

exo 545

⚡ Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vecteur propre de A^T associé à $\lambda \in \mathbb{R}$

• P stable par $u \iff \forall (x, y, z) \in P, \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = 0$

$\iff \forall (x, y, z) \in P \quad \left(A^T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = 0$

$\iff \forall (x, y, z) \in P \quad \lambda \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = 0$ ce qui est vrai.

$\Rightarrow$ Soit $(x, y, z) \in P : \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) = 0$

$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid A^T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) = 0$

$\Rightarrow A^T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in P^\perp$

Or $\dim P^\perp = 1$ donc $P^\perp = \mathbb{R} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{\neq 0}$

donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad A^T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A^T .

EXO 535

a) Soit $F = \text{vect}(e) : F \oplus F^\perp = E$. Soit $y \in F^\perp$

on $\|y\|^2 = \sum_{k=1}^p \langle y, e_k \rangle^2$ et $\forall k \in \{1, p\} \langle y, e_k \rangle = 0$

Donc $\|y\| = 0$ donc $F^\perp = \{0\}$ donc $\underline{\text{vect}(e) = F}$

b) Soit $i \in \{1, p\}$.

$\|e_i\|^2 = \sum_{k=1}^p \langle e_i, e_k \rangle^2$

et $\langle e_i, e_i \rangle^2 = \|e_i\|^4$

Donc $\|e_i\|^2 = \|e_i\|^4 + \sum_{k \neq i} \langle e_i, e_k \rangle^2$

donc $\|e_i\|^2 (1 - \|e_i\|^2) \geq 0$ donc $\underline{\|e_i\| \leq 1}$.

c). Si e est une BON, on a bien $\|e_i\| = 1 \quad \forall i$

• Si $\forall i \in \{1, p\} \quad \|e_i\| = 1$, il suffit de montrer que e est orthogonale.

• Soit $i \in \{1, p\}$. $\|e_i\|^2 = \sum_{k=1}^p \langle e_i, e_k \rangle^2$

ie $1 = 1 + \sum_{k \neq i} \langle e_i, e_k \rangle^2$

ie $\sum_{k \neq i} \langle e_i, e_k \rangle^2 = 0$ ie $\forall k \neq i \langle e_i, e_k \rangle = 0$.

Exo 548

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$

$\det(A) = \det(A^T) = (-1)^n \det(A) \Rightarrow (-1)^n = 1 \Rightarrow n$ pair. or $\operatorname{rg}(A) = n$.

2) $\operatorname{Ker} A \perp \operatorname{Im} A$. donc $\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Ker} A = \{0\}$.

3) Soit u l'ECA $\tilde{A}$ et $v = u|_{\operatorname{Im} u}$

$\operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$ Donc v inversible

4) $\det v = (-1)^{\dim \operatorname{Im} A} \det v$ donc $\operatorname{rg}(A)$ est pair.
($\det v \neq 0$)

Exo 539

Soit $x \in \operatorname{Ker}(u+v)$. On a $u(x) = -v(x)$. Or $u(x) \in \operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$

et $u(x) \in \operatorname{Ker} u \Rightarrow u^2(x) = 0$

• $(u^2(x)|x) = (u(x)|v(x)) = -\|u(x)\|^2$ donc $u(x) = 0$
= 0 donc $x \in \operatorname{Im} u$

On écrit $x = u(x')$, $x' \in E$. et $\|x\|^2 = (u(x')|x) = (x'|v(x)) \stackrel{v(x) = -u(x)}{=} 0$

d'où $x = 0$. Ainsi u injective donc $u+v$ inversible

Exo 537

$\operatorname{Tr}(AA^T) + \operatorname{Tr}(BB^T) = \operatorname{Tr}(AB) + \operatorname{Tr}(A^T B^T)$

ie $\operatorname{Tr}(AA^T + BB^T - AB - A^T B^T) = 0$

ie $\operatorname{Tr}((A-B^T)(A-B^T)^T) = 0$

ie $\|A-B^T\|^2 = 0$ ie $A = B^T$.

Exo 538

Montrons que f est une isométrie ssi $\lambda = \frac{-2}{\|v\|^2}$

$\Rightarrow$ Soit $x \in E$. $\|f(x)\| = \|x\|$

$$\text{or } \|f(x)\|^2 = (f(x)|f(x)) = \|x\|^2 + 2\lambda(x|v)^2 + \lambda^2(x|v)\|v\|^2$$

$$\text{donc } \lambda(x|v)^2 [2 + \lambda\|v\|^2] = 0$$

• Si $(x|v) = 0$: $v \in E^\perp = \{0\}$ absurde car $v \neq 0$

$$\text{Donc } \lambda = \frac{-2}{\|v\|^2}$$

$\Leftarrow$ Soit $x \in E$.

$$\|f(x)\|^2 = (f(x)|f(x)) \text{ or } f(x) = x - \frac{2(x|v)v}{\|v\|^2}$$

$$\text{Donc } \|f(x)\|^2 = \|x\|^2 - \frac{2}{\|v\|^2}(x|v) \left[2 - \frac{2\|v\|^2}{\|v\|^2} \right] = \|x\|^2$$

Donc f est une isométrie

Exo 549

a) On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit $\lambda \in \text{Sp } A$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) et X un vecteur propre (complexe) associé.

on a $\begin{cases} AX = \lambda X \\ A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X} \end{cases}$ d'une part et $X^T A^T = \lambda X^T$ ie $X^T A = -\lambda X^T$ d'autre part.

Donc $\begin{cases} X^T A \bar{X} = \bar{\lambda} X^T \bar{X} \\ X^T A \bar{X} = -\lambda X^T \bar{X} \end{cases}$. Or, $X \neq 0 \Rightarrow X^T \bar{X} = \sum_{i=1}^n |X[i]|^2 \neq 0$

Donc $\bar{\lambda} = -\lambda$ donc $\boxed{\lambda \in i\mathbb{R}}$ ie $\text{sp}(A) \subset i\mathbb{R}$.

b) On en déduit que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\text{sp}(A) \subset \mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$.

Si on suppose A non inversible (le cas inversible : cf exo 548 1))

on a $\text{sp}(A) = \{0\}$. Avec des notations transparentes, on écrit

$$P_A = X^K \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \prod_{i=1}^r (X - \bar{\lambda}_i)^{\alpha_i} \text{ et } A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ & & & & \lambda_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \bar{\lambda}_1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \bar{\lambda}_r \end{pmatrix}$$

on sait que A est
diag^{ble} dans $\mathbb{C}$.

$$\operatorname{rg}(A) = 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad \text{qui est pair.}$$

Exo 550

• $AA^T = I_n$ Donc $\operatorname{Tr}(AA^T) = n$.

ou $AA^T[i,i] = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$ Donc $\operatorname{Tr}(AA^T) = \sum_{i,j \in n} a_{ij}^2$.

• $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ C-S : $|(AX|X)| \leq \|X\| \|AX\|$
 ou $\|X\| = \sqrt{n}$ et $\|AX\| = \|X\| = \sqrt{n}$

et $(AX|X) = X^T A X = \sum_{i,j \in n} a_{ij}$ d'où $|\sum_{i,j \in n} a_{ij}| \leq n$.

• On pose $B = (|a_{ij}|)_{i,j \in \{0,1,n\}}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Tr}(BJ) = \sum_{i,j \in n} |a_{ij}|$ et C-S : $|\operatorname{Tr}(BJ)| \leq \sqrt{\operatorname{Tr}(B^T B) \operatorname{Tr}(J^T J)}$
 $= \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \cdot n^2}$
 $= \sqrt{n \cdot n^2} = n\sqrt{n}$

• $\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \geq \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad \forall j \in \{1, n\}$

ou $\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 = \|C_j\|^2 = 1$ car $A \in O_n(\mathbb{R})$. On somme sur $j \in \{1, n\}$

et on obtient $\sum_{i,j} |a_{ij}| \geq n \times 1 = n$

exo 536

1) $(P|P) = 0 \iff \sum_{k=0}^n P(a_k)^2 = 0 \iff P=0$ ssi $(a_0, \dots, a_n)$ sont deux à deux distincts.

2) Soit $(L_k)_{k \in \{0,1,n\}}$ les polynômes de Lagrange associés.

à $(a_i)_{i \in \{0,1,n\}}$. Soit $(i,j) \in \{0,1,n\}$:

$\langle L_i, L_j \rangle = \sum_{k=0}^n \delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ij}$. C'est bien une BON pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$

3) $\dim \mathcal{F} = n$ donc $\dim \mathcal{F}^\perp = 1$.

Or $\mathbb{R}_0[x] \subset \mathcal{F}^\perp$. Donc $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right\}$ est une BON de $\mathcal{F}^\perp$

$$\begin{aligned} d(x^n, \mathcal{F}) &= \|P_{\mathcal{F}^\perp}(x^n)\| \\ &= \left\| \left\langle \frac{1}{\sqrt{n+1}}, x^n \right\rangle \times \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right\| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left| \sum_{k=0}^n a_k^n \right| \end{aligned}$$

Exo 543

$$\Rightarrow AA^T A = A(AA^T) = A^2 A^T$$

$\Leftarrow$

$$\begin{aligned} \|AA^T - A^T A\|^2 &= \|AA^T\|^2 + \|A^T A\|^2 - (AA^T | A^T A) - (A^T A | AA^T) \\ &= \text{Tr}(A^2 A^T A^T) + \text{Tr}(A^T A^2 A^T) - \text{Tr}(A^T A^2 A^T) - \text{Tr}(A^2 A^T A^2) \\ &= 0 \quad \text{d'où } AA^T = A^T A. \end{aligned}$$

Exo 533

a) $\chi_A = x^2 - x + 1$. m'est pas scinde' sur $\mathbb{R}$ donc A m'est pas diag^{ble} sur $\mathbb{R}$.

χ_A est SARS sur $\mathbb{C}$ donc A est diag^{ble} sur $\mathbb{C}$.

$$b) \chi_A = (x - e^{i\frac{\pi}{3}})(x - e^{-i\frac{\pi}{3}}) \quad \text{Sp}(A) = \{-j, -j^2\}.$$

$$\text{Donc } A^6 \sim \begin{pmatrix} -j^6 & 0 \\ 0 & (-j^2)^6 \end{pmatrix} = I_2 \quad \text{donc } \underline{A^6 = I_2}$$

$$c) A \sim \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{pmatrix} \sim R\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{dans } \mathbb{C} \text{ donc dans } \mathbb{R}.$$