Exercice 147 : (Wali)

a) Soit $(G,+)$ un SG de $(\mathbb{R},+)$

$\exists h \in G,\ h \neq 0,\ -h \in G$

$G \cap \mathbb{R}_+^* \neq \emptyset$

on pose $\alpha = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$

1er cas : $\alpha > 0$:

par l'absurde : on suppose $\alpha \notin G$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta \in G,\ \eta \in]\alpha; \alpha+\varepsilon[$

$\alpha < x < y < 2\alpha$

$0 < \underbrace{\eta - x}_{\in G} < \alpha$ absurde

$\varepsilon = \alpha$
$\varepsilon = \alpha - x$

$x \in G$

$k\alpha < x < (k+1)\alpha$

$0 < \underbrace{x - k\alpha}_{\in G} < \alpha$ absurde

G homogène

2e cas : $\alpha = 0$ Mq G dense ds $\mathbb{R}$

Soit $a \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0,\ ]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\cap G \neq \emptyset$

$0 \in]a-\varepsilon; a+\varepsilon[$ —

$]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\subset]0; +\infty[$

$\gamma \in G,\ \gamma < \varepsilon$

$N = \sup\{n \in \mathbb{N}^* : \gamma n \leq a - \varepsilon\}$

$\gamma(n+1) > a - \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < g \leq a$

$\gamma n + \gamma \leq \gamma$

$\rightarrow$ G dense ds $\mathbb{R}$

Soient $(n,m) \in \mathbb{R}_+^*$:

Mq $\exists c \in \mathbb{R}_+^*,\ a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = c\mathbb{Z} \iff a/b \in \mathbb{Q}$

"$\Rightarrow$" $a = cq_1$ $\rightarrow$ $a/b \in \mathbb{Q}$
$b = cq_2$

"$\Leftarrow$" $a/b = p/q$ $p \wedge q = 1$

$a/p = b/q = c$ "$\supset$"

$an + bm = c(pn + qm) \in c\mathbb{Z}$

Bezout : $pu + qv = 1 \Rightarrow c\underbrace{(up + qv)}_{au+bv} = c$ $\rightarrow$ "$\subset$"

d'où l'égalité

b) $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$

$\sin(\mathbb{N}) = \sin(2\pi\mathbb{Z} + \mathbb{Z})$

par C° de la f° sinus, $(\sin(n))_n$ dense ds $[-1;1]$

Exercice 154 : (Gaspard)

$P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^d \in \mathbb{R}[X]$

P scindé

1) Mq $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{P(x) P''(x) \leq P'(x)^2}$ (*)

$P = \lambda \prod_{n=1}^{d} (X - \alpha_n)^{\beta_n}$ → $P = \lambda \underbrace{(X-\alpha_1)^{\beta_1}}_{a} \times \underbrace{\quad\quad}_{b}$

$a'b + b'a$

$\frac{P'}{P} = \sum_{n=1}^{d} \frac{\beta_n}{X - \alpha_n}$

on dérive :

$\frac{P'' P - P'^2}{P^2} = \overbrace{- \sum_{n=1}^{d} \frac{\overset{>0}{\beta_n}}{\underbrace{(X-\alpha_n)^2}_{>0}}}^{<0} \leq 0$ d'où (*)

ok

2) cf cours

3) $P(0) P''(0) = 2 a_0 a_2$

$P'(0)^2 = a_1^2$

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$P^{(k-1)}(x) P^{(k+1)}(x) \leq (P^{(k)}(x))^2$

$(k-1)! \, a_{k-1} (k+1)! \, a_{k+1} \leq (k! \, a_k)^2$

$a_{k-1} (k+1) a_{k+1} \leq k a_k^2$

$\boxed{a_{k-1} a_{k+1} \leq a_k^2}$

Exercice 165 : (Victor)

a) $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$

$P \mapsto P - P'$ appl. lin.

on va Mq $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0\}$

Soit P tq $\varphi(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$

$P - P' = 0$

$P' - P'' = 0$

$\vdots$

$P^{(n)} - \underbrace{P^{(n+1)}}_{=0} = 0$ → donc $P^{(n)} = 0$

puis on remonte les égalités

↓

donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$

ou raisonnement sur les degrés

$P - P' = 0 \Rightarrow P = P'$ impossible

car $\deg P' < \deg P$

sauf si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$

b) $Q \in \mathbb{R}[X]$, $\exists! P \in \mathbb{R}[X]$, $P - P' = Q$

$q = \deg(Q)$

→ P est forcément de degré de Q

$\varphi_q : \mathbb{R}_q[X] \to \mathbb{R}_q[X]$

$P \mapsto P - P'$

$P = \varphi^{-1}(Q)$

on a existence + unicité de Q

↳ car φ_q est bijective

(Ker = 0 ⊕ égalité de dimensions)

c) on suppose $Q \geq 0$ $\quad f : x \to e^{-x} P(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = e^{x} f(x)$

$\cancel{e^{x} f(x)} - \cancel{e^{x} f(x)} - e^{x} f'(x) = Q$

$$f'(x) = -e^{-x} Q \leq 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

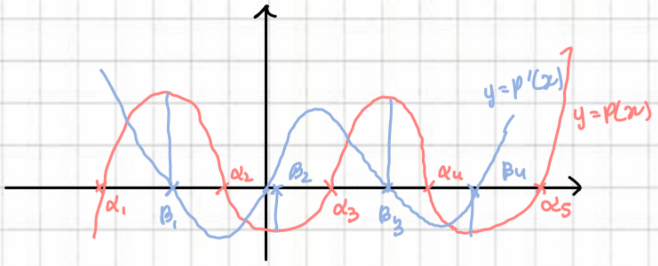
$\Rightarrow f \searrow$ sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = e^{-x} P(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$$

de $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$

donc $P(x) = e^{-x} f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$

d)



$Q = P - P'$

$\deg Q = \deg P = n$

γ_n racine de Q

sur $]\alpha_i ; \beta_i[$, tq P croissante (idem $\searrow$)

$(P - P')(\alpha_i) = -P'(\alpha_i) \leq 0$

$(P - P')(\beta_i) = P(\beta_i) \geq 0$

Exercice 207 : (Gabriel R)

On cherche $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $(X+4)P(X) = X\,P(X+1)$

Analyse : on a $P(0) = 0$

$P(-1) = 0 \qquad -3P(-1) = -1P(0) = 0$

$P(-2) = 0 \qquad 2P(-2) = -2P(-1) = 0$

$P(-3) = 0 \qquad P(-3) = -3P(-2) = 0$

donc $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tq $P(X) = X(X+1)(X+2)(X+3)Q(X)$

on reinjecte ds équat° : $\underbrace{X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)}_{\text{on la note } A(X)}Q(X) = A(X)\,Q(X+1)$

$Q(X+1) = Q(X)$

$Q(X) \in \mathbb{R}_0[X]$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $Q(X) = \lambda$

$$P = \lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$$

Synthèse : ok.

Exercice 212: (Maxime)

$\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} \ : \exists \, n \in \mathbb{N}^*, \ z^n = 1 \}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on appelle $\mathbb{U}_n = \{ z \in \mathbb{C} \ , \ z^n = 1 \}$

$$\mathbb{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$$

$S = \{ u \in \mathbb{C} \ : \ \forall z \in \mathbb{U} \ , \ uz \in \mathbb{U} \}$

"$\supset$" Soit $u \in S$

Soit $z \in \mathbb{U}$

on a $uz \in \mathbb{U} \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, \ uz \in$

donc $\exists k \in [\![0; n-1]\!]$ tq $uz = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

comme $z \in \mathbb{U}$, $\exists n' \in \mathbb{N}^*$, et $\exists k' \in [\![0; n-1]\!]$

$z = e^{\frac{2ik'\pi}{n'}}$

on a donc $u = e^{-\frac{2ik'\pi}{n'}} \times e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

$= e^{2i\pi \left(\frac{k}{n} - \frac{k'}{n'} \right)}$

$u = e^{2i\pi \left(\frac{\overbrace{kn' - k'n}^{\in \mathbb{Z}}}{nn'} \right)}$

donc $u \in \mathbb{U}$, car $u^{nn'} = 1$

et $nn' \in \mathbb{N}^*$ donc $S \subset \mathbb{U}$

"$\subset$" Mq $\mathbb{U} \subset S$

soit $z \in \mathbb{U}$

soit $z' \in \mathbb{U}$

Mq $zz' \in \mathbb{U}$: $\exists n, n' \in (\mathbb{N}^*)^2$ tq $z^n = 1$ et $z^{n'} = 1$

donc $(z \times z')^{nn'} = (z^n)^{n'} \times (z'^{n'})^n = 1$

donc $\mathbb{U} \subset S$

finalement $\boxed{\mathbb{U} = S}$

Exercice 178: (Gabriel R)

On cherche $P \in \mathbb{C}[X]$ tq $(P')^2 = 4P$

Analyse:
- $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$ solution
- on prend P solution $\neq 0_{\mathbb{C}[X]}$

$\deg(4P) = \deg((P')^2) = 2\deg(P') = 2(\deg(P) - 1)$

donc $\deg P = 2$

$\exists (a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tq $P = aX^2 + bX + c$

donc $(P')^2 = (2aX + b)^2 = 4a^2X^2 + 4abX + b^2 = 4P = 4aX^2 + 4bX + 4c$

par identification : $\begin{cases} a^2 = a \\ ab = b \\ b^2 = 4c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = b \\ \frac{b^2}{4} = c \end{cases}$

$$\boxed{P = X^2 + b\left(X + b/4\right)}$$

Synthèse : Soit $P \in \{X^2 + b(X + b/4),\ b \in \mathbb{C}\}$ $\rightarrow$ on vérifie ok.

Exercice 148 : (Gaspard)

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$$

Mq $\exists Q \in \mathbb{C}[X]$, $P \circ P - X = (P - X)Q$

$$P \circ P - X = \sum_{k=0}^{d} a_k \left(\sum_{i=0}^{d} a_i X^i\right)^k - X$$

$$\begin{aligned} P \circ P - X &= P \circ P - P + P - X \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k \left(P^k - X^k\right) + (P - X) \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k (P - X) \sum_{i=0}^{d-1} P^k X^{k-1-i} + (P - X) \\ &= (P - X)\left[\sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{i=0}^{d-1} P^k X^{k-1-i} - 1\right] \end{aligned}$$

donc $\boxed{P - X \mid P \circ P - X}$

Autre méthode :

$$Q(X) - P(X) = X$$

$$P(X) = X \ [Q]$$

$$\Rightarrow P^k(X) = X^k \ [Q]$$

$$\Rightarrow \sum_0^n a_k P^k(X) = \sum_0^n a_k X^k \ [Q]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P \circ P \equiv P \ [Q] \\ P \equiv X \ [Q] \end{cases}$$

$$\Rightarrow P \circ P \equiv X \ [Q]$$

Exercice 174 : (Gabriel R)

soit $a, b \in \mathbb{C}^2$, $a \neq b$

Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$

on suppose que $\begin{cases} P^{-1}(\{a\}) = Q^{-1}(\{a\}) \\ P^{-1}(\{b\}) = Q^{-1}(\{b\}) \end{cases}$

on veut Mq $P = Q$

- pour $\deg P < 1$: non vérifié
- pour $\deg P \geq 1$: $\alpha = \operatorname{card} P^{-1}(\{a\})$
  $\beta = \operatorname{card} P^{-1}(\{b\})$

par l'absurde, on suppose $P \neq Q$

$(P-Q)$ a pour racines $P^{-1}(\{a\})$ et $P^{-1}(\{b\})$

comme $P \neq Q$, $\deg(P-Q) \geq \alpha+\beta$

~~de plus, $(P-a)^{-1}(\{0\}) = (Q-a)^{-1}(\{0\})$ de degré α~~ NON

correction :

$P(X) - a = \lambda (X-x_1)^{\beta_1} \times \_\_\_\_ \times (X-x_\alpha)^{\beta_\alpha}$ $\qquad \sum_1^\alpha k_i = n = \deg P$

$Q(X) - a = \mu (X-x_1)^{\delta_1} \times \_\_\_\_ \times (X-x_\alpha)^{\delta_\alpha}$ $\qquad \sum_1^\alpha \delta_i = m = \deg Q$

$R = P - Q = (P(X)-\alpha) - (Q(X)-\alpha)$

$\Rightarrow x_1, \ldots, x_\alpha$ racines de R

$P(X) - b = \nu (X-y_1)^{\ell_1} \times \_\_ \times (X-y_\beta)^{\ell_\beta}$ $\qquad \sum \ell_i = n$

$Q(X) - b = \theta (X-y_1)^{r_1} \times \_\_ \times (X-y_\beta)^{r_\beta}$ $\qquad \sum r_i = m$

$\Rightarrow y_1 \_\_ y_\beta$ racines de R

Rq : $\{x_1 \_\_ x_n\} \cap \{y_1 \_\_ y_\beta\} = \emptyset$

$\Rightarrow R$ a $\alpha+\beta$ racines

on suppose $R \neq 0$ $\qquad \boxed{\deg R > \alpha+\beta}$

x_1 racine de $P(X) - a$ d'ordre k_1

x_1 ———— P' ———— $k_1 - 1$

$|$ $\qquad |$

x_α ———— $k_\alpha - 1$

y_1 $\qquad \ell_1 - 1$

$|$ $\qquad |$

y_β $\qquad \ell_\beta - 1$

P' a $\sum(k_i - 1) + \sum(\ell_j - 1)$ racines

$= n - \alpha + n - \beta$

P' a $2n - (\alpha+\beta)$ racines

Q' a $2n - (\alpha+\beta)$ racines

or $\deg(P') = n-1$

donc $2n - (\alpha+\beta) \leq n-1$

$\Rightarrow \boxed{n \leq \alpha+\beta-1}$

de m̂, $\boxed{m = \deg Q \leq \alpha+\beta-1}$

$\deg P = n$

$\deg Q = m$

dc $\deg R = \deg(P-Q) \leq \max(m,n)$

$\deg R \geq \alpha+\beta \geq n+1$

$\geq m+1$

contradiction

Exercice 161 :

Soit n un entier pair

$$P = 1 + X + X^2 + \text{—} + X^n$$

$$(X+1)P = X^{n+1} - 1$$ (somme telescopique)

$$= \prod_{j=0}^{n+1} \left(X - e^{\frac{2ij\pi}{n+1}}\right)$$

donc $P = \prod_{j=1}^{n+1} \left(X - e^{\frac{2ij\pi}{n+1}}\right)$

- Soit α racine de P $\rightarrow$ Mq $\alpha \neq 1$

$\exists j \in [\![1; n+1]\!]$ tq $\alpha = e^{\frac{2ij\pi}{n+1}}$

$$\alpha^{2^p} = e^{2i\pi \times \frac{j \times 2^p}{n+1}}$$

$\frac{j \times 2^p}{n+1}$ — pair / impair $\neq 1$

Exercice 151 : (Wali)

$P \in \mathbb{Z}[X]$ $\quad d = \deg P$

p/q tq $p \wedge q = 1$

on écrit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$

$$a_d (p/q)^d = -\sum_{k=1}^{d-1} a_k (p/q)^k$$

$\times q^d$

$$a_d p^d = \underbrace{-\sum_{k=1}^{n-1} a_k p^k q^{d-k}}_{\text{divisible par } q}$$

$$\begin{cases} p / a_0 \\ q / a_d \end{cases}$$

$$p/q \in \mathbb{Z}$$

correction :

$P = a_0 + a_1 X + \text{—} + a_{d-1} X^{d-1} + X^d$

$a = p/q$ avec $p \wedge q = 1$ racine de P

$$\Rightarrow (p/q)^d = -\sum_{k=0}^{d-1} a_k (p/q)^k$$

$$= -a_0 - a_1 p/q - \dots$$

$\times q^d$

$$p^d = -a_0 p^d - a_1 p q^{d-1} - \dots - a_{d-1} p^{d-1} q$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q / p^d \\ q \wedge p = 1 \end{cases} \underset{\text{Gauss}}{\Rightarrow} q / p^{d-1}$$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow q / p$

$\Rightarrow q / 1$

$\Rightarrow q = 1$

$\Rightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$.

Exercice 157 : (Lucas)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire, de degré $n \geq 1$

"$\Rightarrow$" on suppose P scindé sur $\mathbb{R}$

$$P = \prod_{k=0}^{n} (X - a_k)$$

distance de z à a_k or $a_k \in \mathbb{R}$ donc :

Soit $z \in \mathbb{C}$ $\quad |P(z)| = \prod_{k=0}^{n} |z - a_k| \geq \prod_{k=0}^{n} |\mathrm{Im}(z)|$

$= |\mathrm{Im}(z)|^n$

"$\Leftarrow$" $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^n$

Soit $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ les racines de P

$\forall i \in [\![1;n]\!]$, $0 \geq |\mathrm{Im}(z_i)|^n$

donc les z_i sont réels.