

Exercices 481, 413, 400, 441, 432, 423, 479, 524, 447,
414, 492, 464

1

Exercice 481 Maxime

Soit $\phi: \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b & c & f \\ a & e & i \\ d & g & h \end{pmatrix}$$

a) Montrer que ϕ est un endomorphisme.

• $\phi: \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

• linéarité : Soit $A, A' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\phi(\lambda A + A') = \begin{pmatrix} \lambda b + b' & \lambda c + c' & \lambda f + f' \\ \lambda a + a' & \lambda e + e' & \lambda i + i' \\ \lambda d + d' & \lambda g + g' & \lambda h + h' \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \phi(A) + \phi(A')$$

donc $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_3(\mathbb{C}))$

On remarque que ϕ consiste en une rotation des coeff de la matrice.

donc $\phi^8 = \text{id}_{\mathcal{M}_3(\mathbb{C})}$

donc $P = X^8 - 1$ est annulateur de ϕ .

et $P = \prod_{k=0}^7 (X - e^{i \frac{2k\pi}{8}})$ SANS donc ϕ dz

b) λ_0 est valeur propre de Φ , ie $\text{Ker}(\Phi - \text{id}_{\Pi_3(\mathbb{C})}) \neq \{0\}$.

Soit $A \in \Pi_3(\mathbb{C})$.

$$(\Phi - \text{id}_{\Pi_3(\mathbb{C})})(A) = \begin{pmatrix} b-a & c-b & b-c \\ a-d & 0 & i-b \\ d-g & g-h & h-i \end{pmatrix}$$

$$A \in \text{Ker}(\Phi - \text{id}_{\Pi_3(\mathbb{C})}) \Leftrightarrow a=b=c=d=f=g=h=i$$

$$\Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{C}^2,$$

$$A = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=N} + y \cdot E_{2,2}$$

$$\text{Donc } \text{Ker}(\Phi - \text{id}_{\Pi_3(\mathbb{C})}) = \text{Vect}(N, E_{2,2}) \neq \{0\}$$

d'où $\boxed{1 \in S_p(\Phi)}$

et $\boxed{\dim E_s(\Phi) = \dim \text{Vect}(N, E_{2,2}) = 2}$

Exercice 13

Nathan

Soit $\pi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\text{rg } \pi = 1$.

$$\pi \neq 0 \iff \pi \text{ dg}$$

$$\Rightarrow \text{rg } \pi = 1.$$

d'après th rang, $\dim \text{Ker } \pi = n-1$

$$\text{et } \mathbb{K}^n = \text{Ker } \pi \oplus \Delta \quad \uparrow \text{ droite vectorielle de } \mathbb{K}^n.$$

Soit $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{K}^n$ adaptée.

$$\pi \text{ est semblable à } \pi' = \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} \\ 0 & m_n \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \text{tr } \pi = \text{tr } \pi' = m_n \neq 0 \text{ par hyp.}$$

$$\text{et } \chi_\pi = \chi_{\pi'} = X^{n-1}(X - m_n) \text{ scindé}$$

$$\text{avec } \dim E_0 = \dim \text{Ker } \pi = n-1$$

$$\dim E_{m_n} = 1$$

$$\text{donc } \boxed{\pi \text{ est dg.}}$$

$$\Leftarrow \pi \text{ dg donc } \exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), \pi = P D P^{-1}$$

$$\exists D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$\text{rg } \pi = \text{rg } D = 1$$

$$\text{donc } \exists ! i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \neq 0$$

$$\text{et } \text{tr } \pi = \text{tr } D = \lambda_i \neq 0.$$

Exercice 600

Gabriel

$$\text{Soit } A \in GL_6(\mathbb{R}) \text{ tq } \begin{cases} \text{tr } A = 11 \\ A(A - I_n)(A - 2I_n) = 0. \end{cases}$$

donc $P = X(X-1)(X-2)$ annule A .

$$\text{donc } Sp(A) \subset \{0, 1, 2\}.$$

Or $A \in GL_6$ donc $0 \notin Sp(A)$.

$$\text{d'où } Sp(A) \subset \{1, 2\}$$

P SARRS donc A dg.

On note D sa matrice diagonale correspondante.

$$\text{tr } D = 11$$

$$= \mu \times 1 + \lambda \times 2 \quad \text{avec } \mu + \lambda = 6.$$

$$\text{d'où } \begin{cases} \lambda = 5 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

$$\text{et } \chi_A = \chi_D = (X-1)(X-2)^5$$

Exercice 661

Karrn

Sait $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ tq $A^3 - A - I_n = 0$.

Mo $\det A > 0$:

$P = X^3 - X - 1$ est annulateur de A .

On étudie la fct $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto P(x)$:

$$P'(x) = 3x^2 - 1$$

	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	α	$+\infty$
$P'(x)$	+	0	-	0	+
P					
signe de $P(x)$	-	-	-	0	+

en effet : $P(-\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0$ et $P(\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0$.

d'après le TVI, $\exists ! \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $P(\alpha) = 0$.

donc P a une unique racine réelle.

P est de degré 3 :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists \beta \in \mathbb{C}, P = \lambda(x - \alpha)(x - \beta)(x - \bar{\beta})$$

et $\{\text{racines de } K_n\} \subset \{\text{racines de } P\} = \{\alpha, \beta, \bar{\beta}\}$.

d'aut $\chi_A = (x-\alpha)^a (x-\beta)^b (x-\bar{\beta})^c$ avec $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

$A \in M_n(\mathbb{C})$ donc $b=c$

$$\text{et } \chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

$$= (-1)^{a+2b} \alpha^a (\beta \bar{\beta})^b$$

$$= (-1)^n \alpha^a |\beta|^{2b}$$

$$\text{d'aut } \det A = \underbrace{\alpha^a}_{>0} \underbrace{|\beta|^{2b}}_{>0} > 0.$$

Exercice 432

Achille

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dim n

Soit $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$, $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$

$$f \mapsto f + (\text{tr } f) \text{id}_E$$

On cherche $\text{Sp } \varphi$, $\det \varphi$, $\text{tr } \varphi$.

$$\bullet \varphi(\text{id}_E) = \text{id}_E + n \text{id}_E = (n+1) \text{id}_E$$

$$\text{donc } (n+1) \in \text{Sp } \varphi$$

$$\text{Vect}(\text{id}_E) \subset E_{n+1}(\varphi)$$

$$\bullet \text{ Soit } f \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \text{tr } f = 0: \quad \varphi(f) = f$$

$$\text{donc } 1 \in \text{Sp } \varphi$$

$$\text{E}_1(\varphi) = \text{Ker } \text{tr}$$

$\text{tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E), \mathbb{R})$ donc (théorème) dim $\text{Ker } \text{tr} = n^2 - 1$

On sait que $E_1(\varphi)$ et $E_{n+1}(\varphi)$ sont en somme directe.

$$\dim E_1(\varphi) \geq 1$$

$$\dim E_1(\varphi) + \dim E_{n+1}(\varphi) \leq n^2$$

$$\text{car } E_1(\varphi) \oplus E_{n+1}(\varphi) \subset \mathcal{L}(E)$$

$$\text{d'où } \dim E_{n+1}(\varphi) = 1.$$

$$\text{et } E_1(\varphi) \oplus E_{n+1}(\varphi) = \mathcal{L}(E)$$

et φ est dg.

donc :

$$\boxed{S_{\varphi}(\varphi) = \{1, n+1\}}$$

↓ ↓
de multiplicité n^2-1 de multiplicité 1

$$\bullet \det \varphi = 1^{n^2-1} \times (n+1)^1$$

$$\boxed{\det \varphi = n+1}$$

$$\bullet \text{tr } \varphi = n^2-1 + n+1$$

$$\boxed{\text{tr } \varphi = n(n+1)}$$

Exercice 423

Anais

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tq $AB - BA = B$

1) Mq B n'est pas inversible.

Par l'absurde, on suppose que B est inversible.

$$AB = B(A + I_n)$$

$$A = B(A + I_n)B^{-1}$$

d'où A et $A + I_n$ semblables

$$\text{et } \text{tr } A = \text{tr } (A + I_n)$$

$$\text{tr } A = \text{tr } A + n \quad \text{absurde}$$

d'où B n'est pas inversible

2) Calculons $AB^k - B^k A$ pour $k \in \mathbb{N}^*$:

Par récurrence, on a $H(k) : AB^k - B^k A = kB^k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$k=1$: ok

$k \in \mathbb{N}^*$: On suppose $H(k)$:

$$AB^k - B^k A = kB^k \quad \text{) } \times B$$

$$\text{donc } AB^{k+1} - B^k AB = kB^{k+1}$$

$$\text{et } AB - BA = B \quad \text{) } B^k \times$$

$$\text{donc } B^k AB - B^{k+1} A = B^{k+1}$$

$$\text{d'où } AB^{k+1} - B^{k+1} A = (k+1)B^{k+1} \quad H(k+1) \text{ vraie.}$$

5
Montrons que B est nilpotente :

Soit $\phi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$

$$A \mapsto AB - BA$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tq $B^k \neq 0$.

$$\text{alors } \phi(B^k) = AB^k - B^kA = kB^k$$

donc k est valeur propre de ϕ .

or $M_n(\mathbb{C})$ est de dim finie, donc ϕ admet un nb fini de valeurs propres.

donc $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = 0$.

d'où B est nilpotente

Exercice 479

Tules

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ tq $A^3 = A^2 - 2A$.

Montr. le rang de A est pair.

Soit u l'ECA à A .

$$\text{donc } u^3 = u^2 - 2u$$

Soit $y \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im } u$.

$$\begin{aligned} \exists x \in E, y &= u(x) \\ &= \frac{1}{2} [u^2(x) - u^3(x)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $\text{Ker } u \cap \text{Im } u = \{0\}$

$$\text{Soit } v = u|_{\text{Im } u}$$

$0 \notin \text{Sp } v$ donc v inversible

$$\text{et } 2v = v^2 - v^3$$

$$2\text{id}_E = v - v^2$$

donc $P = X^2 - X + 2$ est annulateur de v .

donc $\text{Sp } v \subset \{z, \bar{z}\}$ avec $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Par l'absurde, on suppose que $\text{rg } u \notin 2\mathbb{N}$.

alors par le TVI, χ_v admet une racine réelle $\rightarrow$ absurde.

donc $\boxed{\text{rg } u \in 2\mathbb{N}}$

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$: $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & I_{2n} \\ I_{2n} & -A_n \end{pmatrix}$ avec $2n$ la taille de la matrice A_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) On écrit A_2 : $a_1 = 2$.

$$A_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$a_{n+1} = 2a_n$ suite géométrique

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 2^{n-1} \times a_1 = 2^n$

$$A_{n+1}^2 = \begin{pmatrix} A_n^2 + I_{2n} & 0 \\ 0 & A_n^2 + I_{2n} \end{pmatrix}$$

pour A_1 : $A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

pour A_2 ($n=1$) : $A_2^2 = \begin{pmatrix} I_2 + I_2 & 0 \\ 0 & I_2 + I_2 \end{pmatrix} = 2I_4$

par réc, on mg $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n^2 = n \cdot I_{2n}$

d'où $P = X^2 - n$ est polynôme annulateur de A^n .

$$P = (X - \sqrt{n})(X + \sqrt{n}) \text{ S.A.R.S.}$$

$$\text{donc } Sp(A_n) \subset \{-\sqrt{n}, \sqrt{n}\}$$

On note α et β les multiplicités de $\sqrt{n}$ et $-\sqrt{n}$ resp. (potentiellement égales à 0)

$$\text{tr } A_n = 0$$

$$\text{donc } \alpha\sqrt{n} - \beta\sqrt{n} = 0$$

$$\text{donc } \boxed{\alpha = \beta = \frac{a_n}{2} = 2^{n-1}}$$

$$\text{et } \boxed{Sp(A_n) = \{-\sqrt{n}, \sqrt{n}\}}$$

b) Soient $i_1 < i_2 < \dots < i_{\frac{a_n}{2}-1} = i_{2^{n-1}-1}$ compris dans $[1, 2^n]$.

$$\text{On pose } I = \{i_k : k \in [1, 2^{n-1}-1]\}.$$

$$\text{Soit } J = [1, 2^n] \setminus I.$$

$$\text{Soit } B_n = (a_{ij})_{i,j \in J}$$

Le $\sqrt{n}$ est valeur propre

$$\underbrace{E_{\sqrt{n}}(A)}_F \cap \underbrace{\text{Vect}((e_i)_{i \in J})}_G \neq \emptyset$$

$$\text{On sait que } \dim F = 2^{n-1}$$

$$\dim G = \text{Card } J = 2^{n-1} + 1$$

$$\text{formule de Bressan: } \dim F + G \leq 2^n$$

$$\text{i.e. } \dim F + \dim G - \dim F \cap G \leq 2^n$$

$$2^{n-1} + 2^{n-1} + 1 - \dim F \cap G \leq 2^n$$

$$\text{d'où } \dim F \cap G \geq 1$$

donc $F \cap G \neq \{0\}$

Soit $C_n = (a_{ij})_{i,j \in J \times I}$

$D_n = (a_{ij})_{I \times J}$

$E_n = (a_{ij})_{i,j \in I}$

$$A_n = \left(\begin{array}{c|c} B_n & C_n \\ \hline D_n & E_n \end{array} \right) \begin{array}{l} \int ds J \\ \int ds I \end{array}$$

$\exists X \in F \cap G, X = \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \int ds J \\ \int ds I \end{array} \quad \text{tq} \quad A_n X = \sqrt{n} X$

$\Rightarrow B_n Y = \sqrt{n} Y$

Si Y est nul, alors X est nul.

absurde car X est vecteur propre.

Donc $Y \neq 0$ et Y est le vecteur propre associé à $\sqrt{n}$.

Donc $\boxed{\sqrt{n} \text{ est valeur propre de } B_n.}$

Exercice 667

Laura

Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$ tq $\exists p \geq 2, A^p = A$.

Trouver A .

Analyse: Soit $p \geq 2$ entier et $A \in M_2(\mathbb{C})$ tq $A^p = A$.

Soit $P = X^p - X$ annulateur de A .

$$P = X(X^{p-1} - 1) = X \prod_{k=0}^{p-2} (X - e^{i \frac{2k\pi}{p-1}})$$

$$S_p(A) \subset \{0\} \cup \mathbb{U}_{p-1}$$

et P SABS donc A est dg.

Soit $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$.

Synthèse: Soit A dg tq $S_p(A) \subset \{0\} \cup \mathbb{U}_{p-1}$.

donc $\exists Q \in GL_2(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{D}_2(\mathbb{C}), A = Q D Q^{-1}$.

$$\text{On pose } D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha, \beta \in S_p(A)$$

$$\text{alors } A^p = Q D^p Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} \alpha^p & 0 \\ 0 & \beta^p \end{pmatrix} Q^{-1}$$

or $\{\alpha, \beta\} \subset \{0, \mathbb{U}_{p-1}\}$ donc $\alpha^p = \alpha, \beta^p = \beta$

et $A^p = A$.

donc pour p entier ≥ 2 ,

$$A^p = A \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} A \text{ est dg} \\ S_p(A) \subset \{0\} \cup \mathbb{U}_{p-1} \end{cases}$$

- Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B \in M_n(\mathbb{K})$.

$$A^{-1} \cdot \underbrace{AB} \cdot A = \underbrace{BA} \quad \text{avec } A \text{ inversible}$$

donc AB et BA sont semblables.

$$\text{donc } \boxed{\chi_{AB} = \chi_{BA}}$$

- Soit $A \in M_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K})$ et $B \in M_n(\mathbb{K})$.

$S_p(A)$ est fini

donc $\{\mu \in \mathbb{K} : A - \mu I_n \text{ est non inversible}\}$ est fini

donc $\{\mu \in \mathbb{K} : A - \mu I_n \text{ est inversible}\}$ est infini.

On choisit μ tq $A - \mu I_n$ noté A_μ est inversible.

$$\text{donc } \chi_{A_\mu B} = \chi_{B A_\mu}$$

$$\text{d'où } \det(x I_n - A_\mu B) = \det(x I_n - B A_\mu)$$

$$\text{i.e. } \underbrace{\det(x I_n - AB - \mu B)}_{= P(\mu)} = \underbrace{\det(x I_n - BA - \mu B)}_{= Q(\mu)}$$

P et Q coïncident sur $\{\mu \in \mathbb{K} : A - \mu I_n \text{ est inversible}\}$,

donc sur une infinité de valeurs donc $P = Q$.

en particulier, $P(0) = Q(0)$

$$\text{d'où } \boxed{\chi_{AB} = \chi_{BA}}$$

Exercice 492

Karim

Soit $A \in M_{p,p}(K)$ et $B \in M_{p,n}(K)$. Comparer χ_{AB} et χ_{BA} .

On suppose $p < n$.

$\begin{cases} AB \text{ est de taille } n. \\ BA \text{ est de taille } p. \end{cases}$

Soit $A' = \begin{pmatrix} \xrightarrow{p} & \xrightarrow{n-p} \\ \uparrow n & \downarrow \\ A & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ | & & | \\ | & & | \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in M_n(K)$

et $B' = \begin{pmatrix} \xleftarrow{n} \\ \downarrow p \\ B \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ | & & | \\ | & & | \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ \uparrow n-p \end{pmatrix} \in M_n(K).$

d'après ex 414, $\chi_{A'B'} = \chi_{B'A'}$

or $A'B' = AB$

et $B'A' = \begin{pmatrix} \xrightarrow{p} & \downarrow p \\ \uparrow p & \downarrow n-p \\ BA & \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ | \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ | \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ | \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

d'où $\chi_{A'B'} = x^{n-p} \times \chi_{BA} = \chi_{AB}$

donc

$$\chi_{BA} \mid \chi_{AB}$$

Ex 464 $A, B \in M_n(K)$.

$A + \lambda B$ nilpotente

$\exists \lambda \in M_n(K) \text{ nil} \Leftrightarrow X^n = X^m$

$P(\lambda) = X_{A+\lambda B} = X^n$ pour m+1 valeurs de λ

$\deg P \leq n$
Donc $\forall \lambda \in \mathbb{C}, P(\lambda) = X^n$

pour $\lambda = 0$ $X_A = X^n$

$\det(XI_n - (A + \lambda B)) = X^n$

$(A + \lambda B)^n = \underbrace{\lambda^n + \lambda^{n-1} \dots + \lambda^n}_{\in M_n(K)}$

$= 0$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \quad \lambda \in M_n(K)$

$\Rightarrow A$ nilpotente

$\frac{1}{\lambda} (A + \lambda B)$ nilpo $\lambda \neq 0$

$(\frac{A}{\lambda} + B)^n$ nilpo pour $\lambda \neq 0$

$(B + \mu A)^n = 0 \quad \forall \mu \neq 0$

$\Rightarrow B^n = 0$

$\pi(i, j)(0) = 0$

$\pi(i, j)(\lambda)$ est un polynôme en λ à coeff dans K de deg n qui s'annule $n+1$ fois.

$\pi(i, j)(\lambda) \in M_n(K) (=)$ $\mu \in Sp(A)$