

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) \leq f'(y)}$$

Exercice 555:

a) $\langle e_i + e_j \mid e_i - e_j \rangle = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 0 \quad (B \text{ or } N)$

b) On sait que $\langle e_i + e_j \mid e_i - e_j \rangle = 0$

Donc $\langle f(e_i + e_j) \mid f(e_i) - f(e_j) \rangle = 0$

D'où $\|f(e_i)\|^2 - \|f(e_j)\|^2 = 0$

$$\Rightarrow \|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$$

c) Soit $u \in E$,

$$u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$$

Alors, $f(u) = u_1 f(e_1) + \dots + u_n f(e_n)$

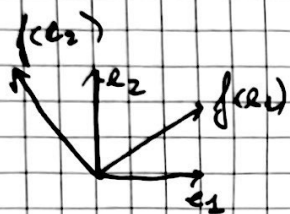
On a $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2$

Donc $\|f(u)\|^2 = \langle f(u) \mid f(u) \rangle$

$$= \sum_{i=1}^n u_i^2 \times \underbrace{\|f(e_i)\|^2}_{= \lambda^2}$$

$$= \lambda^2 \|u\|^2$$

D'où $\|f(u)\| = \lambda \|u\|$



Suppose $g: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} f(x)$

On $\forall (i, j) \in \{1, 2\}^2,$

$$i \neq j \Rightarrow \langle g(e_i) | g(e_j) \rangle = 0$$

$$\text{si } i = j : \langle g(e_i) | g(e_j) \rangle = \frac{\|f(e_i)\|^2}{2} = 1$$

Donc $g \in \mathcal{O}(E)$

ie $f = \sqrt{2} \text{id} \circ g$

Exercice 607:

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ $\mu_2 t_2(AB) \leq t_2 A^2 + t_2 B^2$

On a $A^T = A$ et $B^T = B$

Alors, $\|t_2(AB)\| \leq \sqrt{\text{tr}(A^2) \text{tr}(B^2)}$

$$\leq \frac{t_2(A^2) + t_2(B^2)}{2} \quad (\text{Ineq. A-G})$$

Exercice 653 :

Soit F sev de E préhilbertien réel

$$N_1 = \{x \in E, \forall f \in F, (x|f) \leq (f|f)\} = F^\perp$$

On appelle N_1 l'ensemble.

Soit $x \in N_1$.

$$\text{Soit } f \in F : N_1(x|f) = 0$$

$$\text{cas 1 : } f = 0_E \text{ alors } (x|f) = 0$$

$$\text{cas 2 : } f \neq 0_E$$

$$\text{on suppose } (x|f) \leq 0$$

$$\text{On pose } f' = -f,$$

$$0 \leq (x|f') \leq (f'|f')$$

$$\text{On pose } b \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{f}{2^k} \in F$$

$$\text{Donc } 0 \leq (x | \frac{f}{2^k}) \leq (\frac{f}{2^k} | \frac{f}{2^k})$$

$$\text{Alors } 0 \leq (x|f) \leq \frac{1}{2^k} (f|f)$$

$$\text{Par encadrement lorsque } k \rightarrow +\infty, \quad (x|f) = 0$$

$$\text{Donc } x \in F^\perp \quad \text{donc } (x|f') = -(x|f) = 0.$$

~~Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$,~~

$$\langle x | \frac{x}{2} \rangle \leq \langle \frac{x}{2} | \frac{x}{2} \rangle$$

$$\rightarrow \underbrace{\langle x | x \rangle}_{>0} \leq \frac{1}{2} \underbrace{\langle x | x \rangle}_{>0}$$

~~En ce qui est impossible donc $x \in F^\perp$~~

Confusion

Supplémentaire/

Complémentaire

$$\text{Soit } x \in E, \quad x = \underbrace{y}_{F^\perp} + \underbrace{z}_F$$

$$\text{Alors } \langle x | \frac{z}{2} \rangle = \langle z | \frac{z}{2} \rangle \leq \langle \frac{z}{2} | \frac{z}{2} \rangle$$

$$\text{Alors } \langle z | z \rangle \leq \frac{1}{2} \langle z | z \rangle \Rightarrow z = 0_E$$

Donc $x \in F^\perp$.

Exercice 544:

a) cf cours

b) cf cours (contre-exemple)

c) Soit $p \neq 0$ alors $\text{Im } p \neq \{0_E\}$

$$\text{Or, } \text{Ker } p \perp \text{Im } p \Leftrightarrow \forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in E \setminus \{0_E\}, \frac{\|p(x)\|}{\|x\|} \leq 1$$

et on a l'égalité pour $x \in \text{Im } p \setminus \{0_E\}$.

Exercice 565:

On considère $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tq $\forall (x, y) \in E^2, (f(x), y) = (x, g(y))$

a) Soit $x \in \text{Ker } f$ on a $f(x) = 0$

$$\text{Donc } \forall y \in E, (f(x) | y) = 0$$

$$\text{Donc } (x | g(y)) = 0$$

Ainsi, $x \in \text{Im } g^\perp$ soit $\forall x \in \text{Ker } f \subset (\text{Im } g)^\perp$

$$\text{On a donc } (\text{Im } g)^{\perp\perp} = \text{Im } g \subset \text{Ker } f^\perp$$

$$\text{On trouve de même } \text{Ker } g \subset \text{Im } f^\perp$$

Or $\dim E = n$ et par le th. du rang:

$$\text{rg}(g) + \dim \text{Ker } g = n$$

$$\dim \text{Ker } f^\perp + \dim \text{Im } f^\perp = n$$

$$\text{Or, par ce qui précède, } \begin{cases} \text{rg}(g) \leq \dim \text{Ker } f^\perp \\ \dim \text{Ker } g \leq \dim \text{Im } f^\perp \end{cases}$$

$$\text{Donc } \boxed{\begin{cases} \text{Im } g = \text{Ker } f^\perp \\ \text{Ker } g = \text{Im } f^\perp \end{cases}}$$

2) M_f F stable par $f \iff F^\perp$ stable par g

$\Rightarrow$ Soit $y \in F^\perp$, $\forall x \in F$, on a:

$$(g(y) | x) = \left(\underset{\substack{\downarrow \\ \in F^\perp}}{y} \mid \underset{\substack{\downarrow \\ \in F}}{f(x)} \right) = 0$$

$\Leftarrow$ Soit $x \in F$,

$$(f(x) | y) = \left(\underset{\substack{\downarrow \\ \in F}}{f(x)} \mid \underset{\substack{\downarrow \\ \in F^\perp}}{g(y)} \right) = 0$$

Donc $f(x) \in (F^\perp)^\perp = F$.

Exercice 554:

1) $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, $m_f: I_n + A$ et $A - I_n$ sont inversibles
 $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ donc A diagonalisable et $\text{sp}(A) \subset i\mathbb{R}$

Ainsi, $A = P \begin{bmatrix} i\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i\lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$ avec $\lambda_k \in \mathbb{R}$
 $\forall k \in \{1, \dots, n\}$.

On a donc $A + I_n = \underbrace{P}_{\substack{\in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \\ \text{Mat}_n(\mathbb{R})}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1+i\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1+i\lambda_n \end{bmatrix}}_{\in \text{GL}_n(\mathbb{C})} P^{-1}$

$$I_n + A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$$

$$\text{Donc } I_n + A \in GL_n(\mathbb{R})$$

$$\underline{2)} \text{ On pose } M = (A + I_n)^{-1} (I_n - A)$$

$$M_q : M \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}).$$

Montrons d'abord que $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

$$M^T = (I_n - A)^T (A + I_n)^{-1T}$$

$$= (I_n + A) (I_n - A)^{-1}$$

$$= (I_n - A)^{-1} (I_n + A)$$

$$\text{Donc } M^T M = I_n.$$

$$M_q \quad \det M = 1 : \quad \det M = \frac{\det(I_n - A)}{\det(I_n + A)}$$

$$\text{Donc } \det M = \frac{\det (I_n + A)^T}{\det(I_n + A)} = 1$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{M \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})}$$

3) ~~$M \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$~~

$$0 \quad \cdot \quad I_n + M = (A + I_n)^{-1} (I_n - A) + I_n$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } (I_n + M) (A + I_n) &= I_n - A \\ &\quad + A + I_n \\ &= 2I_n \end{aligned}$$

Donc $I_n + M$ inversible.

Variante pour la 1) :

Si $I_n + A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors $X \in \text{Ker}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$(I_n + A)X = 0$$

$$\Rightarrow AX = -X \quad \text{d'où} \quad \underbrace{X^T AX}_{=0} = -\underbrace{X^T X}_{=\|X\|^2}$$

$$\text{car } A \in \text{Ker}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \|X\|^2 = 0$$

$$\text{d'où } X = 0 \Rightarrow I_n + A \text{ inversible.}$$

4) $A = (I_n + M)^{-1} (I_n - M)$

$$\text{Donc } (I_n + M)A = I_n - M$$

$$\text{D'où } \left[I_n + (A + I_n)^{-1} (I_n - A) \right] A$$

$$= I_n - (A + I_n)^{-1} (I_n - A)$$

$$\Leftrightarrow (A + I_n)A + (I_n - A)A$$

$$= I_n + A - (I_n - A) = 2A$$

On a donc $2A = 2A$ donc le reste des équivalences est vrai.

5) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\Phi(A) = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$

Ng Φ réalise une bij de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\{O_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \text{sp}(M)\}$

Symétrie:

$$M = P \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \\ & & & & \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \end{bmatrix} P^{-1}$$

Alors $\det M = 1$ donc $M \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$.

Posez $A = (I_n + M)^{-1} (I_n - M)$

Ng $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$A^T = (I_n - M^{-1}) (I_n + M^{-1})^{-1}$$

Donc $A^T (I_n + M^{-1}) = (I_n - M^{-1})$

D'où $A^T (M + I_n) = M - I_n$?

Alors $A^T = - (I_n + M)^{-1} (I_n - M) = -A$

Donc $\boxed{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

Avec les calculs précédents : $\Phi(A) = M$.

$\Rightarrow$ surj.

injectivité:

$$\text{Si } M = (A + I_n)^{-1} (I_n - A)$$

$$\text{Alors d'après 4, } A = (I_n + M)^{-1} (I_n - M)$$

Donc A est défini de façon unique

d'où Φ inj.

Exercice 622:

Soient A_1, A_2 symétriques.

$$\text{Mq: (i) } A_1 A_2 = t_2 A_1 \iff \text{(ii) } A_1 A_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$



$$\text{(iii) } \exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } P^T A_1 P \text{ et } P^T A_2 P \text{ diagonales}$$

$$\text{(ii)} \Rightarrow \text{(i)}$$

$$(A_1 A_2)^T = A_1 A_2 \quad \text{pu hypothèse}$$

$$= A_2^T A_1^T$$

$$= A_2 A_1 \quad \text{car symétriques}$$

Donc A_1 et A_2 commutent.

(i) $\rightarrow$ (iii) Soit $u \in \text{ECT} \tilde{A}_1$, $v \in \text{ECT} \tilde{A}_2$

$$\text{sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

Par le th spectral: $E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^r F_i$

On pose $\sigma_i = \sigma|_{F_i}$

σ diag $\Rightarrow \sigma_i$ diag

Donc $\exists B_i = \text{BON}$ de rep de σ_i base de σ et de u .

Ainsi, $B = \bigcup_{i=1}^r B_i$ est une BON de rep de u et de σ .

Alors, $A_1 = \text{mat}_B(u) = P_{B \rightarrow B}^\perp D_1 P_{B \rightarrow B}$

$A_2 = P_{B \rightarrow B}^\perp D_2 P_{B \rightarrow B}$

Car B BON dans $\mathbb{R}^n$ muni de ps canonique

(iii) $\Rightarrow$ (i) $A_1 A_2 = P^T D_1 D_2 P$

$(A_1 A_2)^T = P^T \underbrace{(D_1 D_2)^T}_{\in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})} (P^T)^T$

$= P^T D_1 D_2 P = A_1 A_2$

Exercice 558:

Soit $M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, $(v_1, \dots, v_n)$ BON de Sep de M

On considère $\varphi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{(Mx|x)}{(x|x)}$

On pose $W_k = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$

1) Soit $x \in W_k \setminus \{0\}$.

$$x = \sum_{i=1}^k x_i v_i$$

$$\text{Dac } Mx = \sum_{i=1}^k x_i d_i v_i$$

$$\text{d'où } (Mx|x) = \sum_{i=1}^k d_i x_i^2 \leq d_k \sum_{i=1}^k x_i^2 = d_k (x|x)$$

$$\text{d'où } \varphi(x) \leq d_k$$

et cette valeur est atteinte pour $x \in \text{Vect}(v_k)$

(CL:

$$d_k = \max_{x \in W_k} \varphi(x)$$

2) $W_{k-1}^\perp = \text{Vect}(v_k, \dots, v_n)$

Soit $x \in W_{k-1}^\perp \setminus \{0\}$

$$\text{On note } x = \sum_{i=k}^n x_i v_i$$

On a alors $(X|X) = \sum_{i=k}^n \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=k}^n x_i^2 = \lambda_k (X|X)$

D'où $\varphi(X) \leq \lambda_k$

et on a égalité par $X \in \text{vect}(\sigma_k) \setminus \{0_E\}$

CLL: $\lambda_k = \min_{X \in V_{k-1}^\perp \setminus \{0_E\}} \varphi(X)$

3) W_k est de dim $k \Rightarrow \lambda_k \leq \lambda_k$ d'après le 1.

Soit W de dim k $\nabla W \neq W_k$

On a $\dim W_k^\perp = n - k$

Or $\dim W_{k-1}^\perp = n - k + 1$

et $\dim W = k$

Donc par Grassmann: $W \cap W_{k-1}^\perp \neq \{0_E\}$

car $\dim W + \dim W_{k-1}^\perp > n$

Alors, Soit $X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, $X \in W$, $X \in W_{k-1}^\perp$

4) Or, par le 2: $\varphi(X) \geq \lambda_k$

Donc $\max_{X \in W \setminus \{0\}} \varphi(X) \geq \lambda_k \rightarrow \text{Vrai} \forall W \text{ de dim } k.$

Ainsi,
$$M = \min_{\dim W = k} \left(\max_{x \in W \setminus \{0\}} \varphi(x) \right) \geq \lambda_k$$

Donc
$$M = \lambda_k$$

Exercice 559:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} a & h & d \\ h & c & e \\ \hline d & e & f \end{array} \right] \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$$

on note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ ses vap.

$$B = \begin{bmatrix} a & h \\ h & c \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$$

on note $\mu_1 \leq \mu_2$ ses vap.

$$\text{mg} \quad d \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \lambda_3.$$

$$\varphi(x) = \frac{(AX|X)}{(X|X)} \quad (\text{coeff de Rayleigh})$$

$$\text{on pose} \quad \psi(y) = \frac{(BY|Y)}{(Y|Y)}$$

$$\text{alors } (y_1 \ y_2) \begin{bmatrix} a & h \\ h & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = ay_1^2 + 2hy_1y_2 + cy_2^2$$

$$\text{et } \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & d \\ c & e & f \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + 2d x_1 x_3 + c x_2^2 + 2e x_2 x_3 + f x_3^2$$

$$\text{Alors, } \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = a y_1^2 + 2b y_1 y_2 + c y_2^2$$

$$= Y^T B Y$$

$$\text{donc } \varphi \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) = \varphi \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\text{Alors, } \max \varphi \leq \max \varphi \quad \text{et} \quad \min \varphi \geq \min \varphi$$

$$\Downarrow \quad \mu_2 \leq \lambda_3 \quad \quad \quad \Downarrow \quad \mu_1 \geq \lambda_1$$

$$\text{On a donc } \lambda_1 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \lambda_3$$

$$\quad \quad \quad \uparrow$$

$$\quad \quad \quad \lambda_2 ?$$

$$\text{On sait que } \lambda_2 = \min_{\dim W=2} \left(\max_{x \in W \setminus \{0\}} \varphi(x) \right) \quad \text{pu l SS 8.}$$

Soit y_1, y_2 BON de Jep de B

$$\Rightarrow W = \text{vect} \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$$

$$\dim W = 2$$

$$s, \quad \max_{x \in W \setminus \{0\}} \varphi(x) = \max_{y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \varphi(y) = \mu_2$$

$$\text{d'où} \quad d_2 \leq \mu_2$$

$$\Rightarrow d_1 \leq \mu_2 \leq d_3$$

$$\text{• Mg} \quad \mu_1 \leq d_2$$

$$\text{le même : } \max_{\substack{\text{Brock} \\ d(W) = n_1 - k}} \left(\min_{x \in W \setminus \{0\}} \varphi(x) \right) = d_k$$

$$\Rightarrow \mu_1 \leq d_2$$

d'où ...