

359 → 352 → 362 → 388 → 244 → 360 → 356 → 355
→ 329

TD du 10/10/2024

Exo 359

a)
$$\begin{bmatrix} 0 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \\ \pm 1 & & & \\ & \ddots & & \\ \pm 1 & \dots & \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$$
 inversible?

On s'intéresse à la parité de n .

Cas $n=2$ $A = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{1,2} \\ \varepsilon_{2,1} & 0 \end{pmatrix}$ $\varepsilon_{i,j} = \pm 1$
 $\det(A) = -\varepsilon_{1,2}\varepsilon_{2,1} \neq 0 \rightarrow A$ est inversible

Cas $n=3$ $A = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{1,2} & \varepsilon_{1,3} \\ \varepsilon_{2,1} & 0 & \varepsilon_{2,3} \\ \varepsilon_{3,1} & \varepsilon_{3,2} & 0 \end{pmatrix}$ $\det A = \varepsilon_{1,2}\varepsilon_{2,3}\varepsilon_{3,1} + \varepsilon_{2,1}\varepsilon_{3,2}\varepsilon_{1,3}$

Si n pair : A inversible

Si n impair : on ne sait pas

taille n :

$A = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{1,2} & \dots & \varepsilon_{1,n} \\ \varepsilon_{2,1} & & & \\ & \ddots & & \\ \varepsilon_{n,1} & \dots & \varepsilon_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$ $\varepsilon_{i,i} = 0 \forall i \in [1,n]$. $A = (\varepsilon_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2}$
 $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$\det A = \det \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,1} e_1, \dots, \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,n} e_n \right)$

$= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq n} \det(\varepsilon_{i_1,1} e_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_n,n} e_{i_n})$

$= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \det(\varepsilon_{\sigma(1),1} e_{\sigma(1)}, \dots, \varepsilon_{\sigma(n),n} e_{\sigma(n)})$

$= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon_{\sigma(1),1} \times \dots \times \varepsilon_{\sigma(n),n} \times \det(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$

$\varepsilon(\sigma)$ signature de σ : nombre de permutations de 2 éléments pour obtenir σ
 $\det A = 1 \times \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon_{\sigma(1),1} \times \dots \times \varepsilon_{\sigma(n),n} \times (-1)^{\varepsilon(\sigma)}$
hors programme de PC

⊗ Permutations sans point fixe de $[1; n]$

On partitionne $\mathcal{Y}_n$ selon le nombre de points fixes de σ .

Permutation à exactement k points fixes : - choisir les points fixes $\binom{n}{k}$
 - $\mathcal{Y}'_{n-k}$: on permute les éléments restants sans nouveaux points fixes.

$\mathcal{Y}'_{n-k}$: nombre de permutations sans point fixe de $[1; n-k]$.

$$|\mathcal{Y}_n| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |\mathcal{Y}'_{n-k}| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |\mathcal{Y}'_k|$$

Inversion de Pascal : $|\mathcal{Y}'_n| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k!$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \times n \times \dots \times (n-k+1)$$

$$= +1 - n + \dots + (-1)^{n-2} n \times (n-1) \times \dots \times 3 + (-1)^{n-1} n!$$

Si n impair : $n-1$ pair $\rightarrow |\mathcal{Y}'_n|$ pair

Si n pair : $|\mathcal{Y}'_n|$ impair

$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{Y}'_n} \varepsilon_{\sigma(1),1} \times \dots \times \varepsilon_{\sigma(n),n}$: c'est une somme de termes valant tous ± 1 donc

• si n pair, $|\mathcal{Y}'_n|$ impair $\rightarrow \det A \neq 0$

• si n impair, $|\mathcal{Y}'_n|$ pair $\rightarrow \det A$ peut être nul

(b) Pour $n=42$, la matrice est inversible

Pour n impair : on ne sait pas :

$\rightarrow$ exemple de matrice inversible :

$$\begin{cases} \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n = 0 \\ \dots \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n-1)(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) = 0 \\ \vdots \\ (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \end{cases}$$

$$\forall i \in L_0 \rightarrow L_i \Rightarrow \lambda_i = 0$$

$\rightarrow$ exemple non inversible

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$C_1 = \sum_{k=2}^n (-1)^k C_k \text{ donc non inversible}$$

$$(A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \text{ et } n \text{ impair}) \cdot A^T = -A$$

$$\det A = \det(A^T) = \det(-A)$$

$$= (-1)^n \det(A)$$

$$n \text{ impair : } \det A = -\det A = 0$$

Autre méthode: n pair (pssi $n=42$)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & (\pm 1) \\ (\pm 1) & 0 \end{bmatrix} \equiv \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & (1) \\ (1) & 0 \end{bmatrix}}_B [2]$$

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$$

$$B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$$

$$A \equiv B [p] \Leftrightarrow a_{ij} \equiv b_{ij} [p] \quad \forall (i,j) \in [1;n]^2$$

propriété: $A \equiv B [2] \Rightarrow \det A \equiv \det B [2]$

$$\begin{cases} a \equiv b [2] \\ c \equiv d [2] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c \equiv b+d [2] \\ ac \equiv bd [2] \end{cases} \quad \text{Or un déterminant est composé de sommes et de produits.}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & \backslash & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1-1) & 1 & -1 \\ 1 & \backslash & 1 \\ 1 & -1 & (1-1) \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{exo. 359 avec } b_i=1, a_i=-1} (-1)^n + n \times (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$$

n est pair donc

$$\det B = 1 - n \equiv 1 [2] \quad \text{d'où } \det B \text{ impair donc } \det A \text{ impair}$$

donc $\boxed{\det A \neq 0 \Rightarrow A \text{ inversible}}$

Exo. 352

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad a_{i,j} = \delta_{i,j} + x_i x_j$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 x_1 + 1 & x_1 x_2 & \dots & x_1 x_n \\ x_1 x_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x_n x_{n-1} \\ x_1 x_n & \dots & x_n x_{n-1} & x_n^2 + 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$E_1, \dots, E_n$ la base canonique.

$$\begin{aligned} \det A &= \det(x_1 C + E_1, x_2 C + E_2, \dots, x_n C + E_n) \\ &= \underbrace{\det(E_1, \dots, E_n)}_1 + \det(x_1 C, E_2, \dots, E_n) + \dots + \det(E_1, \dots, E_n, x_n C) \end{aligned}$$

Or pour $i \in [1;n]$,

$$\boxed{\det A = n+1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & & & x_1 x_i \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & x_i^2 + 1 \\ & & & \ddots \\ & x_n x_i & & 1 \end{pmatrix} = x_i^2 + 1$$

On a donc A inversible.

A^{-1} ?

$$A = I_n + C \times C^T$$

$$\begin{aligned} A^2 &= I_n + 2 C \times C^T + \text{tr}(C \times C^T) \times C \times C^T \\ &= I_n + (2 + \text{tr}(C C^T)) \times C \times C^T \\ &= (2 + \sum_{i=1}^n x_i^2) A - (1 + \sum_{i=1}^n x_i^2) I_n \end{aligned}$$

$$I_n = A \times \underbrace{\frac{(I_n [2 + \sum_{i=1}^n x_i^2] - A)}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}}_{A^{-1}}$$

Exo 362

$$(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2. \text{ Mg } \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+B) \det(A-B)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1 : \begin{vmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{vmatrix}$$

puis

$$C_1 \leftarrow C_1 - C_2 : \begin{vmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{vmatrix} \rightarrow \det(A-B) \det(A+B)$$

$$\text{d'où } \boxed{\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A-B) \det(A+B)}$$

$$\text{Mg } \begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geq 0$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow i \times L_1 \\ \text{et } C_1 &\leftarrow i C_1 : i^{2n} \begin{vmatrix} i^2 A & -iB \\ iB & A \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} A & -iB \\ iB & A \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{puis } L_2 \leftarrow L_2 + L_1 : (-1)^n \begin{vmatrix} -A & -iB \\ iB-A & A-iB \end{vmatrix}$$

puis $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 : (-1)^n \times \begin{vmatrix} -A-iB & -iB \\ 0 & A-iB \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} &= (-1)^n \times \det(-A-iB) \det(A-iB) \\ &= (-1)^n \times (-1)^n \det(A+iB) \det(A-iB) \\ &= \det(M) \det(\bar{M}) \geq 0 \quad \text{où } M = A+iB \end{aligned}$$

car $\det(M) = \det(\bar{M})$

Exo 388

1. $\varphi: M \rightarrow M^T$

$\varphi^2 = \text{id}$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, soit B une base adaptée

$\text{Mat}_B(\varphi) = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{pmatrix}$

$\text{tr}(\varphi) = -\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n$

$\det(\varphi) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

2. $\psi: M \rightarrow AM$

$A = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} E_{i,j}$

$\psi(E_{k,l}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \underbrace{E_{i,j} E_{k,l}}_{\delta_{j,k} E_{i,l}} = \sum_{i=1}^n a_{i,k} E_{i,l}$

$B = (E_{1,1}, \dots, E_{1,n}, E_{2,1}, \dots, E_{2,n}, \dots, E_{n,1}, \dots, E_{n,n})$

$\psi(E_{1,1}) = \sum_{i=1}^n a_{i,1} E_{i,1} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \\ 0 \end{pmatrix}$

d'où $\text{mat}_B(\psi) = \begin{pmatrix} A & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{pmatrix}$

donc $\det \psi = (\det A)^n$
et $\text{tr} \psi = n \times \text{tr} A$

Exo 244

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0; 2\pi[^n$, distincts 2 à 2

$\text{M}_q(x \mapsto e^{i\lambda_k x})_{k \in [1; n]}$ est libre:

Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, tels que $x \mapsto \sum_{i=1}^n a_i e^{i\lambda_i x} = 0$

Alors $x \mapsto \sum_{k=1}^n a_k (i\lambda_k)^k e^{i\lambda_k x} = 0 \quad \forall x \in [0; \ell]$
 (on dérive l fois)
 En évaluant en 0 : $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_k (i\lambda_k) = \dots = \sum_{k=1}^n a_k (i\lambda_k)^n$
 donc

$$\left(\begin{array}{l} \text{Vandermonde} \\ \text{avec } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \\ \text{distincts} \\ \text{donc inversible} \end{array} \right) \times \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\nearrow$ inversible donc $a_1 = \dots = a_n = 0$ d'où la famille libre.

Exo 360

- a) $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(C+M) = \det(M)$. On a $C = [0]$
Par l'absurde: $C = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ c_1 & \dots & c_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$, supposons que $\exists j \in [1, n], c_j \neq 0$
 $C_j \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

T.B.I.: $B = (M_1, \dots, M_{j-1}, C_j, M_{j+1}, \dots, M_n)$

$$M = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ M_1 & \dots & M_{j-1} & (-C_j) & M_{j+1} & \dots & M_n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \quad \det(M) \neq 0$$

$$C+M = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow & 0 & \uparrow \\ M_1 & \dots & M_{j-1} & 0 & M_{j+1} & \dots & M_n \\ \downarrow & & \downarrow & 0 & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \rightarrow \det(C+M) = 0$$

$\hookrightarrow$ Absurde

donc $C_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ donc $C = [0]$

- b) $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(A+M) = \det(B+M)$.

Mq $B=A$

On pose $M' = A+M$. $B+M = B-A + M'$

$\det((B-A) + M') = \det(M')$ donc $B=A$ par la question a).

- c) Les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(A+M) = \det(A) + \det(M)$

• Si $A \notin GL_n(\mathbb{C})$. $\det(A+M) = \det(M)$ donc $A = [0]$

• Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$. $A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ A_1 & \dots & A_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$. Soit $j \in [1, n]$.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \uparrow & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A+M = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow & 0 & \uparrow \\ A_1 & \dots & A_{j-1} & 0 & A_{j+1} & \dots & A_n \\ \downarrow & & \downarrow & 0 & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \text{ donc } \det(A+M) = 0$$

d'où $A = [0] \notin GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow$ absurde.

l'unique solution est $A = [0]$.

Exo 356

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & \lambda & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda - a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{n+n-1} \times \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -a_{n-2} \end{vmatrix}_{(n-1)} \\ &\quad + (\lambda - a_{n-1}) \times (-1)^{2n} \times \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix}_{n-1} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -a_{n-2} \end{vmatrix}_{n-1} + (\lambda - a_{n-1}) \lambda^{n-1} \end{aligned}$$

Calcul de $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -a_{n-2} \end{vmatrix}_{(n-1)} = \Delta_{n-1}$

Développement par rapport à ϵ_n :

$$\begin{aligned} \Delta_{n-1} &= (-1)(-1)^{2n-3} \times \Delta_{n-2} - a_{n-2} \times (-1)^{2n-2} \times \lambda^{n-2} \\ &= \Delta_{n-2} - \lambda^{n-2} a_{n-2} \end{aligned}$$

En itérant: $\Delta_{n-1} = \Delta_{n-3} - \lambda^{n-3} a_{n-3} - \lambda^{n-2} a_{n-2}$

$$= \dots = \Delta_2 - \sum_{k=1}^{n-2} \lambda^k a_k$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda & -a_0 \\ -1 & -a_1 \end{vmatrix} = -\lambda a_1 - a_0$$

$$\Delta_{n-1} = - \sum_{k=0}^{n-2} \lambda^k a_k$$

d'où $\det A = (\lambda - a_{n-1}) \lambda^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \lambda^k a_k$

$$\boxed{\det A = \lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k}$$

Exo 355

$\alpha \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N}, f_k = x^k e^{\alpha x}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $E_n = \text{Vect}(f_0, \dots, f_n)$.

a) Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\sum_{i=0}^n \lambda_i f_i = 0$.

Alors $\sum_{i=0}^n \lambda_i x^i e^{\alpha x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

d'où $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$ donc $(f_k)_{k \in [0, n]}$ est libre donc $\dim E_n = n+1$

b) $D_n: \begin{cases} E \rightarrow E \\ f \rightarrow f' \end{cases}$ Soient $(f, g) \in D_n^2$ et $\lambda \in K$
 $(f + \lambda g)' = f' + \lambda \cdot g'$

$$(f_k)' = k x^{k-1} e^{\alpha x} + \alpha x^k e^{\alpha x}$$

$$\det(D_n) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$$

Exo 329

$\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M^{41} \neq M^{42}$ et $M^{42} = M^{43}$

• Cas où $n \geq 42$

$$M_k = \left[\begin{array}{c|c} J_k & 0_{k,n-k} \\ \hline 0_{n-k,k} & 0_{n-k,n-k} \end{array} \right] \quad \text{où}$$

$$J_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$$

$$\forall l \in \mathbb{N}, M_k^l = \left[\begin{array}{c|c} J_k^l & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\text{et } J_k^l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ligne } k-l$$

$$M_{42}^{41} = \left[\begin{array}{c|c} J_{42}^{41} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \neq 0_n \quad M_{42}^{42} = 0_n = M_{42}^{43}$$

donc M_{42} fonctionne $\rightarrow$ c'est possible

• Cas où $n < 42 \Leftrightarrow n \leq 41$

$$\forall k \in \mathbb{N}, M^{k+1} = M^k \Leftrightarrow M^k(M - I_n) = 0 \Leftrightarrow \text{Ker}(M^k(M - I_n)) = \mathbb{R}^n$$

Supposons par l'absurde que $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$M^{41} \neq M^{42} \text{ et } M^{42} = M^{43}$$

Alors $\exists X_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $X_0 \neq 0$ et $X_0 \in \text{Ker}[M^{41}(M - I_n)]$

$$(M^k(M - I_n) X_0)_{k \in [0; 41]}$$

est libre et de cardinal 42. Absurde par le lemme de Steinitz

Autre démo:

$$M^{42} = M^{43}$$

$$\Leftrightarrow M^{42}(M - I_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Im}(I_n - M) \subset \text{Ker}(M^{42})$$

Exo 230: noyaux itérés : $\text{Ker}(M) \subsetneq \text{Ker}(M^2) \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ker}(M^r) = \text{Ker}(M^{r+1})$
où $r \leq n$.

Si $n \leq 41$, $r \leq 41$ donc $\text{Ker}(M^{41}) = \text{Ker}(M^{42})$
d'o   $\text{Im}(I_n - M) \subset \text{Ker}(M^{41}) \Rightarrow M^{41} = M^{42}$
 $\hookrightarrow$ absurde