

Exercice 214

Soit E un \mathbb{C} -espace.

$P_1 + P_2$ projection. On note $n = \dim E$. Soit P_1, P_2 2 projections telles que $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 = 0$.

$$\text{(H)} \quad P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 = 0.$$

$$\begin{aligned} (P_1 + P_2) \circ (P_1 + P_2) &= P_1 \circ P_1 + P_1 \circ P_2 + P_2 \circ P_1 + P_2 \circ P_2 \\ &= P_1 + P_2. \end{aligned}$$

\Rightarrow $P_1 + P_2$ projecteur.

$$(P_1 + P_2) \circ (P_1 + P_2) = P_1 + P_2 + P_1 \circ P_2 + P_2 \circ P_1$$

$$\Rightarrow P_1 \circ P_2 + P_2 \circ P_1 = 0$$

$$\Rightarrow P_1 \circ P_2 + P_1 \circ P_2 \circ P_1 = 0$$

$$\Rightarrow P_1 \circ P_2 \circ P_1 + P_2 \circ P_1 = 0$$

$$\Rightarrow P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 \Rightarrow P_1 \circ P_2 = P_1 \circ P_2 = 0.$$

Exercice 215:

a) $f^2 = 0 \Rightarrow \text{Im } f \subset \text{Ker } f$. donc $\text{rg } f \leq \dim \text{Ker } f$.
 Par le th de rang, $\dim E = \text{rg } f + \dim \text{Ker } f \leq 2 \dim \text{Ker } f$.
 Donc $\dim \text{Ker } f \geq \frac{\dim E}{2}$.

b) Mq $E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } g$

• Soit $x \in \text{Ker } f \cap \text{Ker } g$. $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0 \end{cases}, \quad x = \{0_E\}$ donc

Donc $\text{Ker } f + \text{Ker } g = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } g$.

• $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Ker } g = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Ker } g$.

$$\geq \frac{\dim E}{2} \quad \geq \frac{\dim E}{2}$$

$$\geq \dim E.$$

Donc $\text{Ker } f \oplus \text{Ker } g = E$

On a $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$

Mq $\text{rg } f = \dim \text{Ker } f$.

• $\text{Ker } f = \dim E - \dim \text{Ker } g \geq \frac{\dim E}{2}$.

dans le cas où $f = \frac{\dim E}{2}$. $\Rightarrow \operatorname{rg} f = \frac{\dim E}{2}$

donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} g$.

Exercice 216

$\boxed{\Rightarrow}$ (H) $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u^2$

Comme $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u \Rightarrow \operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$

$\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u$.

Or, $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u^2 + \dim \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u \Rightarrow \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u) = 0$
 $\Rightarrow \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

On note $u \mid_{\operatorname{Im} u}$ pour jumelle du rang.

$\dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Im} u \mid_{\operatorname{Im} u} + \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u)$
 $= \dim \operatorname{Im} u^2 = \operatorname{rg} u^2$.

$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u \subset E \\ \text{égalité dimension} \end{array} \right. \Rightarrow E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Par formule du rang appliquée à $u \mid_{\operatorname{Im} u}$.

$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u^2 + \dim \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$$

$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u^2.$$

Exercice 221 :

$$P \in \operatorname{Ker} f. \quad f(P) = 0 \Leftrightarrow P(2) = -P(-2)$$

; a copier

Réurrence décente

$$h(n) : \quad P(n) = -P(-n)$$

$$\begin{aligned} P(n+1) &= 2P(n) - P(n-1) \\ &= -2P(-n) + P(-n+1) \\ &= -P(n-1) \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = -P(-n)$

Donc $P(X) + P(-X) = 0 \Rightarrow P(X) = -P(-X) \Rightarrow P est impaire$

Dès lors P' est impaire (P impair $\Rightarrow P'$ pair)

Exercice 229.

Supposons

que $g \in H$ et f un morphisme

$$\text{telle que } f \circ g = 0 \Leftrightarrow g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0.$$

Donc $H = \{0\}$.

2)

Soit $g \in H$ $g(\text{Im } f) \subset \text{Ker } f$. Soit S telle que $S \oplus \text{Im } g = F$

$$\begin{cases} n = \dim E \\ p = \dim F \\ r = \text{rg } f \end{cases}$$

Soit

$$\psi : \begin{cases} H \longrightarrow \mathcal{X}(\text{Im } f, \text{Ker } f) \times \mathcal{X}(S, E) \\ g \longmapsto (g|_{\text{Im } f}, g|_S) \end{cases}$$

morphismes

Donc $\dim H = r(n-r) + (p-r)n$.

$$\boxed{\dim H = mp - r^2}$$

$g \in H \Leftrightarrow g(\text{Im } f) \subset \text{Ker } f$. $F = \overline{S \oplus \text{Im } f}$. base $(f_1, -f_2, -f_p)$

$$\text{met } (f_1, -f_p) \text{ ligne} = \left(\begin{array}{ccc|c} g(f_1) & g(f_2) & g(f_p) & \\ \hline & X & X & \\ & 0 & X & \\ & & & \end{array} \right) \text{ matrice } \overset{n-r}{\underset{p-r}{\text{Ker } f}} \oplus \text{base } (e_1, -e_{p-1}, -e_n)$$

base du $\text{Ker } f$.

$$\begin{aligned} \dim H &= nb \text{ de coeff qui varient indépendamment} \\ &= r(n-r) + m(p-r) \\ &= mp - r^2. \end{aligned}$$

$r \in \{0, n\}$

Exercice 239:

Soit E un K -espace. On met $n = \dim E$

$$\dim \text{Ker } f \leq \dim \text{Ker } f^2 \leq 2 \dim \text{Ker } f.$$

 $\textcircled{1} \quad \textcircled{2}$

$$\textcircled{1} \quad \text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2 \Rightarrow \dim \text{Ker } f \leq \dim \text{Ker } f^2.$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Soit } u = f|_{\text{Im } f}.$$

$$\begin{aligned} \text{rg } f &= \text{rg } u + \dim \text{Ker } u \\ &= \text{rg } f^2 + \dim \text{Ker } f \cap \text{Im } u \end{aligned}$$

~~$\text{rg } f = \text{rg } f^2$~~

$$\Rightarrow P' = 0$$

Donc $\text{Ker } f = \{0\}$. / NON

Sur \mathbb{R}^2 .

$$f(x^k) = (x+1)^k - 2x^2 + (x-1)^k.$$
$$= k(k-1)x^{k-2} + \alpha(x) \quad \deg \alpha < k-2.$$

On a $\{(x^k)_{k \geq 2}\}$ dans de E
l'unique droite dans par f est une ligne de $[RE]$.

Donc f isomorphisme de E de $[RE]$

Exercice 277:

\boxed{C} $y \in \text{Im } f : \exists n \in E, y = f(n)$

$$f^4(y) = f^5(n) = f^3(f^2(n)) = 0_E.$$
$$\underbrace{f^4(f(n))}_{y}$$

Donc $y \in \text{Ker } f^4 \Rightarrow \text{Im } f \subset \text{Ker } f^4$.

\boxed{D} Soit $x \in \text{Ker } f^4, f^4(x) = 0_E$.

$$\underbrace{f^3(f(x))}_{\in \text{Im } f^2} = 0_E$$

$$\Rightarrow \exists \alpha \in E, f(x) = f^2(\alpha)$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(x-f(\alpha))}_{\in \text{Ker } f} = 0_E$$

$$\in \text{Ker } f \Rightarrow \in \text{Ker } f^2 = \text{Im } f^2.$$

$$\Rightarrow \exists \beta \in E \quad f^2(\beta) = x - f(\alpha)$$

$$\Rightarrow x = f(\alpha) + f^2(\beta)$$

$$x = f(\alpha + f(\beta))$$

$$\Rightarrow x \in \text{Im } f$$

$$\text{alors } \text{Im } f = \text{Ker } f^4.$$

TDR: à f puis ci f^2 .

$$\left\{ \begin{array}{l} n = \deg f + \dim \text{Ker } f \\ n = \deg f^2 + \dim \text{Ker } f^2 \end{array} \right.$$

Dans

$$\deg f - \deg f^2 = \dim \text{Ker } f^2 - \dim \text{Ker } f \\ = \dim (\text{Ker } f \cap \text{Im } f)$$

$$\Rightarrow \dim \text{Ker } f^2 = \dim \text{Ker } f \cap \text{Im } f + \dim \text{Ker } f.$$

$$\text{Or } \dim \text{Ker } f \cap \text{Im } f \leq \dim \text{Ker } f.$$

b'ain $\boxed{\dim \text{Ker } f^2 \leq 2 \dim \text{Ker } f.}$

Exercice 188:

Théorème E_f: $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ tq $f \circ f \circ f + f \circ f + f = 3 \text{ Ide.}$

Analysn: Sat $f \in E$. Sat $(n, n') \in \mathbb{N}^{*2}$ tq $f(n) = f(n')$.

$$\Rightarrow (f \circ f)(n) = (f \circ f)(n')$$

$$\Rightarrow (f \circ f \circ f)(n) = (f \circ f \circ f)(n')$$

$$\Rightarrow 3n = 3n'$$

$$\Rightarrow n = n'.$$

Dans f injectiv.

Mq $f = \text{id}_{\mathbb{N}^*}$.

Init:

$$f \circ f(1) + f \circ f(1) + f(1) = 3.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ((f \circ f \circ f)(1) - 1) + ((f \circ f)(1) - 1) + f(1) - 1 = 0. \\ f \circ f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^* \end{array} \right. \Rightarrow (f \circ f \circ f)(1) \geq 1.$$

$$\Rightarrow (f \circ f)(1) \geq 1.$$

Dans $f(1) = 1$.

Hinweise: Satz $n \in \mathbb{N}^*$ tq $f(k) = \varphi_k \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Par l'absurde, on suppose que $f(n+1) = n_0$ avec $n_0 < n$
Or, $f(n_0) = n_0 = f(n+1) \Rightarrow n_0 = n+1$ absurde
Injectivité

Idem pour $(f \circ f)(n+1)$
 $(f \circ f \circ f)(n+1)$
 \vdots

Done $f(n+1) \geq n+1$
 $(f \circ f)(n+1) \geq n+1$.
 $(f \circ f \circ f)(n+1) \geq n+1$.

$$(f \circ f \circ f)(n+1) + (f \circ f)(n+1) + f(n+1) \geq 3n+3.$$

$$\text{Or, } (f \circ f \circ f)(n+1) - n+1 + f(n+1) - (n+1) + f(n+1) - 1 = 0.$$

Done $f(n+1) = n+1$.

Exercice 217: sat $n = \dim E$
* $n \neq 0_E$ $\{x\}$ libra . on prend (x, e_1, \dots, e_n) basis de E .

$$\begin{cases} f(x) = y. \\ f(e_i) = 0 \quad \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket \end{cases}$$

* $n = 0_E \rightarrow y = 0_E$

* $\rightarrow y \neq 0_E \not\exists f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ tq } f(x) = y$.

Exercice 220:

$\boxed{\subseteq}$ (H) $f(F) \subset F$

Sat $x \in E, \exists (w, y) \in F \times G \text{ tq } x = w + y$.

$$g \circ p \circ f(x) = g \circ f(w) \underbrace{= 0}_{\in F} \Rightarrow g \circ f \circ p = 0.$$

$\boxed{\supseteq}$ (H) $g \circ p \circ f = 0$.

Sat $x \in F, f(x) = g \circ p(x)$

$$g \circ f(x) = g \circ f \circ p(x) = 0 \Rightarrow f(x) \in F$$

Exercice 238:

V espace de dimension finie, $a, b \in \mathcal{L}(V)$, $\mu \in \mathcal{L}(E)$ tq $\mu \neq 0$. $\begin{cases} u \circ a = a \circ u \\ u \circ b = b \circ u \end{cases}$

$(u \circ a)(V) = (a \circ u)(V) \subset V$

$u(V)$ est stable par a idem pour b .

$u(V) = V$ ou $u(V) = \{0\}$.

On u non nul donc $u(V) = V$.

$(u \circ a)(Ker u) = (a \circ u)(Ker u) = \{0\}$.

Bonc $a(Ker u) \subset Ker u$. Idem pour b .

$Ker u = V$ ou $Ker u = \{0\}$.

On u non nul donc $Ker u \neq V$ donc $Ker u = \{0\}$.

Exercice 227.

$F \oplus S = G \oplus S = E \Rightarrow \dim F = \dim G$.

Lemme 1: A, B 2 sous-espaces de E : $A \cup B$ sous-espaces de E si ACB et $B \subset A$.

OR

contreposition: $x \in A \setminus B$ et $y \in B \setminus A$. $x, y \in A \cup B$, $x+y \notin A \cup B$.

(a_1, \dots, a_p)

base de vecteurs de E .

(b_1, \dots, b_p)

$p \leq m-1$.

A, B

$A \cup B \subset E \Rightarrow A \cup B \neq E \Rightarrow \exists x \in E \setminus (A \cup B) \neq 0_E$.

(a_1, \dots, a_p, x) vecteur de E .

Exercice 214

Sat E un \mathbb{C} -v. $P_1 + P_2$ projecteur. On note $n = \dim E$. Sat P_1, P_2 2 projecteurs.

$$\text{(H)} \quad P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 = 0.$$

$$(P_1 + P_2) \circ (P_1 + P_2) = P_1 \circ P_1 + P_1 \circ P_2 + P_2 \circ P_1 + P_2 \circ P_2 \\ = P_1 + P_2.$$

\Rightarrow $P_1 + P_2$ projecteur.

$$(P_1 + P_2) \circ (P_1 + P_2) = P_1 + P_2 + P_1 \circ P_2 + P_2 \circ P_1$$

$$\Rightarrow P_1 \circ P_2 + P_2 \circ P_1 = 0$$

$$\Rightarrow P_1 \circ P_2 \circ P_1 + P_2 \circ P_1 = 0$$

$$\Rightarrow P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 \Rightarrow P_1 \circ P_2 = P_1 \circ P_2 = 0.$$

Exercice 215:

a) $f^2 = 0 \Rightarrow \text{Im } f \subset \text{Ker } f$. donc $\text{rg } f \leq \dim \text{Ker } f$.
 Par le th de rang, $\dim E = \text{rg } f + \dim \text{Ker } f \leq 2 \dim \text{Ker } f$.
 Donc $\dim \text{Ker } f \geq \frac{\dim E}{2}$.

b) Mq $E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } g$

• Sat $x \in \text{Ker } f \cap \text{Ker } g$. $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0 \end{cases}, \quad u(x) = 0$ donc $x = \{0_E\}$.

Donc $\text{Ker } f + \text{Ker } g = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } g$.

• $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Ker } g = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Ker } g$.
 $\geq \frac{\dim E}{2} \quad \geq \frac{\dim E}{2}$
 $\geq \dim E$.

Donc $\text{Ker } f \oplus \text{Ker } g = E$

On a $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$

Mq $\text{rg } f = \dim \text{Ker } f$.

• $\text{Ker } f = \dim E - \dim \text{Ker } g \geq \frac{\dim E}{2}$.

dans le dim Ku f = $\frac{\dim E}{2}$. $\Rightarrow \operatorname{rg} f = \frac{\dim E}{2}$

donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} g$.

Exercice 216

$\boxed{1 \Rightarrow}$ $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u^2$

Comme $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u \Rightarrow \operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$

$\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u$.

Or, $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u^2 + \dim \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u \Rightarrow \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u) = 0$
 $\Rightarrow \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

On note $u \mid_{\operatorname{Im} u}$ pour jumelle du rang.

$\dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Im} u \mid_{\operatorname{Im} u} + \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u)$
 $= \dim \operatorname{Im} u^2 = \operatorname{rg} u^2$.

$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u \subset E \\ \text{égalité dimension} \end{array} \right. \Rightarrow E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

$\boxed{2 \Leftarrow}$ Supposons $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Par jumelle du rang appliquée à $u \mid_{\operatorname{Im} u}$.

$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u^2 + \dim \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$

$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u^2$.

Exercice 221 :

$P \in \operatorname{Ker} f$. $f(P) = 0 \Leftrightarrow P(2) = -P(-2)$

; a copier

Réurrence décente

$H(n) : P(n) = -P(-n)$

$$\begin{aligned} P(n+1) &= 2P(n) - P(n-1) \\ &= -2P(-n) + P(-n+1) \\ &= -P(n-1) \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = -P(-n)$

Donc $P(X) + P(-X) = 0 \Rightarrow P(X) = -P(-X) \Rightarrow P \text{ est impair}$

Dès lors P' est impair ($P \text{ impair} \Rightarrow P' \text{ pair}$)

Exercice 229.

Supposons

que $g \in H$ et f un morphisme

$$f \circ g = 0 \Leftrightarrow g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0.$$

Donc $H = \{0\}$.

2) Soit $g \in H$ $g(\text{Im } f) \subset \text{Ker } f$. Soit S telle que $S \oplus \text{Im } g = F$

$\begin{cases} n = \dim E \\ p = \dim F \\ r = \text{rg } f \end{cases}$ Soit $\psi : \begin{cases} H \longrightarrow \mathcal{X}(\text{Im } f, \text{Ker } f) \times \mathcal{X}(S, E) \\ g \longmapsto (g|_{\text{Im } f}, g|_S) \end{cases}$ morphism

Donc $\dim H = r(n-r) + (p-r)n$.

$$\boxed{\dim H = mp - r^2}$$

$$g \in H \Leftrightarrow g(\text{Im } f) \subset \text{Ker } f. \quad F = \overline{S \oplus \text{Im } f}. \quad \text{base } (f_1, -f_2, -f_p)$$

met $(f_1, -f_p)$ ligne

$$= \begin{pmatrix} g(f_1) & g(f_2) & g(f_p) \\ \hline \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{matrix} E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ m \times (p-r) \end{matrix}$$

base du $\text{Ker } f$.

$\dim H = nb \text{ de coeff qui varient indépendamment}$

$$= r(n-r) + m(p-r)$$

$$= mp - r^2.$$

Exercice 230:

Soit E un K.v. On met $n = \dim E$

$$\dim \text{Ker } f \leq \dim \text{Ker } f^2 \leq 2 \dim \text{Ker } f.$$

$$\textcircled{1} \quad \text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2 \Rightarrow \dim \text{Ker } f \leq \dim \text{Ker } f^2.$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Soit } u = f|_{\text{Im } f}.$$

$$\begin{aligned} \text{rg } f &= \text{rg } u + \dim \text{Ker } u \\ &= \text{rg } f^2 + \dim \text{Ker } f \cap \text{Im } u \end{aligned}$$

~~rg f = rg f²~~

$$\Rightarrow P' = 0$$

Donc $\text{Ker } f = \{0\}$. / N.O.N

Sur \mathbb{A}^2 .

$$\begin{aligned} f(x^k) &= (x+1)^k - 2x^2 + (x-1)^k \\ &= k(k-1)x^{k-2} + Q(x) \quad \deg Q < k-2. \end{aligned}$$

On a $\{(x^k)_{k \geq 2}\}$ dans de E
l'unique de cette base par laquelle f n'est pas un élément de $[RE]$.

Donc f automorphisme de E de $[RE]$

Exercice 277:

$y \in \text{Im } f : \exists n \in E, y = f(n)$

$$f^4(y) = f^5(n) = f^3(f^2(n)) = 0_E.$$

Donc $y \in \text{Ker } f^4 \Rightarrow \text{Im } f \subset \text{Ker } f^4$.

Soit $n \in \text{Ker } f^4, f^4(n) = 0_E$.

$$f^3(\underbrace{f(f(n))}_{\in \text{Im } f^2}) = 0_E$$

$$\Rightarrow \exists \alpha \in E, f(n) = f^2(\alpha)$$

$$\Rightarrow f(\underbrace{n-f(\alpha)}_{\in \text{Ker } f}) = 0_E$$

$$\in \text{Ker } f \Rightarrow \in \text{Ker } f^2 = \text{Im } f^2.$$

$$\Rightarrow \exists \beta \in E \quad f^2(\beta) = n - f(\alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha = f(\alpha) + f^2(\beta)$$

$$n = f(\alpha + f(\beta))$$

$$\Rightarrow n \in \text{Im } f$$

$$\text{alors } \text{Im } f = \text{Ker } f^4.$$

TDR: à f puis ci f^2 .

$$\left\{ \begin{array}{l} n = \deg f + \dim \text{Ker } f \\ n = \deg f^2 + \dim \text{Ker } f^2 \end{array} \right.$$

Dans

$$\deg f - \deg f^2 = \dim \text{Ker } f^2 - \dim \text{Ker } f \\ = \dim (\text{Ker } f \cap \text{Im } f)$$

$$\Rightarrow \dim \text{Ker } f^2 = \dim \text{Ker } f \cap \text{Im } f + \dim \text{Ker } f.$$

Or $\dim \text{Ker } f \cap \text{Im } f \leq \dim \text{Ker } f$.

Donc $\boxed{\dim \text{Ker } f^2 \leq 2 \dim \text{Ker } f}$.

Exercice 1983:

Théorème E: $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ tq $f \circ f \circ f + f \circ f + f = 3 \text{ Ide.}$

Analyse: Sat $f \in E$. Sat $(n, n') \in \mathbb{N}^{*2}$ tq $f(n) = f(n')$.

$$\Rightarrow (f \circ f)(n) = (f \circ f)(n')$$

$$\Rightarrow (f \circ f \circ f)(n) = (f \circ f \circ f)(n')$$

$$\Rightarrow 3n = 3n'$$

$$\Rightarrow n = n'.$$

Dans f injective.

Mq $f = \text{id}_{\mathbb{N}^*}$.

Initialisation: $f \circ f(1) + f \circ f(1) + f(1) = 3$.

$$\left\{ \begin{array}{l} ((f \circ f \circ f)(1) - 1) + ((f \circ f)(1) - 1) + f(1) - 1 = 0 \\ f \circ f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^* \end{array} \right. \Rightarrow (f \circ f \circ f)(1) \geq 1.$$

$$\Rightarrow (f \circ f)(1) \geq 1.$$

Dans $f(1) = 1$.

Hinweise: Satz $n \in \mathbb{N}^*$ tq $f(k) = p_k \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Par l'absurde, on suppose que $f(n+1) = m_0$ avec $m_0 < n$
 $\text{Or, } f(m_0) = m_0 = f(n+1) \Rightarrow m_0 = n+1 \quad \text{absurde}$

Idem pour $(f \circ f)(n+1)$
 $(f \circ f \circ f)(n+1)$
 \vdots

Done $f(n+1) > n+1$
 $(f \circ f)(n+1) > n+1$.
 $(f \circ f \circ f)(n+1) > n+1$.

$$(f \circ f \circ f)(n+1) + (f \circ f)(n+1) + f(n+1) \geq 3n+3.$$

$$\text{Or, } (f \circ f \circ f)(n+1) - n+1 + f(n+1) - (n+1) + f(n+1) - 1 = 0.$$

Done $f(n+1) = n+1$.

Exercice 217: sat $n = \dim E$
 $\times n \neq 0_E \quad \{x\} \text{ libre} \quad . \quad \text{on prend } (x, e_2, \dots, e_n) \text{ base de } E.$

$$\begin{cases} f(x) = y. \\ f(e_i) = 0 \quad \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket \end{cases}$$

$\times n = 0_E \rightarrow y = 0_E$

$\times \rightarrow y \neq 0_E \quad \not\exists f \in \mathcal{L}(E, F) \quad \text{tq } f(x) = y.$

Exercice 220:

$\boxed{\subseteq} \textcircled{(1)} f(F) \subset F$

Sat $x \in E, \exists (w, y) \in F \times G \quad \text{tq } x = w + y.$

$$g \circ p \circ f(x) = g \circ f(w) \underbrace{\circ p}_{\in F} = 0 \Rightarrow g \circ f \circ p = 0.$$

$\boxed{\supseteq} \textcircled{(2)} g \circ p \circ f = 0.$

Sat $x \in F, f(x) = g \circ p(x)$

$$g \circ f(x) = g \circ f \circ p(x) = 0 \Rightarrow f(x) \in F$$

Exercice 238:

V espace de dimension finie, $a, b \in \mathcal{L}(V)$, $\mu \in \mathcal{L}(E)$ tq $\mu \neq 0$. $\begin{cases} u \circ a = a \circ u \\ u \circ b = b \circ u \end{cases}$

$(a \circ u)(V) = (a \circ u)(V) \subset V$

$u(V)$ est stable par a idem pour b .

$u(V) = V$ ou $u(V) = \{0\}$.

On u non nul donc $u(V) = V$.

$(a \circ u)(Ku u) = (a \circ u)(Ku u) = \{0\}$.

Bonc $a(Ku u) \subset Ku u$. Idem pour b .

$Ku u = V$ ou $Ku u = \{0\}$.

On u non nul donc $Ku u \neq V$ donc $Ku u = \{0\}$.

Exercice 227:

$F \oplus S = G \oplus S = E \Rightarrow \dim F = \dim G$.

Lemme 1: A, B 2 sous-espaces de E : $A \cup B$ sous-espace de E si ACB et $B \subset A$.

OR

contreposition: $x \in A \setminus B$ et $y \in B \setminus A$. $x, y \in A \cup B$, $x+y \notin A \cup B$.

(a_1, \dots, a_p)
 (b_1, \dots, b_p) bases de vecteurs de E .

$p \leq m-1$.

A, B

$A \cup B \subset E \Rightarrow A \cup B \neq E \Rightarrow \exists x \in E \setminus (A \cup B) \quad x \neq 0_E$.

(a_1, \dots, a_p, x) vecteur de E .