une BON $= (e_1, e_2, w)$, $\text{mat}(f) = \begin{bmatrix} \text{mat}(g) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\det(f) = \det(g) \times 1 = 1 \Rightarrow \det(g) = 1$ donc $g \in \mathcal{SO}(\text{Vect}(w)^\perp)$

Donc $\exists$ BON de $\text{Vect}(w)^\perp$ (u, v) tq $\text{mat}_{(u,v)}(g) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

c) $\exists x \neq 0$ tq $f(x) = g(x) = x$

On pose $w = \frac{x}{\|x\|}$

Soit (u, v) une BON de $\text{Vect}(w)^\perp$

$$\text{mat}_{(u,v)}(-h) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = R(\theta)$$

$$\text{mat}_{(u,v)}\left(g \begin{pmatrix} \text{Vect}(w)^\perp \\ \text{Vect}(w)^\perp \end{pmatrix}\right) = R(\alpha) \quad (g \in \text{SO}(E))$$

$$\text{On a aussi } R(\theta)R(\alpha) = R(\alpha)R(\theta) = R(\alpha + \theta)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{f-à-g commutent sur Vect}(w) \\ \text{sur Vect}(w)^\perp \end{array} \right\} \Rightarrow \text{f-à-g —}$$

d) (i) hyp: $f \circ g = g \circ f$
 g stabilise les $\text{supp de } f$

Soit $x \neq 0$ $\cap$ $f(x) = x$

1er cas: $\dim E_1(f) = 1$

$\Rightarrow g$ stabilise $\text{Vect}(x)$

$$\Rightarrow x \text{ vect p de } g \Rightarrow \begin{cases} g(x) = x \\ \text{ou} \\ g(x) = -x \end{cases}$$

si $g(x) = x$ ok

si $g(x) = -x \Rightarrow -1 \in \text{sp}(g)$

$$\Rightarrow \text{sp}(g) = \{1, -1, -1\}$$

$$\dim(E_1(g)) = 1$$

f stabilise $E_1(g) = \text{Vect}(g)$

$$\Rightarrow f(g) = -g$$

Soit $z \in \text{Vect}(z) = \text{Vect}(x, y)^\perp$

$\text{Vect}(x, y)$ stable par f et g
 $\Rightarrow \text{Vect}(y)$

$\Rightarrow f(z) = -z$
 $g(z) = -z$

$$\begin{cases} f(x) = x & g(x) = -x \\ f(y) = -y & g(y) = y \\ f(z) = -z & g(z) = -z \end{cases}$$

f symétrique orthogonale
 $\% \text{Vect}(x)$ $\rightarrow \text{Vect}(y)$
avec $\text{Vect}(x) \perp \text{Vect}(y)$

2^{ème} cas: $\dim(E_1/f) = 2$

$\Rightarrow 1$ valeur $\neq 2$

$\Rightarrow$ les vp de f sont réelles

$\Rightarrow 1$ seul vp de f ($\det(f) = 1$)

$\Rightarrow f = \text{id}_E$

Soit x vect p de g associé à 1

$\Rightarrow f(x) = g(x) = x$

(612) $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow A$ diagonalisable de BON $(x_1 \rightarrow x_n) = \mathcal{B}$

a) cf cours

$(\lambda_1 \rightarrow \lambda_n)$ valeurs propres associées

b) $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

à $(x_1 \rightarrow x_n)$

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, ABx_i + \underbrace{Bx_i}_{- \lambda_i x_i} = 0$

$\Leftrightarrow ABx_i = -\lambda_i Bx_i$

de Bx_i vecteur propre associé à vp $-\lambda_i < 0$

(car $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$)

$\Rightarrow Bx_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$BX_i = 0 \quad \forall X_i \in B \text{ base de } \mathbb{R}^n$$

$$B = 0$$

$$c) \quad \begin{cases} AB = -BA \\ A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{cases} \Rightarrow AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & -I_{n-1} \end{array} \right]$$

$$B = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \cdots 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \cdots 1 \\ \hline -1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\textcircled{620} \quad s \mid \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^3 \end{array}$$

$\nexists M_q$ s est bij

(s n'est pas lin)

↳ il faut montrer l'inject et la surj $\emptyset \text{ Ker}(s) = \dots$

surj:

$$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

M est diagonalisable ds $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \quad M = P D P^T$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt[3]{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[3]{\lambda_n} \end{bmatrix}}_{D'}^3$$

$$M = P D^3 P^T = P D'^3 P^{-2}$$

$$= (P D' P^{-1})^3$$

$\Rightarrow s$ surj

$$\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ car } (P D P^T)^T = P (P D)^T = P D' P^T$$

inj: M_q cet antécédent est unique
 $E = \mathbb{R}^m = E_{\lambda_1}(M) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}(M)$

Soit $N \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R})$, $N^3 = M$

Soit v l'ECA à N

$u \xrightarrow{\quad} M$

$$v^3 = u \Rightarrow v^4 = u \circ v = v \circ u$$

u et v commutent donc v stabilise
 les $\text{sup de } u$

Soit $i \in \{1, n\}$, $v_i = v|_{E_{\lambda_i}(u)}$

$$u_i = u|_{E_{\lambda_i}(u)}$$

$N \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R})$ donc v diagonalisable
 $\Rightarrow v_i$ diagonalisable

$\mu \in \text{sp}(v_i)$, x vpr associé à μ

$$v^3(x) \stackrel{u_i(x)}{=} \mu^3 x = \lambda_i x$$

$$\Rightarrow \mu^3 = \lambda_i \quad \mu = \sqrt[3]{\lambda_i} \text{ unique}$$

$$\Rightarrow v_i = \sqrt[3]{\lambda_i} \text{ id}_{E_{\lambda_i}(u)}$$

v est det sur $E_{\lambda_i}(u)$ $\forall i \in \{1, n\}$

$\Rightarrow v$ est unique

d'où s est bij.

564 $\begin{cases} A \in M_n(\mathbb{R}) \\ u \text{ l'ECA } \hat{=} A \\ v \hat{=} A^T \end{cases}$

(i) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \underbrace{(u(x)|y)}_{(AX)^T Y} = \underbrace{(x|v(y))}_{X^T A^T Y}$

$X = \text{word de } x \text{ ds BC}$
 $Y = \text{word de } y \text{ ds BC}$

$(AX)^T Y$
 $X^T A^T Y$

(ii) $\Rightarrow y \in F^\perp, \forall x \in F, \underbrace{\langle u(x)|y \rangle}_{\substack{\in F \\ \text{(stable par } u)}} = \underbrace{\langle x|v(y) \rangle}_{\in F^\perp} = 0$

$\Leftarrow x \in F, \forall y \in F^\perp, \underbrace{\langle u(x)|y \rangle}_{\in F} = \underbrace{\langle x|v(y) \rangle}_{\in F^\perp} = 0$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (X-1)(X^2 - 1)$

1 est la seule valeur propre de A

Déterminons $E_1(u)$

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_1(u), AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = x \\ x = y \\ y = z \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = y = z$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = \lambda(1, 1, 1)$

Donc $E_1(u) = \text{Vect}(1, 1, 1) = \Delta$

$\chi_{A^T}(X) = \chi_A(X)$ donc $1 \in \text{sp}(A^T)$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determiner $E_1(v)$

$$A^T X = X \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = x \\ -x+z = y \\ x=z \end{cases} \Leftrightarrow y = z - z = 0$$

$$E_1(v) = \text{Vect}(1, 0, 1)$$

On sait que $E_1(v)^\perp$ est stable par A (ii)

$$\mathcal{P} = E_1(v)^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x+z=0\}$$

$$\text{Mq } \mathcal{P} \cap \Delta = \{0\} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{P} \cap \Delta \quad \begin{cases} x+z=0 \\ x=y=z \\ x=-x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$E = \underbrace{\mathcal{P}}_{\dim 3} \oplus \underbrace{\Delta}_{\dim 2} \quad \dim 1$$

Soit F stable par A :

cas 1: $\dim(F) = 0 \rightarrow F = \{0\}$ OK

cas 2: $\dim(F) = 3 \rightarrow F = E$ OK

cas 3: $\dim(F) = 1$

F est une droite stable $\Rightarrow F$ droite propre $F = \Delta$

cas 4: $\dim(F) = 2$

cas 4.1: $F \cap \mathcal{P} = \{0\}$

(Grassmann) $\dim(F \oplus \mathcal{P}) = 4 > 3$ Impossible

cas 4.2: $\dim(F \cap \mathcal{P}) = 1$

$\dim(F \cap \mathcal{P}) = 1$ $F \cap \mathcal{P}$ droite propre de $F \cap \mathcal{P} = \Delta$
IMPOSSIBLE car $\Delta \cap \mathcal{P} = \{0\}$

cas 4.3: $\dim(F \cap \mathcal{P}) = 2 \quad F = \mathcal{P}$

566 ^{sym:} a) $\langle X|Y \rangle = \langle AX|Y \rangle_{\text{can}} = \langle Y|AX \rangle_{\text{can}} = \langle Y|X \rangle$

bilin: $\text{form}(\lambda, X, Y, Z) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3)^3$

$$\begin{aligned}\langle \lambda X + Y | Z \rangle &= (\lambda X + Y)^T A Z \\ &= \lambda X^T A Z + Y^T A Z \\ &= \lambda \langle X | Z \rangle + \langle Y | Z \rangle\end{aligned}$$

sym + lin a.g. $\rightarrow$ lin a.d.

$$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{R}^n, X^T A X \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \langle X | X \rangle \geq 0$$

$$\langle 0 | 0 \rangle = 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \langle X | X \rangle > 0$$

$$\text{donc } \langle X | X \rangle = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathbb{R}^n}$$

b) $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ tq $A = B^T B \Rightarrow A^{-1} = B^{-1} B^{-T}$

$$A^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), (B^{-1} B^{-1T})^T = B^{-1} B^{-1T}$$

$$\exists C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ tq } A^{-1} = C^2 \Rightarrow C \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$$

$$A^{-1} B = C C B$$

$$= C \underbrace{C B C^{-1}}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$$

$A^{-1} B$ semblable à $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
donc diagonalisable de $\mathbb{R}$.

600 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente : $\exists p \in \mathbb{N}, A^p = 0$

$$\underbrace{A^T A}_B = A A^T$$

$$B^T = (A^T A)^T = A^T A = B \Rightarrow B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

B diagonalisable

$$B^2 = A^T A A^T A = (A^T)^2 A^2$$

$$B^h = (A^T A)^h = (A^T)^h A^h$$

$$B^p = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B \text{ diagonalisable} \\ B^p = 0 \end{array} \right. \Rightarrow B = 0$$

$$A^T A = 0 \Rightarrow A = 0$$

b) $A \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente

$$N_A = X^m \underset{\text{TCH}}{\Rightarrow} A^m = 0$$

$$c) \phi : \begin{array}{l} M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ M \rightarrow M^3 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} A^{n-1} \neq 0 \\ A^n = 0 \end{array}$$

Par l'absurde : $B^3 = A \Rightarrow B^{3n} = 0 \Rightarrow B$ nilpotente

$$A^{(n-1)} = B^{3(n-1)} \neq 0 \quad B^n = 0$$

$$\text{ABSURDE} \quad \underline{\text{si}} \quad 3(n-1) \geq n$$

$$2n \geq 3$$

$$n \geq \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{642} \quad B \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\|B\| = \sup \{ \|Bx\| ; x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1 \}$$

$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \quad \nabla \quad \|A\| \leq \text{tr}(A)$$

▷ Soit $X \in \mathbb{R}^n$, $\|X\|=1$

$$\text{sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

$$E_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}(A)$$

X se décompose: $X = x_1 E_1 + \dots + x_n E_n$ où $(E_1, \dots, E_n)$ BON de vecteurs propres de

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \quad (\|X\|=1)$$

$$AX = \lambda_1 x_1 E_1 + \dots + \lambda_n x_n E_n$$

$$\|AX\|^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i x_i)^2$$

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

$$\leq \lambda_n^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_n^2$$

↑
valeur propre maximale

Donc $\|AX\| \leq \lambda_n \leq \text{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$

b) $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \quad t \mapsto B(t)$ $\text{tr}(B'(t)) \leq -\text{tr}(B(t))$

On pose $B(t) = (a_{ij}(t))_{i,j}$

donc $B'(t) = (a'_{ij}(t))_{i,j}$

$$\begin{cases} \text{tr}(B(t)) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}(t) \\ \text{tr}(B'(t)) = \sum_{i=1}^n a'_{i,i}(t) \end{cases}$$

$$f: t \rightarrow \text{Tr}(B(t))$$

$$\forall t, f'(t) = \text{Tr}(B'(t))$$

$$\text{On a: } f'(t) \leq -f(t)$$

$$B(t) \in \mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{Tr}(B(t)) = f(t) \geq 0$$

Donc $f' \leq 0$ donc f est décroissante.

$$\text{Donc } f \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} l$$

$$\|B(t)\| \leq f(t)$$

$$\text{Mq } f(t) \rightarrow 0$$

$$\text{Pour } t \in \mathbb{R}, \exists c_t \in]0, t[, f'(c_t) \stackrel{\text{TAF}}{=} \frac{f(t) - f(0)}{t}$$

$$\Leftrightarrow f(t) = t f'(c_t) + f(0)$$

$$\text{Or, } \forall t, f'(t) \leq -f(t) \leq -l$$

$$f(t) \leq -lt + f(0)$$

Donc si $l > 0$, $f(t) \leq 0$ pour t assez grand
 $\hookrightarrow$ ABSURDE

$$\text{Donc } f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{Donc } \|B(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$B(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

(542) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de $\text{sp}(A) \subset \mathbb{R}$

$\nexists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq A et B sont semblables

$B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $\text{sp}(B) \subset i\mathbb{R}$

• Si A et B semblables, $\text{sp}(A) = \text{sp}(B) \subset i\mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \{0\}$

Donc A et B nilpotentes

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A = 0$ car dans $\mathbb{R}$

(A symétrique et $\nexists$ de matrice nilpot non nulle diagonalisable)

B semblable à $A \Rightarrow B = 0$

(581) a) Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times E^2$

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= \langle a | \lambda x + y \rangle b + \langle b | \lambda x + y \rangle a \\ &= \lambda \langle a | x \rangle b + \langle a | y \rangle b + \lambda \langle b | x \rangle a + \langle b | y \rangle a \\ &= \lambda f(x) + f(y) \end{aligned}$$

$\forall x \in E, f(x) \in E \Rightarrow f$ endomorphisme de E .

• Soit $x \in \text{Ker}(f)$

$$\langle a | x \rangle b + \langle b | x \rangle a = 0_E$$

$$(a, b) \text{ libre} \quad \mu a + \lambda b = 0 \Rightarrow \mu = \lambda = 0$$

$$\begin{cases} \mu = \langle a | x \rangle \\ \lambda = \langle b | x \rangle \end{cases}$$

$$x \in \text{Ker}(a)^\perp \cap \text{Vect}(b)^\perp = \text{Vect}(a, b)^\perp$$

$$M_q f \in \mathcal{G}(E)$$

$$\begin{aligned} \langle f(x) | y \rangle &= \langle \langle a | x \rangle b + \langle b | x \rangle a | y \rangle \\ &= \langle a | x \rangle \langle b | y \rangle + \langle b | x \rangle \langle a | y \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x | f(y) \rangle &= \langle x | \langle a | y \rangle b + \langle b | y \rangle a \rangle \\ &= \langle x | b \rangle \langle a | y \rangle + \langle x | a \rangle \langle b | y \rangle \\ &= \langle f(x) | y \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Dunc: } \text{Im}(f) = \text{Vect}(a, b) \quad (\text{et } f \in \mathcal{G}(E))$$

$$b) f \in \mathcal{G}(E) \Rightarrow \begin{array}{l} \text{th. spectral} \\ f \text{ diagonalisable} \end{array}$$

Soit λ valeur propre réelle de f et x vecteur propre associé.

• 0 valeur propre d'ordre $n-2$ ($\dim(\text{Ker}(f)) = n-2$)

$$\text{Soit } u = \begin{pmatrix} |_{\text{Im}(f)} \\ |_{\text{Im}(f)} \end{pmatrix}$$

$$M = \text{mat}_{(a,b)}(u) = \begin{bmatrix} \langle b | a \rangle & \|b\|^2 \\ \|a\|^2 & \langle a | b \rangle \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$$

$$\chi_M = X^2 - 2\langle a | b \rangle X + \langle a | b \rangle^2 - \|a\|^2 \|b\|^2$$

$$\begin{aligned} \text{de discriminant } \Delta &= 4\langle a | b \rangle^2 - 4\langle a | b \rangle^2 + 4\|a\|^2 \|b\|^2 \\ &= 4\|a\|^2 \|b\|^2 > 0 \quad \text{car } (a, b) \text{ libres} \end{aligned}$$

$$\lambda_{\pm} = \langle a | b \rangle \pm \|a\| \|b\|$$

$$\text{Sp}(f) = \left\{ 0, \underbrace{\langle a | b \rangle + \|a\| \|b\|}_{\lambda_1}, \underbrace{\langle a | b \rangle - \|a\| \|b\|}_{\lambda_2} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(M - \lambda_1 I_2) &= \text{Ker} \begin{pmatrix} -\|a\|\|b\| & \|b\|^2 \\ \|a\|^2 & -\|a\|\|b\| \end{pmatrix} \\ &= \text{Vect} \begin{pmatrix} -\|b\| \\ +\|a\| \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Ker}(M - \lambda_2 I_2) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -\|a\| \\ +\|b\| \end{pmatrix}$$

610

$$A \in M_n(\mathbb{R}), B = \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(B^{2h}) = 2n, \forall h \in [1, n]$$

$$\nabla A \in O_n(\mathbb{R})$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} A^T A & 0 \\ 0 & A A^T \end{bmatrix}$$

$$B^4 = \begin{bmatrix} A^T A A^T A & 0 \\ 0 & A A^T A A^T \end{bmatrix}$$

$$\forall h \in [1, n], B^{2h} = \begin{bmatrix} (A^T A)^h & 0 \\ 0 & (A A^T)^h \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(B^{2h}) &= \text{tr}((A^T A)^h) + \text{tr}((A A^T)^h) \\ &= 2 \text{tr}((A^T A)^h) \\ &= 2n \end{aligned}$$

$$\forall h \in [1, n], \text{tr}((A^T A)^h) = n$$

On avait vu que A nilpot $\Leftrightarrow \text{tr}(A^n) = 0$

$$\text{tr}((A^T A - I_m)^n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|A^T A - I_m\| = 0$$