9

Séance du 07/11
TD maths réduction

dans le plan.

Exercice n° 399

2. $\det A = 0$. Mq E_A ev $\Leftrightarrow$ A nilpotente

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $X, Y \in E_A$, $\alpha \in \mathbb{C}$

$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\begin{cases} AX = \lambda X \\ AY = \mu Y \end{cases}$

$$A(\alpha X + Y) = \alpha AX + AY = \alpha \lambda X + \mu Y$$

(*) Or $\exists$ aussi $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $A(\alpha X + Y) = \varepsilon(\alpha X + Y)$
(car $(\alpha X + Y) \in E_A$ par comb lin)
$\Rightarrow \lambda = \mu = \varepsilon$ A admet une unique valeur propre

$\chi_A = (X - \varepsilon)^n$ A trigonalisable

$$A = P \begin{pmatrix} \varepsilon & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon \end{pmatrix} P^{-1} \qquad P \in GL_n(\mathbb{C})$$

$\det A = \varepsilon^n = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$

$\chi_A = X^n$ donc A nilpotente

$\boxed{\Leftarrow}$ A nilp, $\chi_A = X^n \Rightarrow 0$ est la seule valeur propre de A

$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in E_A$ et pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $X, Y \in E_A$, $AX = AY = 0$

$\Rightarrow A(\alpha X + Y) = \alpha AX + AY = 0$

(*) $\Rightarrow 0 \in sp(A)$ car $\det A = 0$ donc $\exists X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à 0

On suppose que $\exists \lambda \in sp(\mu) \neq 0$

Donc $\exists Y \in \mathbb{C}^n \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ tq $AY = \lambda Y$

X et Y forment une famille libre

E_A ev $\Rightarrow X + Y \in E_A$

b. $\det A \neq 0$

E_A ev $\Leftrightarrow$ A possède une unique valeur propre

$\boxed{\Leftarrow}$ λ valeur propre de A

- $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in E_A$

- $\forall X, Y \in E_A,\ a \in \mathbb{C}$

$A(aX+Y) = aAX + AY = a\lambda X + \lambda Y = \lambda(aX+Y)$

$\boxed{\Rightarrow}$ E_A ev

Soit $\lambda \in Sp(A)$

On pose $A' = A - \lambda I_n$

$\ker(A') \neq \{0\}$

$\Rightarrow \det(A') = 0$

$E_{A'} = E_A$ est un ev

A' nilpotente $\Rightarrow$ $A'^r = 0 \Rightarrow (A - \lambda I_n)^r = 0$

(Q1)

$P(X) = (X-\lambda)^r$ polynôme annulateur de A.

$Sp(A) = \{\lambda\}$.

Exercice n°425.

1. $A = mat_{B_E}(u)$ $\quad A \sim T \in T_n^{++}(\mathbb{K})$

$\Rightarrow \det(A + I_n) = \det(T + I_n) = 1$

2. $v \in \mathcal{L}(E)$

$u \circ v = v \circ u$

1er cas : $v \in G\mathcal{L}(E)$

$u + v = v\,(v^{-1} \circ u + id_E)$

$\det(u+v) = \det(v) \times \det(v^{-1} \circ u + id_E)$

Or $u \circ v = v \circ u$ donc $u \circ v^{-1} = v^{-1} \circ u$

$\Rightarrow \det(u+v) = \det(v) \times \underbrace{\det(\underset{\sim}{u \circ v^{-1}} + id_E)}_{\text{nilpotent}}$

$= 1\ Q(1)$

2e cas : $v \notin G\mathcal{L}(E)$

10

Maths

. $v - \lambda id_E$ ($\lambda \notin sp(v)$)

. u et $v - \lambda id_E$ commutent

$\Rightarrow \forall \lambda \notin sp(u)$, $\det(v - \lambda id_E + u) = \det(v - \lambda id_E)$

(d'après cas 1)

2 polynômes en λ qui coïncident sur une ∞ de valeurs donc sont =

en particulier pour $\lambda = 0$

$\Rightarrow \det(v+u) = \det(v)$

Exercice n°430

a: $y \in \mathrm{Im}\, u \subset E$ donc $u(y) \in \mathrm{Im}(u)$

$v = u_{|\mathrm{Im}\, u}^{|\mathrm{Im}\, u}$

b. $v : \begin{cases} \mathrm{Im}\, u \longrightarrow \mathrm{Im}\, u \\ x \longmapsto u(x) \end{cases}$

. Thm du rang : (= dimension)

. injectivité : Soit $x \in \mathrm{Ker}\, v = \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u$

$\begin{cases} v(x) = u(x) = 0_E \\ \exists x', \ x = u(x') \end{cases}$

$u^2(x) = u \circ u(x) = 0_E$

$= u^3(x') = u(x') = -x$

D'où $x = 0_E$

$v \in GL_n(\mathrm{Im}\, u)$

c. Mq $r = \dim(\mathrm{Im}\, u) \in 2\mathbb{Z}$

$u^3 = -u \Rightarrow v^3 = -v$

$\det(v^3) = \det(v)^3 = \det(-v) = (-1)^r \det v$

Or $\det v \neq 0$ d'où $\det(v)^2 (-1)^r \geq 0$ car dans $\mathbb{R}$

d'où $r \in 2\mathbb{Z}$

d. $\dim E = 3$

$u \neq 0 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}\, u) > 0$

Q (c), $rg(u) = 2$

D'où $\dim \mathrm{Ker}\, u = 1$ Donc 0 est valeur propre de u

$v = u_{\mathrm{Im}\, u}^{\mathrm{Im}\, u}$ v bijectif

$(v^3 + v) \circ v^{-1} = 0 \circ v^{-1} = v^2 + id_{\mathrm{Im}(u)}$

$\Rightarrow v^2 + id_{\mathrm{Im}\, u} = 0$

(ou on peut passer par le polynôme annulateur directement) dans $\mathbb{C}$

$\downarrow$

$sp(u) \subset \{0, i, -i\}$ or on est dans $\mathbb{R}$ donc

$\boxed{\rightarrow \{0, i, -i\} = sp(u)}$

$\rightarrow$ 0 est seule valeur propre Absurde car $u \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$

Soit $\tilde{B}$ base de $\mathrm{Im}\, u$, $\tilde{A} = mat_{\tilde{B}}(v)$

On a $\tilde{A}^2 + I_2 = 0$

$P(X) = X^2 + 1$ annulateur de $\tilde{A}$

P est SARS dans $\mathbb{C}$, $P = (X+i)(X-i)$

Donc $\tilde{A}$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$

$\exists P \in GL_2(\mathbb{C})$, $\tilde{A} = PDP^{-1}$ où $D \in D_2(\mathbb{C})$

$sp(\tilde{A}) = sp(D)$

Soit $\lambda \in sp(\tilde{A})$. Soit $x \in \mathrm{Im}\, u \setminus \{0_E\}$,

$v(x) = \lambda x$

$v^2(x) = \lambda^2 x = -x$

D'où puisque $x \neq 0_E$,

$\lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda = \pm i$

$sp(D) = \{-i, i\}$

Donc $D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est semblable à D et réelle

Donc $\tilde{A}$ et B sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et réelles donc semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

on complète $\tilde{B}$ en une base B_E de E

$mat_{B_E}(u) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ semblable à $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Im u Ker u par ce qui précède

(11)

(1) (1) Exercice n°420 :

$\boxed{\Rightarrow}$ hyp : u diagonalisable

$F = \text{vect}(f_1, \dots, f_p)$ sev de E

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E de vecteur propre de u

TBI : $(f_1, \dots, f_p, \underbrace{e_{p+1}, \dots, e_n}_{\text{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n) \text{ stable par } u})$ base de E

Donc on a trouvé un supplémentaire de F stable par u

$\boxed{\Leftarrow}$ $(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$H_1 = \text{vect}(e_2, \dots, e_n)$

On dispose de f_1 tq $\text{vect}(f_1) \oplus H_1 = E$
avec $\text{vect}(f_1)$ stable par u. Donc f_1 est une valeur propre de u.

$H_2 = \text{vect}(f_1, e_3, \dots, e_n)$

$D_2 = \text{vect}(f_2)$

$H_2 \oplus D_2 = E$ $\Rightarrow f_2$ vecteur propre de u

↳ stable par u

$(f_1, f_2, e_3, \dots, e_n)$ base de E

En itérant, on trouve une base de E $(f_1, \dots, f_n)$ de vecteurs propres de u

Ccl : u diagonalisable

Exercice n°417 :

$\boxed{\Rightarrow}$ OK

$\boxed{\Leftarrow}$ hyp : $\text{Tr}\, A = 0$ $\quad A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$A \sim \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} u(e_1) & u(e_2) \end{array} \\ & \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array} \quad (\text{Tr}\, A = 0)$$

. $(e_1, e_2) \to (e_2, e_1)$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u(e_2) & u(e_1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_2 \\ e_1 \end{array} \end{array}$$

. et $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u(e_1) & u(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$ $\quad (e_1, e_2) \Rightarrow (-e_1, e_2) \quad \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u(-e_1) & u(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

Exercice n° 436 :

a. $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}),\ A = P^{-1}DP$

$$B = A^3 + A + I_n$$

$$D' = D^3 + D + I_n$$

A diag $\Rightarrow$ P(A) diag

$D' = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$

$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1^3 + \lambda_1 + 1 \\ \vdots \\ \mu_n = \lambda_n^3 + \lambda_n + 1 \end{cases}$$

$\begin{cases} \lambda_i \text{ 2 à 2 } \neq \\ \mu_i \text{ 2 à 2 } \neq \end{cases}$

$x \mapsto x^3 + x + 1$ est bijective

$\exists !\, P \in \mathbb{R}[X]$ tq $P(\mu_i) = \lambda_i\ \ \forall i$ (Lagrange)

$$\begin{pmatrix} P(\mu_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\mu_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

$$\Rightarrow A = \mathrm{mat}_B(P(k))$$

b. Non

par ex :

$$A = \begin{pmatrix} a & & \\ & \lambda & \\ & & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a^3 + a + 1 & & 0 \\ & \lambda^3 + \lambda + 1 & \\ 0 & & \bar{\lambda}^3 + \bar{\lambda} + 1 \end{pmatrix} \doteq 0$$

si $\exists P,\ P(B) = A = \alpha I_n$ <u>Absurde</u>

$X \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$

→ <u>si k impair</u> : $k = 2n+1$

(1)

$$X = \begin{pmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & ⋰ & \\ & & a+b & & \\ & ⋰ & & \ddots & \\ b & & & & a \end{pmatrix}$$

<u>Analyse</u> : Soit $\lambda \in sp(X)$ et $C \in \mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{R})$ $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \neq 0$ tq $XC = \lambda C$

$$XC = \begin{bmatrix} ac_1 + bc_{2n+1} \\ \vdots \\ ac_{2n+1} + bc_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Comme $C \neq 0$, $\exists c_i \neq 0$

D'où $\begin{cases} \lambda c_i = ac_i + bc_{2n+2-i} \\ \lambda c_{2n+2-i} = ac_{2n+2-i} + bc_i \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (\lambda - a)c_i = bc_{2n+2-i} \\ (\lambda - a)c_{2n+2-i} = bc_i \end{cases}$ d'où $(\lambda - a)^2 c_i = b^2 c_i$

Or $c_i \neq 0 \Rightarrow (\lambda - a)^2 - b^2 = 0$

$\rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a+b \\ \lambda_2 = a-b \end{cases}$

- $\lambda_1 = a+b$: $E_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i$

Donc $E_i + E_{2n+2-i}$ vérifie $X(E_i + E_{2n+2-i}) = \lambda_1 (E_i + E_{2n+2-i})$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$

et E_{n+1} aussi

- $\lambda_2 = a-b$

$E_i - E_{2n+2-i}$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$

$$X \sim \begin{bmatrix} a+b & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a+b & & & \\ & & & a-b & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a-b \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\qquad}_{n+1 \text{ fois}}$ $\underbrace{\qquad}_{n \text{ fois}}$

→ si k pair : $k = 2n$

$$X \sim \begin{bmatrix} a+b & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a+b & & & \\ & & & a-b & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a-b \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{n \text{ fois}} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{n \text{ fois}}$