

346, 234, 285, 286, 297, 298, 341, 246, 281, 304

284

TD du 2/10/2024

Suite exo 346

$$A^T A = \begin{pmatrix} \#B_1 p & \dots & p \\ p & \dots & p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p & \dots & \#B_m p \end{pmatrix}$$

montrons que $A^T A$ est inversible

$$A^T A \sim \begin{pmatrix} \#B_1 p - \#B_1 & \dots & p - \#B_1 \\ p & \dots & p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p & \dots & \#B_m p \end{pmatrix} \quad \forall i \in \llbracket 2, m \rrbracket$$

$$C_i \leftarrow C_i - C_1$$

On a déjà montré que s'il existe $i \in \llbracket 2, m \rrbracket$ t. $\#B_i = p$ alors il est unique

quitte à permutter les B_i , on suppose que $\forall i \in \llbracket 2, m \rrbracket$

$$A^T A \sim \begin{pmatrix} \alpha p - \#B_1 & \dots & p - \#B_1 \\ p & \dots & p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p & \dots & \#B_m p \end{pmatrix} \quad \forall i \in \llbracket 2, m \rrbracket \quad C_i \leftarrow C_i - p C_1$$

avec $\alpha = \#B_1 - \sum_{i=2}^m \frac{p(p - \#B_i)}{\#B_i - p}$

si $\#B_i = p$ alors $\alpha = p > 0$ d'où $A^T A$ inv

si $\#B_i > p$:

$$\alpha = \#B_1 - \sum_{\#B_i > p} \frac{p(p - \#B_i)}{\#B_i - p} < 0 \quad \text{d'où } \alpha > 0 \quad \text{et } A^T A \text{ inv}$$

Par la 41 $m \leq n$.

Exo 284

a. $(1-X)^{n-j} = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-1)^k X^k$

dc $S_j = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-1)^k X^{k+j}$
 $= \sum_{k=j}^n \binom{n-j}{k-j} (-1)^{k-j} X^k$

$$P = \begin{pmatrix} S_0 & & & S_n \\ 1 & 0 & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{K})$$

$$P_{i,j} = 0 \quad \text{si } i < j.$$

$$P_{i,j} = \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j}$$

b. famille échelonnée en valuation donc libre
 plus bon nombre d'éléments. $\Rightarrow$ base

c. $X^n = S_n$

$$X^{n-1} = X^{n-2}(1-X) + X^n$$

mg $X^k = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} S_{j+k} = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} X^{j+k} (1-X)^{n-j-k}$
 $= X^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} X^j (1-X)^{n-k-j}$
 $= X^k$

$$P_{i,j}^{-1} = 0 \quad \text{si } i < j$$

$$= \binom{n-j}{i-j} \quad \text{si } i \geq j.$$

Exo 285

a.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$

$$\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$$

$(I_n, A, \dots, A^{n^2})$ de cardinal n^2+1 donc d'après le lemme de Steinitz elle est liée.

d'où l'existence de $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $P(A) = 0$.

$$k = \text{val } P \quad d = \deg P$$

$$\begin{aligned} P_A &= p_k A^k + \dots + p_d A^d = 0 \\ &= A^k (p_k I_n + \dots + p_d A^{d-k}) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\text{donc } A^{k-k} P(A) = p_k I_n + \dots + p_d A^{d-k} = 0 = Q(A).$$

$$Q(0) = p_k I_n \neq 0.$$

b.

$$P(X) = p_0 + p_1 X + \dots + p_d X^d$$

$$\begin{aligned} P(A)B &= p_0 B + p_1 AB + \dots + p_d A^d B = p_0 B + \underbrace{p_1 CD + \dots + p_d C^d D}_{= P(C)D - p_0 D} \\ &= p_0 (B-D) + P(C)D = P(C)D - p_0 D \end{aligned}$$

$P_A \rightarrow$ polynôme annulateur de A $P_A(0) \neq 0$

$P_C \rightarrow$ polynôme annulateur de C $P_C(0) \neq 0$.

$$Q = P_A P_C \quad \text{tq} \quad Q(0) \neq 0$$

$$Q(A)B = Q(0)(B-D) + Q(C)D. \quad \Rightarrow \quad \underset{\uparrow}{Q(0)}(B-D) = 0$$

d'où $B = D$.

Exo 286

a. th du rang: $\dim(\ker u) = p$

$$u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

donc $\operatorname{Im} u \subset \ker u$. donc $r \leq p$.

$$\text{donc } 2r \leq r+p = n.$$

$$\text{ie } 2r \leq n.$$

b

$$\text{on } \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow p \\ \downarrow r \end{matrix} \begin{matrix} \xrightarrow{p} \\ \xrightarrow{r} \end{matrix} \begin{matrix} p \\ r \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow r \\ \downarrow p \end{matrix}$$

analyse Synthèse:

analyse • Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une telle base:

$$\forall i \in [1, n] \quad u(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq i \leq p \\ e_{i-p} & \text{sinon.} \end{cases}$$

synthèse • Soit F un supplémentaire de $\ker u$ dans E .

$$\text{On a } \dim F = r$$

soit $(e_1, \dots, e_r)$ base de F .

$(u(e_1), \dots, u(e_r))$ famille libre de $\ker u$

car $\operatorname{Im} u \subset \ker u$ et théorème noyau image.

On complète en une base de $\ker u$

$$B = (u(e_1), \dots, u(e_r), f_1, \dots, f_p).$$

$B = (u(e_1), \dots, u(e_r), f_1, \dots, f_p, e_1, \dots, e_r)$ base adaptée à $E = \ker u \oplus F$

$$\text{mg } \operatorname{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $(a_1, \dots, a_m) = B$

$$\forall i \in [1, m] \quad \mu(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq p \text{ (dans la majeure)} \\ \mu(a_{i-p}) = a_{i-p} & \text{si } p+1 \leq i \leq m \end{cases}$$

donc ça marche

c. mg (μ) est un sev de $\mathcal{L}(E)$ et $\dim(\mathcal{L}(\mu)) = n^2 + p^2$.

• Soient $(v, w, \lambda) \in (\mathbb{K})^2 \times \mathbb{R}$

$$\mu(v + \lambda w) = \mu v + \lambda \mu w = v \circ \mu + \lambda w \circ \mu = (v + \lambda w) \circ \mu.$$

donc $(v + \lambda w) \in \mathcal{L}(\mu)$. et $\mathcal{L}(\mu) \subset \mathcal{L}(E)$.

• analyse : soit $v \in \mathcal{L}(E)$

d'après ce qu'on a fait, $\exists B$ base de E tq :

$$\text{mat}_B(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

on pose $\text{mat}_B(v) = V$

Soient $(A, B, C, D) \in M_{p, n}(\mathbb{K}) \times M_{p, p}(\mathbb{R}) \times M_{n, n}(\mathbb{R}) \times M_{n, p}(\mathbb{R})$

$$\text{tq} \quad V = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow p \\ \uparrow n \end{matrix}$$

$\xrightarrow{n}$

$\xrightarrow{p}$

On a $v \circ \mu = \mu \circ v$ donc $VU = UV$

$$\text{ie} \quad \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow n \\ \uparrow p \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow p \\ \uparrow n \end{matrix}$$

$\xrightarrow{n}$

$\xrightarrow{p}$

on en déduit que $\begin{cases} C = 0 \\ \text{si } A = \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } D = [C_1 - C_p] \end{cases}$

donc
$$\begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_p \end{bmatrix} = [C_{p,n} - C_n]$$

et
$$L_n = \dots = L_p = [0 \dots 0]$$

$$C_1 = \dots = C_{p-n+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donc V de la forme :

$$V = \left(\begin{array}{c|c} K & B \\ \hline 0 & 0 \end{array} \middle| K \right)_{p,n}$$

$\begin{matrix} \xleftrightarrow{R} & \xleftrightarrow{R} & \xleftrightarrow{R} \\ R & n-2n & 1 \end{matrix}$

Synthèse : pour $(K, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_p(\mathbb{R})$

$\left(\begin{array}{c|c} K & B \\ \hline 0 & 0 \end{array} \middle| K \right)$ commute avec U .

On en déduit $\dim(V) = p^2 + n^2$

Exo 297

Analyse :

On applique la trace à l'égalité :

$$\ln(M) + \ln(M) \ln(A) = \ln(B)$$

$$\ln(M) (1 + \ln(A)) = \ln(B)$$

Cas 1 : $\ln(A) = -1$ et $\ln(B) \neq 0$ pas de solution car égalité pas vérifiée

Cas 2 : $\ln(A) \neq -1$

donc $\ln(M) = \frac{\ln(B)}{1 + \ln(A)}$ donc $M = B - \frac{\ln(B)}{1 + \ln(A)} A$

Cas 3: $\ln(A) = -1$ et $\ln(B) = 0$.

on a $M = -\frac{\epsilon}{\ln(M)} A + B$.

$$M = \eta A + B \quad \eta \in \mathbb{C}.$$

reciproquement:

1. $M = \eta A + B \quad \eta \in \mathbb{C}$

$$\forall \eta \in \mathbb{C} \quad \ln(M) = \ln(\eta A + B) = -\eta$$

on a alors $M + \ln(M)A = \eta A + B - \eta A = B$ donc M est solution.

Exo 298 Q4

$M, \exists (A, B) \in M_n(\mathbb{R}) \quad M = AB - BA$

$$M \sim N \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on cherche $(X, Y) \in M_n(\mathbb{R}), N = XY - YX$

on cherche $X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_m \end{pmatrix} \quad N = (a_{ij})_{i,j} \quad Y = (y_{ij})_{i,j}$

$$XY[i,j] = x_i y_{ij}$$

$$YX[i,j] = x_j y_{ij}$$

$$(XY - YX)[i,j] = (x_i - x_j) y_{ij}$$

si on choisit les x_i $2 \times 2 \neq$

on pose $\forall i,j \quad i \neq j \quad y_{ij} = \frac{a_{ij}}{x_i - x_j}$

$$\forall i \quad y_{ii} = 0$$

donc $XY - YX = N$

$$\begin{aligned} \exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \quad M &= PNP^{-1} = P(XY - YX)P^{-1} \\ &= \underbrace{(PXP^{-1})}_{B} \underbrace{(PY P^{-1})}_A - \underbrace{(PY P^{-1})}_A \underbrace{(PXP^{-1})}_B \end{aligned}$$

Exo 341

Par contraposée:

Supposons que A n'est pas une homothétie

A n'est pas une homothétie $\Leftrightarrow \exists x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

(Ax, x) est une famille libre

On la complète en une base

$(x, Ax, x_3, \dots, x_n)$ base de $\mathbb{R}^n$.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est nilpotente}$$

$$ANx = 0$$

$$\underbrace{AN(Ax)}_x = Ax \neq 0$$

$$AN(AN(Ax)) = AN(Ax) = Ax \neq 0$$

d'où AN pas nilpotent.

Exo 246

$$q_1, \dots, q_p \in \mathcal{L}(E)^p \quad \text{t.q.} \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad \text{rg}(q_i) = 1.$$

$$\begin{cases} q_i \circ q_i \neq \tilde{0} \\ q_i \circ q_j = 0 \quad \forall i \neq j. \end{cases}$$

$$\text{rg } p \leq n$$

$$\forall i \in \{1, \dots, p\} \quad \text{rg}(q_i) = 1$$

$$\exists c_i \in E, \quad c_i \neq 0, \quad \forall i \quad q_i = \text{Vect}(c_i)$$

$$\bullet \quad q_i \circ q_i \neq \tilde{0} \quad \text{d'où} \quad S_i \oplus \text{Ker } q_i = E$$

$$\bullet \quad \forall i \neq j \quad q_i \circ q_j = 0 \Rightarrow \text{Vect}(c_i) \subset \text{Ker } q_j \quad \text{pour } i \neq j.$$

$\lambda_q (e_1, \dots, e_p)$ libre

soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tq $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0$

soit i_0 tq $\lambda_{i_0} \neq 0$ $\lambda_{i_0} e_{i_0} = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^p \lambda_i e_i$

$\lambda_{i_0} \varphi_{i_0}(e_{i_0}) = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^p \lambda_i \varphi_{i_0}(e_i) = 0$ absurde

donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ libre $\Rightarrow p \leq n$.

Exo 281

$(A, B) \in M_n(\mathbb{R})$ $AB + A + B = 0$

1. A diag a coef $2 \times 2 \neq$

soit $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$

$$[AB + A + B]_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right) + a_{i,j} + b_{i,j} = 0$$

en diag $\hookrightarrow a_{i,i} b_{i,i} + a_{i,i} + b_{i,i} = 0$

$$\begin{cases} \text{si } i \neq j & (a_{i,i} + 1) b_{i,j} = 0 \\ \text{si } i = j & a_{i,i} b_{i,i} + a_{i,i} + b_{i,i} = 0 \Rightarrow a_{i,i} \neq -1 \text{ (sinon } -1=0) \end{cases}$$

donc $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ $i \neq j$ $b_{i,j} = 0$

donc B est diagonale.

2. $AB + A + B = 0 \Leftrightarrow AB + 0 + B + I_n = I_n$

$\Leftrightarrow (A + I_n)(B + I_n) = I_n$

$\begin{matrix} \text{SG lin}(V) \\ \Rightarrow d_i \neq -1 \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{matrix} \Rightarrow B + I_n = \text{diag} \left(\frac{1}{a_1+1}, \dots, \frac{1}{a_n+1} \right)$

Exo 304

Ng $\dim \ker f^2 = 2m$.

- $\dim f \subset \ker f^2$ donc $2m \leq \dim \ker f^2$
- th du rang à $f|_{\dim f}$

$$\text{donc } \text{rg}(f) = \text{rg } f^2 + \dim(\ker f \cap \dim f)$$

$$\text{donc } \underset{\leq 2m}{\text{rg}(f^2)} = \underset{\leq m}{\text{rg}(f)} - \dim(\ker f \cap \dim f)$$

$$\text{donc } \text{rg } f^2 \geq m.$$

th du rang à f^2 donc $3m = \text{rg } f^2 + \dim \ker f^2$

$$\text{donc } \dim \ker f^2 \leq 2m.$$

$$\text{d'où } \dim \ker f^2 = 2m.$$

soit S un supplémentaire de $\ker f^2$ dans E .

$$\text{ic } E = S \oplus \ker f^2$$

$(e_1, \dots, e_m)$ base adaptée

$$e = (e_1, \dots, e_m, f(e_1), \dots, f(e_m), f^2(e_1), \dots, f^2(e_m))$$

Ng e est libre.

$$\text{soit } ((\lambda_1, \dots, \lambda_m) \times (\mu_1, \dots, \mu_m) \times (\nu_1, \dots, \nu_m)) \in \mathbb{K}^{3m} \text{ tq}$$

$$\sum \lambda_i e_i + \sum \mu_i f(e_i) + \sum \nu_i f^2(e_i) = 0$$

$$\sum \lambda_i f^2(e_i) = f^2(\sum \lambda_i e_i) \in \ker f^2 \cap S = 0$$

$$\sum \lambda_i e_i = 0 \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$$

$$\sum \mu_i f(e_i) = 0 \quad \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$$

$$\nu_1 = \dots = \nu_m = 0.$$