

Jeudi 19.03. Exercice 15a (Jules)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $\forall n \in \mathbb{R}, P(n) \geq 0$.

On $\exists A, B \in \mathbb{R}[X]$ tq $P = A^2 + B^2$.

• Soit $(A, B, C, D) \in (\mathbb{R}[X])^4$.

$$\begin{aligned} (A^2 + B^2)(C^2 + D^2) &= (AC)^2 + (AD)^2 + (BC)^2 + (BD)^2 \\ &= \underbrace{(AC + BD)^2}_{\in \mathbb{R}[X]} + \underbrace{(AD - BC)^2}_{\in \mathbb{R}[X]} \end{aligned}$$

⇒ l'ensemble des sommes de polynômes au carré est stable par produit

• Supposons que P admette une racine réelle a de multiplicité m .

$P(X) = Q(X)(X-a)^m$ avec $Q(a) \neq 0$.

$P(a) \sim (x-a)^m$

si m impaire : P change de signe au voisinage de a
or $\forall n \in \mathbb{R}, P(n) \geq 0$ donc contradiction

donc toutes les racines réelles de P sont de multiplicité paire. $\Rightarrow m$ est paire, $m \in 2\mathbb{N}$

on a alors : $P = \prod_{i=1}^r (X-a_i)^{2m_i} \prod_{j=1}^s (X^2 + p_j X + q_j)^{l_j}$

Soit $j \in \{1, \dots, s\}$, $X^2 + p_j X + q_j = \left(X + \frac{p_j}{2}\right)^2 - \frac{p_j^2}{4} + q_j$

$$= \left(X + \frac{p_j}{2}\right)^2 + \frac{4q_j - p_j^2}{4}$$

$$= \left(X + \frac{p_j}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4q_j - p_j^2}}{2}\right)^2$$

donc (cf 1^{er} •) $\exists (A, B) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tq $P = A^2 + B^2$.

Jeudi 19.09 Exercice 159 (Olympique)

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. $U_n = \left\{ e^{\frac{2k\pi}{n}} : k \in \{0, n-1\} \right\}$

a) $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ triangles distincts.

b) si $n = 2h$ $\Rightarrow \frac{n}{2} \times (n-2)$ triangles rectangles.

Jeudi 19.09 Exercice 153 (Jules)

1. Montrer $\exists ! P_n \in \mathbb{R}[X]$, $\forall n \in \mathbb{Z}_0, \pi \in \mathbb{C}$, $P_n(\cotan^2(n)) = \frac{\sin((2n+1)\pi)}{\sin^2(n)}$

On remarque que $\sin((2n+1)\pi) = \text{Im}((e^{i\pi})^{2n+1})$

or, $(e^{i\pi})^{2n+1} = (\cos(n) + i \sin(n))^{2n+1}$

$$= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cos^k(n) \times (i \sin(n))^{2n+1-k}$$

$$= (\sin^{2n+1}(n) i) \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cotan^k(n) (i^2)^n \times (i)^{-k}$$

$i^{-k} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow k$ pair

d'où

on cherche à garder les termes réels

et ainsi, (en ne gardant que les termes k pair)

$$\sin((2n+1)\pi) = \sin^{2n+1}(n) \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} \cotan^{2k}(n) (-1)^{n-k}$$

en posant $P_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} X^k (-1)^{n-k}$

on parvient au résultat souhaité.

2. $n_k = \frac{k\pi}{2n+1} \quad \forall k \in \{1, n\}$

$\cotan^2$ est bij sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

$\cotan^2(m_k)$ sont n racines distinctes de P .
 or $\deg P = n$ donc ce sont toutes ses racines

$$P_n = \underbrace{\binom{2n+1}{2n}}_{=2n+1} \left(X^n - \underbrace{\frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{2n-2}}_{= \sigma_1 = \text{somme de toutes les racines}} X^{n-1} + \dots + (-1)^n \right)$$

$$\left\| \sum_{k=1}^n \cotan^2(m_k) = \frac{(2n)!}{(2n-2)! \cdot 6} = \frac{2n(2n-1)}{6} = n \frac{(2n-1)}{3} \right\|$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \cotan^2(m_k) = n \frac{(2n-1)}{3}$$

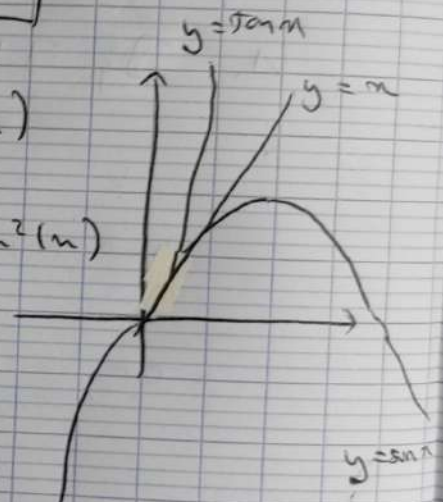
3.

$$\forall m \in]0, \frac{\pi}{2}[, \sin(m) < m < \tan(m)$$

$$1 + \cotan^2(m) = \frac{1}{\sin^2(m)} > \frac{1}{m^2} > \frac{1}{\tan^2(m)} = \cotan^2(m)$$

$$1 + \cotan^2(m_k) > \frac{1}{m_k^2} > \cotan^2(m_k)$$

$$1 + \cotan^2(m_k) > \frac{(2n+1)^2}{(k\pi)^2} > \cotan^2(m_k)$$



$$\frac{n(2n+2)}{3} = n + \frac{n(2n-1)}{3} > \sum_{k=1}^n \frac{(2n+1)^2}{(k\pi)^2} > \sum_{k=1}^n \cotan^2(m_k) = n \frac{(2n-1)}{3}$$

$$\underbrace{\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2}}_{\sim \frac{\pi^2}{6}} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \underbrace{\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \times \frac{n(2n+1)}{3}}_{\sim \frac{\pi^2}{6}}$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \sim \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{ie } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

jeud 19/09

Exercice 185 (Léo)

Soient E, F deux ensembles

$$E \Delta F = (E \cup F) \setminus E \cap F$$

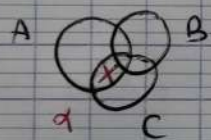


Pour A, B, C mg $A \Delta C = B \Delta C \Leftrightarrow A = B$

$\Leftarrow$ $A = B$ ok

$\Rightarrow$ par contraposée - On suppose $A \neq B$
On dispose de $\alpha \in A$
 $\alpha \notin B$

$\rightarrow$ si $\alpha \in C$:



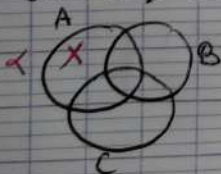
et

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \in A \cup C \\ \alpha \notin A \cap C \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \in A \Delta C$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \in B \cup C \\ \alpha \notin B \cap C \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \in B \Delta C$$

$$\Rightarrow \boxed{A \Delta C \neq B \Delta C}$$

$\rightarrow$ si $\alpha \notin C$:



$$\left. \begin{array}{l} \alpha \in A \cup C \\ \alpha \notin A \cap C \\ \alpha \notin B \cup C \\ \alpha \notin B \cap C \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha \in A \Delta C \\ \alpha \notin B \Delta C \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{A \Delta C \neq B \Delta C}$$

jeudi 15.09 Exercice 193 (Macao)

On suppose $P(n) = 4$
 Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists m \in \mathbb{N}^*$ et $\exists \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$, $n = \sum_{k=1}^m \varepsilon_k k^2$

Idee $[(k+4)^2 - (k+3)^2] - [(k+2)^2 - (k+1)^2] = 4$

par récurrence $P(n) \Rightarrow P(n+4)$:

• Initialisation $P(1): 1 = 1 \times 1^2$

$$P(2): 2 = -1 - 4 - 9 + 16$$

$$P(3): 3 = 1 - 4 + 9 + 16 - 23$$

$$P(4): 4 = -1 - 4 + 9$$

• Hérité: soit $n \in \mathbb{N}^*$ tq $P(n)$ vraie.

On dispose de $m \in \mathbb{N}^*$ et de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$
 tq $n = \sum_{k=1}^m \varepsilon_k k^2$

$$\text{Alors } n+4 = \sum_{k=1}^m \varepsilon_k k^2 + (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2$$

d'où $P(n) \Rightarrow P(n+4)$

• Cd: on a démontré $P(n), \forall n \geq 1$.

jeudi 15.09 Exercice 192 (L50)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On veut déterminer le nb de couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tq
 $2a + 3b = n$.

On lit en $\mathbb{N}$.

$$2a + 3b \equiv n[2]$$

$$\Rightarrow b \equiv n[2]$$

$$\begin{aligned}
 n \text{ pair} &\Rightarrow b \text{ pair} \\
 \rightarrow n = 2p &\Rightarrow b = 2k \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\
 \underbrace{2a + 3b}_{\geq 0} = 2a + 6k = n &\Rightarrow 6k \leq n \\
 &\Rightarrow k \leq \frac{n}{6}
 \end{aligned}$$

$$\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 1 \text{ solutions possibles.} \quad \Rightarrow b \leq \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor$$

$$a = \frac{n - 3b}{2} = \frac{2p - 6k}{2} = p - 3k \in \mathbb{N}$$

est-ce que $2a + 3b = n$?

$$2a - 6k + 6k = 2p = n \text{ oui}$$

$$\text{d'où } \boxed{\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 1 \text{ solutions}}$$

$$\rightarrow \text{si } n = 2p + 1 \text{ alors } b = 2k + 1$$

$$3b \leq n \Rightarrow 3(2k + 1) \leq 2p + 1$$

$$\Rightarrow 6k + 3 \leq 2p + 1$$

$$\Rightarrow k + \frac{1}{2} \leq \frac{n}{6}$$

$$\Rightarrow k \leq \frac{n}{6} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow k \leq \left\lfloor \frac{n-3}{6} \right\rfloor \rightarrow \left\lfloor \frac{n-3}{6} \right\rfloor + 1 \text{ sol possibles.}$$

$$\text{Soit } k \in \left[\left\lfloor \frac{n-3}{6} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n-3}{6} \right\rfloor + 1 \right]$$

$$\text{on a alors } a = \frac{n - 3b}{2} = \frac{2p + 1 - 6k - 3}{2} = p - 3k - 1 \in \mathbb{N} \text{ ok.}$$

il reste à vérifier que $2a + 3b = n$

$$\text{on a } 2a + 3b = 2p + 1 - 6k - 3 + 3b = 2p + 1 = n \text{ ok.}$$

$$\text{d'où } \boxed{\left\lfloor \frac{n-3}{6} \right\rfloor + 1 \text{ solutions}}$$

Jeudi 19.05. Exercice 194. (Macedo)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\phi : \begin{cases} \{0,1\}^n \rightarrow \mathbb{N} \\ (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}) \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k 2^k \end{cases}$

a) Montrer ϕ injective.

Soit $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in \{0,1\}^n$ et $(\varepsilon'_0, \dots, \varepsilon'_{n-1}) \in \{0,1\}^n$
 tq $\phi(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}) = \phi(\varepsilon'_0, \dots, \varepsilon'_{n-1})$

ie $\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k 2^k = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon'_k 2^k \stackrel{\text{on pose}}{=} a$

On pose $\forall k \in \{0, n-1\}$, $c_k \in \{0, 2^k - 1\}$ tq $a \equiv c_k [2^k]$

On va mq $\forall k \in \{0, n-1\}$, $P(k) = \varepsilon_k = \varepsilon'_k$.

• initialisation $k=0$

si a est impair, $\varepsilon_0 = 1 = \varepsilon'_0$ alors on a écrit a impair
 si a est pair, $\varepsilon_0 = \varepsilon'_0 = 0$

• hérédité. On dispose de $n \in \mathbb{N}$ tq $P(n-1)$ soit vraie.

Soit $i \in \{0, n-2\}$, $\varepsilon_0 = \varepsilon'_0 = \dots = \varepsilon_i = \varepsilon'_i$

on a : $\begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k 2^k \equiv c_{i+2} [2^{i+2}] \\ \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon'_k 2^k \equiv c_{i+2} [2^{i+2}] \end{cases}$

et $\forall p \geq i+2$, $2^p \equiv 0 [2^{i+2}]$

d'où $\sum_{k=0}^{i+1} \varepsilon_k 2^k \equiv \sum_{k=0}^{i+1} \varepsilon'_k 2^k \equiv c_{i+2} [2^{i+2}]$

et $\sum_{k=0}^i \varepsilon_k 2^k = \sum_{k=0}^i \varepsilon'_k 2^k$ (H.R.)

$$\text{d'w} \quad \varepsilon_{i+1} 2^{i+1} \equiv \varepsilon'_{i+1} 2^{i+1} [2^{i+2}]$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{i+1} \equiv \varepsilon'_{i+1} [2]$$

$$\text{or } \varepsilon_{i+1} \text{ et } \varepsilon'_{i+1} \in \{0, 1\}$$

$$\text{done } \varepsilon_{i+1} = \varepsilon'_{i+1} \quad (\forall i \in [0, n-2])$$

$$\text{d'w} \quad \varepsilon_0 = \varepsilon'_0, \varepsilon_1 = \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon_{n-1} = \varepsilon'_{n-1}.$$

$$\text{on a bien } p(n-1) \Rightarrow p(n).$$

• cd. $\forall k \in [0, n-1], \varepsilon_k = \varepsilon'_k.$

$P(n)$

b) on va montrer par récurrence sur n que $\phi(\{0, 1\}^n) = [0, 2^n - 1]$

• initialisation $n = 1$.

On veut mg $\phi(\{0, 1\}) = [0, 1]$.

$$1 = 1 \times 2^0 \Rightarrow 1 \in \phi(\{0, 1\})$$

$$0 = 0 \times 2^0 \Rightarrow 0 \in \phi(\{0, 1\})$$

• hérédité Soit $n \geq 1$ tq $\phi(\{0, 1\}^n) = [0, 2^n - 1]$.

On veut mg $\phi(\{0, 1\}^{n+1}) = [0, 2^{n+1} - 1]$.

Soit $N \in [0, 2^{n+1} - 1]$.

* Si $N \leq 2^n - 1$, par H.R., on dispose d'un antécédent de N par ϕ ok.

* Si $N \in [2^n, 2^{n+1} - 1]$

$$\text{alors } 0 \leq N - 2^n \leq 2^n - 1$$

donc par H.R. on dispose d'un antécédent de $N - 2^n$ par ϕ .

Donc pour $z_n = 1$, on a un antécédent de N par ϕ .

Judi 19.09. Exercice 202 (Karim)

Calculer $\sum_{1 \leq 3k \leq n} \binom{n}{3k} = S_n$.

On s'intéresse à $S_n' = \sum_{1 \leq 3k+1 \leq n} \binom{n}{3k+1}$

$$S_n'' = \sum_{1 \leq 3k+2 \leq n} \binom{n}{3k+2}$$

• $\|(1)\rangle : S_n + S_n' + S_n'' = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = 2^n$

• idée
$$\begin{cases} 1 + j + j^2 = 0 \\ j^{3k+1} = j \\ j^{3k+2} = j^2 \end{cases}$$

$$S_n + \bar{j} S_n' + \bar{j}^2 S_n'' = S_n + \sum_{1 \leq 3k+1 \leq n} \binom{n}{3k+1} j^{3k+1}$$

$$+ \sum_{1 \leq 3k+2 \leq n} \binom{n}{3k+2} j^{3k+2}$$

$$\parallel (2): S_n + \bar{j} S_n' + j^2 S_n'' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^k = (1+j)^n$$

à l'idée $\bar{j} = j^2$.

on s'intéresse à $S_n + j^2 S_n' + \bar{j} S_n'' = S_n + \bar{j} S_n' + j^2 S_n''$

$$\parallel (3): S_n + j^2 S_n' + \bar{j} S_n'' = \overline{(1+j)^n}$$

Enfinement, en sommant les 3 équations,

$$\begin{aligned} 3S_n + \underbrace{(1+j+\bar{j})}_{=0} S_n' + \underbrace{(1+\bar{j}+j^2)}_{=0} S_n'' \\ = 2^n + (1+j)^n + \overline{(1+j)^n} \end{aligned}$$

d'où $3S_n = 2^n + 2\operatorname{Re}((1+j)^n)$

$$\begin{aligned} \text{avec } (1+j)^n &= \left(1 + e^{i\pi/3}\right)^n \\ &= e^{in\pi/3} \left(e^{-i\pi/3} + e^{i\pi/3}\right)^n \\ &= e^{in\pi/3} \times 2^n \underbrace{\cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{= \frac{1}{2^n}} \end{aligned}$$

d'où $\operatorname{Re}((1+j)^n) = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

donc
$$S_n = \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

Judi 19-09. Exercice 203 (Maccêo).

$A = \{ \lfloor n\sqrt{2} \rfloor, n \in \mathbb{N} \}$. Mg A contient une infinité de puissances de 2.

on considère les entiers $n_k = \left\lfloor \frac{2^k}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right\rfloor, \forall k \in \mathbb{N}$.

$$\frac{2^k}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} - 1 < \left\lfloor \frac{2^k}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right\rfloor \leq \frac{2^k}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$2^k + \frac{1}{2} - \sqrt{2} < \left\lfloor \frac{2^k}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right\rfloor \times \sqrt{2} \leq 2^k + \frac{1}{2}$$

L.I.
est $\nearrow$

$$\underbrace{\left\lfloor 2^k + \frac{1}{2} - \sqrt{2} \right\rfloor}_{= 2^k - 1} < \left\lfloor \left\lfloor \frac{2^k}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right\rfloor \sqrt{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor 2^k + \frac{1}{2} \right\rfloor = 2^k$$

$$\text{d'où } 2^k \leq \left\lfloor \left\lfloor \frac{2^k}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right\rfloor \sqrt{2} \right\rfloor \leq 2^k$$

$$\text{d'où } \left\lfloor \left\lfloor \frac{2^k}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right\rfloor \sqrt{2} \right\rfloor = 2^k$$

Judi 19-09 Exercice 200 (Lêo)

Soient $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_{13}$ 13 réels.

Mg qu'on peut en trouver 2, m et y , tq

$$0 \leq \frac{n-y}{1+ny} \leq 2-\sqrt{3}$$

On dispose de $\alpha, \beta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tq

$$\begin{cases} \tan(\alpha) = n \\ \tan(\beta) = y \end{cases}$$

$$\text{d'où } \tan(\alpha - \beta) = \frac{n-y}{1+ny}$$

on applique arctan à l'égalité (qui est $\rightarrow$)

$$\alpha \leq \alpha - \beta \leq \arctan(2\sqrt{3})$$

Par ailleurs, on détermine $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}}$

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\cos(2\pi) = 2\cos^2(\pi) - 1 \Rightarrow \cos(\pi) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\pi)}{2}}$$

$$\text{d'où } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$\text{et } \sin(2\pi) = 2\sin(\pi)\cos(\pi)$$

$$\Rightarrow \sin(\pi) = \frac{\sin(2\pi)}{2\cos(\pi)}$$

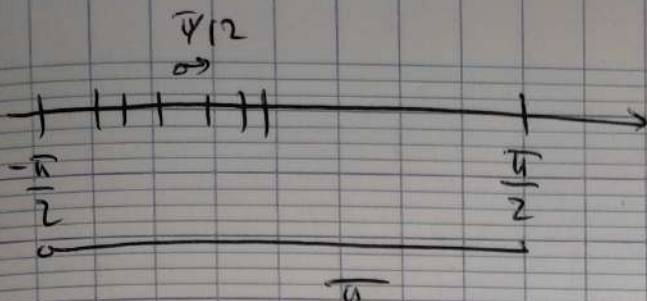
$$\text{d'où } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)^2} = \frac{1}{4 \times \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \arctan(2 - \sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}$$

(*) autre calcul
de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$\alpha_1, \dots, \alpha_{13}$ les arctan des n_i
($\alpha_1 = \arctan(n_1) \dots$)



$$\exists i, j \in \{1, 13\}, 0 \leq |\alpha_i - \alpha_j| \leq \frac{\pi}{12}$$

$$0 \leq \alpha_i - \alpha_j \leq \frac{\pi}{12} \Rightarrow 0 \leq \tan(\alpha_i - \alpha_j) \leq 2 - \sqrt{3}$$

$$\underbrace{\quad}_{\frac{x_i - x_j}{x_j x_i + 1}}$$

(*) autre calcul de $\tan \frac{\pi}{12}$.

$$\tan \frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{-2\sqrt{3} + 4}{-2} = 2 - \sqrt{3}$$