TD - Réduction 12/11

$\boxed{\text{Ex 439}}$ (Victor)

a) $u \in \mathcal{L}(E)$ $sp(u) = \{1, 2 \cdots n\}$

Soit F sev de E stable par u

On dispose de $e_1 - e_p$ base de F formée de vecteurs propres de u

$F = \text{Vect}(e_1 - e_p)$

Or $E = E_1(u) \oplus \cdots \oplus E_n(u)$

Donc $\exists J \subset \{1 - n\}$ tel que $F = \bigoplus_{i \in J} E_i(u)$

$$\boxed{F = E_{i_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{i_p}(u)}$$

en notant $J = \{i_1 \cdots i_p\}$

Réciproquement si $\{i_1 \cdots i_p\} \in [\![1;n]\!]^p$

Alors $E_{i_1}(u) + \cdots + E_{i_p}(u)$ est stable par u

Le nombre de sous espaces stables par u est donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \boxed{2^n}$

b) CNS pour que $u \in \mathcal{L}(E)$ admette un nombre fini de sous espaces stables

$\boxed{\underline{\text{CNS}} : \ |sp(u)| = n}$ (u admet n valeur propres distinctes)

Suffisant : cf question (a)

nécessaire : On suppose que $|sp(u)| < n$

u diagonalisable donc $\exists \lambda \in sp(u)$, $\dim E_\lambda(u) \geqslant 2$

$\exists (e_1, e_2)$ famille libre dans $E_\lambda(u)$.

Donc pour $t \in \mathbb{C}$ $\text{Vect}(e_1 + t e_2)$ est un sev stable par u

$\{\text{Vect}(e_1 + t e_2), t \in \mathbb{C}\}$ donne une infinité de sev stables par u.

$\boxed{\text{Ex 531}}$ (Liam)

E un $\mathbb{C}$ev de dim n. $f \in \mathcal{L}(E)$

Mq $\left| \begin{array}{l} \forall t \text{ suffisamment petit} \\ t \in \mathbb{C} \end{array} \right.$ $\det(\text{Id}_E - tf)^{-1} = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \text{tr}(f^k) \frac{t^k}{k}\right)$

Par d'Alembert Gauss, χ_f est scindé

ie $\exists (\lambda_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ $\chi_f = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$

On pose $P(X) = \det(\text{id}_E - X \cdot f)$ polynôme en X

Soit $x \in \mathbb{C}^*$

$P(x) = \det(\text{id}_E - x f) = x^n \det\left(\frac{1}{x} \text{id}_E - f\right) = x^n \chi_f\left(\frac{1}{x}\right)$

$= \prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i x)$

Donc $P(X) = \prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i X)$

On pose $\Delta = \{i \in [\![1;n]\!], \lambda_i \neq 0\}$ $P(X) = \prod_{i \in \Delta} (1 - \lambda_i X)$

Supposons $\Delta \neq \emptyset$ posons $\rho = \min_{i \in \Delta} \left(\frac{1}{|\lambda_i|}\right)$

$D = \{ z \in \mathbb{C},\ |z| < \rho \}$ $\Rightarrow$ on a caractérisé ce qu'est "z suffisamment petit"

Graphiquement

$\forall t \in D, \forall i \in D$

$$\frac{1}{1-\lambda_i t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_i^k t^k$$

$$\frac{1}{P(t)} = \prod_{i \in \Delta} \frac{1}{1-\lambda_i t} = \prod_{i \in \Delta} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_i^k t^k$$

Soit $z \in D$: $F \left| \begin{array}{l} [0;1] \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \frac{1}{P(zt)} \end{array} \right.$

$\forall i \in \Delta \quad \forall t \in [0;1]$

$$F_i(t) = \frac{1}{1-\lambda_i z t} \qquad = \prod_{i\in\Delta} F_i \qquad = \frac{1 - Re(\lambda_i z)t}{(1-Re(\lambda_i z)t)^2 + Im^2(\lambda_i z)t^2} + \frac{Im(\lambda_i z)t}{(1-Re(\lambda_i z)t)^2 + Im^2(\lambda_i z)t^2}$$

$$F' = \sum_{i\in\Delta} F_i' \prod_{j \in \Delta\setminus\{i\}} F_j = F \sum_{i\in\Delta} F_i'$$

$\forall i \in \Delta \quad G_i \left| \begin{array}{l} [0;1] \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda_i^k z^k t^k}{k} \end{array} \right.$

$\forall t \in [0;1]$

$$G_i'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_i^k z^k t^{k-1} = \lambda_i z \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_i^k z^k t^k = \frac{\lambda_i z}{1-\lambda_i z t}$$

$\forall t \in [0;1]$

$$\frac{1}{F_i(t)} = 1 - \lambda_i z t \quad \text{donc} \quad \frac{F_i'(t)}{F_i^2(t)} = \lambda_i z \quad \text{et} \quad \frac{F_i'(t)}{F_i(t)} = \lambda_i z F_i(t) = \frac{\lambda_i z}{1-\lambda_i z t}$$

$$= G_i'(t)$$

$\sum_{i\in\Delta} \frac{F_i'}{F_i}$ admet pour primitive $\sum_{i\in\Delta} G_i$

$\exists K \in \mathbb{C}, \forall t \in [0;1] \quad F(t) = K e^{\sum_{i\in\Delta} G_i(t)}$

$$\frac{1}{P(0)} = \frac{1}{\det(id_E)} = 1$$

$G_i(0) = 0$ Donc $K = 1$ $\quad F(1) = e^{\sum_{i\in\Delta} G_i(1)}$

$$\frac{1}{P(z)} = \exp\left(\sum_{i\in\Delta} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda_i^k z^k}{k} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k} \sum_{i\in\Delta} \lambda_i^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k} tr(f^k)$$

d'où

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{P(z)} &= \frac{1}{\det(id_E - z f)} \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} tr(f^k) \frac{z^k}{k} \right) \end{aligned}}$$

Ex 405 (Gaspard)

$A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1) cf Td sur les matrices (démo par l'absurde)

2) Soit $\lambda \in Sp(A)$ $\exists X \neq 0$ $AX = \lambda X$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$\forall i \in [\![1;n]\!]$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i$ donc $\sum_{j \in [\![1;n]\!] \setminus \{i\}} a_{ij} x_j = (\lambda - a_{ii}) x_i$

Soit $i_0 \in [\![1;n]\!]$ tq $|x_{i_0}|$ est maximal

$\sum_{j \neq i_0} a_{i_0 j} x_j = (\lambda - a_{i_0 i_0}) x_{i_0}$ donc $\left|\sum_{j \neq i_0} a_{i_0 j} x_j\right| = |x_{i_0}| \cdot |\lambda - a_{i_0, i_0}|$

donc par l'inégalité triangulaire

$\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0, j}| \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} > |\lambda - a_{i_0, i_0}|$ d'où $\boxed{\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0, j}| > |\lambda - a_{i_0, i_0}|}$

Donc $\boxed{\lambda \in D_{i_0}}$

Ex 434 (Amaury)

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $B = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$ ⊕ : CNS pour que B soit diagonalisable

Par récurrence, on montre

$\mathcal{P}(n)$: $B^n = \left(\begin{array}{c|c} A^n & nA^n \\ \hline 0 & A^n \end{array}\right)$

Initialisation $\mathcal{P}(1)$ ok

Hérédité $\mathcal{P}(n-1) \Rightarrow \mathcal{P}(n)$ $B^n = B^{n-1} \times B = \left(\begin{array}{c|c} A^{n-1} & (n-1)A^{n-1} \\ \hline 0 & A^{n-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$

$= \left(\begin{array}{c|c} A^n & nA^n \\ \hline 0 & A^n \end{array}\right)$

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ polynôme SARS annulateur de B

$P(B) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & \sum_{k=0}^{d} k a_k X^k \\ \hline 0 & P(A) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & P'(A) \cdot A \\ \hline 0 & P(A) \end{array}\right) = 0$

Donc $P(A) = 0$ $\Rightarrow$ A diagonalisable

et $P'(A) \cdot A = 0$ Donc $XP'(X)$ est aussi annulateur de A

Soit $\lambda \in Sp(A)$

$P(\lambda) = 0 = P'(\lambda) \times \lambda$

Or P SARS donc $P(\lambda) = 0 \Rightarrow P'(\lambda) \neq 0$ d'où $\boxed{\lambda = 0}$

ie $Sp(A) = \{0\}$

Donc A est diagonalisable d'où $A = P^{-1}[0]P = 0$

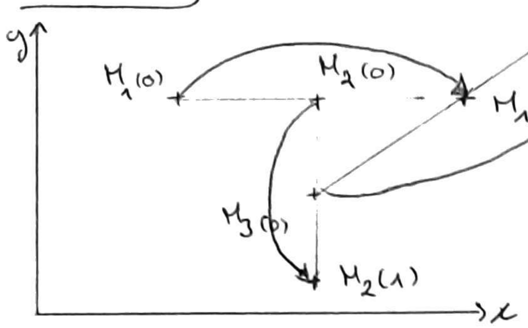
Donc $\boxed{A = 0}$

Réciproquement si $A = 0$ B est diagonalisable.

Ex 518 (Achille)

Position du mouton M_i à l'instant n (après le n ième saut).

$$M_i(n) = (x_i(n);\ y_i(n)) \quad \forall i \in [\![1;3]\!]$$



Relation de récurrence :

$$x_1(n) = 2x_2(n-1) - x_1(n-1)$$
$$x_2(n) = 2x_3(n-1) - x_2(n-1)$$
$$x_3(n) = 2x_1(n) - x_3(n-1)$$
$$= 4x_2(n-1) - 2x_1(n-1) - x_3(n-1)$$

On pose $X_n = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{bmatrix}$

$$X_n = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}}_{A} X_{n-1}$$

$$\boxed{X_n = A^n X_0}$$

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X+1 & -2 & 0 \\ 0 & X+1 & -2 \\ 2 & -4 & X+1 \end{vmatrix} = (X+1)\left((X+1)^2 - 8\right) + 8$$
$$= X^3 + 3X^2 - 5X + 1 = (X-1)(X^2+4X-1)$$

$\rightarrow$ 1 est valeur propre $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ Si les moutons sont empilés

X^2+4X-1 : $\Delta = 16 + 4 = 20$

$\alpha = \frac{-4+2\sqrt{5}}{2} = -2+\sqrt{5}$ $\quad \beta = -2-\sqrt{5}$ $\quad \boxed{\begin{matrix}|\alpha| < 1 \\ |\beta| > 1\end{matrix}}$

Donc $A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} P^{-1}$ $\quad P \in GL_n(\mathbb{R})$

$A^n = P \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \alpha^n & \\ & & \beta^n \end{bmatrix} P^{-1}$

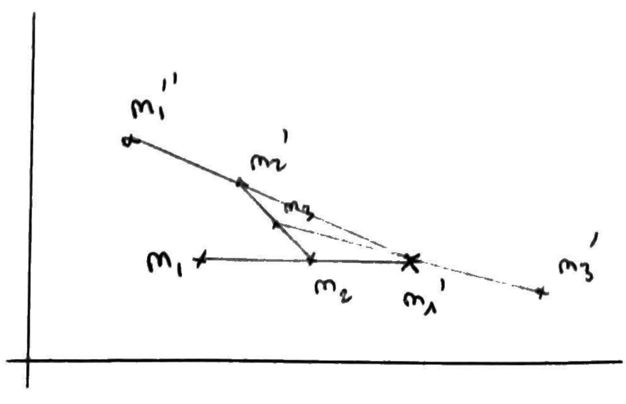
$\chi_A = (X-1)(X-\alpha)(X-\beta)$

$E_1(A) = \mathrm{Vect}(X_1)$
$E_\alpha(A) = \mathrm{Vect}(X_2)$
$E_\beta(A) = \mathrm{Vect}(X_3)$

$$X_0 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3$$
$$AX_0 = X_1 = \lambda_1 AX_1 + \lambda_2 AX_2 + \lambda_3 AX_3$$
$$= \lambda_1 X_1 + \lambda_2 \alpha X_2 + \lambda_3 \beta X_3$$

par récurrence $X^n = A^n X_0 = \lambda_1 X_1 + \underbrace{\lambda_2 \alpha^n}_{\substack{\to 0 \\ \text{car } |\alpha|<1}} X_2 + \underbrace{\lambda_3 \beta^n}_{\substack{\beta^n \to +\infty \\ \text{car } |\beta|>1}} X_3$

Pour que les moutons restent dans le pré, il faut donc $\boxed{\lambda_3 = 0}$



Ex 442 (Léo)

1) $P \in \mathbb{C}[X]$ $\deg P \geq 1$
$\exists \lambda \in \mathbb{C},\ P(\lambda) = 0$ On pose $M = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$ Donc $P(M) = \begin{pmatrix} P(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda) \end{pmatrix} = 0$

2) $P \in \mathbb{R}[X]$
si $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ $P(\alpha) = 0$ Alors $M = \alpha I_n$ convient
si $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $P(\alpha) \neq 0$ Alors $\deg P \geq 2$
si $n=1$: Il n'existe pas de matrice M.
si $n \geq 2$ $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ $Q = X^2 + aX + b \mid P$
On cherche $M' \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $P(M') = 0$
Dans ce cas en posant $M = \left(\begin{array}{c|c} M' & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on aura $P(M) = 0$

On cherche M' tq $Q(M') = 0$
$\begin{vmatrix} X & b \\ -1 & X+a \end{vmatrix} = X(X+a) + b = X^2 + aX + b$
$M' = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ donc $Q(M') = 0$ Problème selon $P(0)$ car $P(M) = \left[\begin{array}{c|c} P(A) & 0 \\ \hline 0 & P(0) \end{array}\right]$

si $X^2 + aX + b$ n'a pas de racine réelle et a pour racines $\begin{cases} \alpha + i\beta \\ \alpha - i\beta \end{cases}$ $\beta \neq 0$
$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \alpha I_2 + \beta J$ où $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ J a pour val propres i et $-i$.

$A = \alpha I_2 + \beta J \in \mathbb{C}[J]$ a pr valeurs propres $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$.
$P \in \mathbb{R}[X]$

1er cas $P \in \mathbb{R}[X]$ a une racine réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ $M = \lambda I_n$ ok

2e cas P n'a pas de racine réelle
Soit $\alpha + i\beta$ une racine complexe de P, $\alpha - i\beta$ racine complexe de P
$\Rightarrow X^2 - 2\alpha X + (\alpha^2 + \beta^2) \mid P$ ie $X^2 + aX + b \mid P$

$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $P(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

si n est pair : $n = 2p$ $M = \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{A} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A} \end{bmatrix}}_{p \text{ blocs}}$ convient car $P(M) = [0]$

si n impair : si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $P(M) = [0]$
$\Rightarrow sp(M) \subset \{\text{racines de } P\}$
Or $\chi_M \in \mathbb{R}_n[X]$ est de degré n impair $\Rightarrow$ admet une racine réelle
$\Rightarrow sp(M) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ Contradiction

Donc $\boxed{M \text{ existe} \iff P \text{ a une racine réelle ou } n \text{ pair}}$