

du 10 mars au π day 2026

Le programme de colle de cette semaine est constitué du programme de la semaine 17 et d'icelui.

CHAPITRE 18 : CALCUL DIFFÉRENTIEL - FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Dans tout le chapitre, E et F désignent des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie (E de dimension p et F de dimension n).

I: Dérivées partielles :

1) Définitions :

- a) Dérivée suivant un vecteur. **Dérivée partielle d'ordre 1.**
- b) Exemple d'une fonction admettant des dérivées partielles sans être continue.

II: Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$:

- 1) **Définition** : On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point a de U et si ces dérivées partielles sont continues sur U .

- 2) **◆ Théorème fondamental** : Soit $f : U \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soient $a \in U$ et h tel que $a + h \in U$ alors $f(a + h) = f(a) + \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o(\|h\|)$. (On dit que f admet un DL_1 en a).

- 3) **Corollaire** : Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors f admet en tout point a de U une dérivée selon tout vecteur de E .
- 4) **► Corollaire** : f de classe $\mathcal{C}^1 \implies f$ continue.

III: Fonctions différentiables et différentielles

- 1) **Définition** : Soit f définie sur un ouvert $U \subset E$ à valeurs dans F . Soit $a \in U$, on dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que pour tout h au voisinage de 0_E , $f(a + h) = f(a) + L(h) + o(h)$.
On note alors $L = df(a)$ ou df_a .

- 2) **Théorème** : si f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors f est différentiable en tout point a de U et l'application
$$\begin{cases} E & \rightarrow & F \\ h & \mapsto & D_h f(a) = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \end{cases}$$
 est la **différentielle** de f en a .

3) Jacobienne et Jacobien.

La Jacobienne est la matrice de coefficients $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$. C'est une matrice $n \times p$.

- 4) **Proposition** : soit $f : U \subset E \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$, soient $f_1, \dots, f_n$ les fonctions coordonnées de f .
 f est de classe $\mathcal{C}^1 \iff f_i$ est de classe $\mathcal{C}^1, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $df(a).h = (df_1(a).h, \dots, df_n(a).h)$
- 5) **Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$** .
- a) **Proposition** : si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $\lambda f + g$ aussi et $d(\lambda f + g)(a) = \lambda df(a) + dg(a)$.
- b) **Proposition** : Soit B une application bilinéaire de $F \times G$ dans H , soient f et g de classe $\mathcal{C}^1$ alors $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $d(B(f, g))(a).h = B(df(a).h, g(a)) + B(f(a), dg(a).h)$.
Application : si $f, g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})^2$ alors $fg \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $d(fg) = f dg + g df$.
- c) Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^*)$ alors $1/f$ est $\mathcal{C}^1$ et $d(1/f) = -df/f^2$.

IV: Règles de la chaîne :

- 1) **Théorème : 1ère règle de la chaîne** :
 soit $f : U \subset E \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\varphi(I) \subset U$ alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $(f \circ \varphi)'(t) = df(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.
- 2) **Proposition** : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert **convexe** U de $\mathbb{R}^p$, alors f constante $\iff$ ses dérivées partielles sont nulles sur U .
- 3) **Théorème : 2ème règle de la chaîne** Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $g : V \subset F \rightarrow G$ de classe $\mathcal{C}^1$ et tel que $f(U) \subset V$ alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$$

matriciellement

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a)$$

- 4) **Application** : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui va de $U \subset \mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, soient x et y deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur un ouvert $V \subset \mathbb{R}^2$ telles que $\forall (u, v) \in V, (x(u, v), y(u, v)) \in U$ alors $g : (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

- 5) **Exemple des coordonnées polaires** :

$$\text{en posant } g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) =, \text{ on a } \begin{cases} x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \rho \frac{\partial g}{\partial \rho} \\ -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{cases}$$

V: Dérivées d'ordre supérieur :

- 1) **Définitions, notation** : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$
- 2) **Définition** : on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U si elle admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues sur U .
- 3) **Théorème de Hermann-Amandus Schwarz (1843 - 1921)** :
 si f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors $\forall x \in U, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$.
- 4) **Dérivées d'ordre supérieur et théorème de Schwarz** : si f est de classe $\mathcal{C}^k$ alors on peut intervertir l'ordre des dérivations jusqu'aux dérivées d'ordre k .

5) Propriétés :

- a) si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ alors $\lambda f + \mu g$ itou.
- b) si f et $g \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})^2$ alors fg itou.
- c) si $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^*)$ alors $1/f$ itou.
- d) si $f \in \mathcal{C}^k(U, F)$ et $g \in \mathcal{C}^k(V, G)$ avec $f(U) \subset V$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}^k(U, G)$.
- e) ► **Calcul du laplacien en polaires** : soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, on pose $F(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$,
on a alors $\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho}$

VI: Gradient d'une fonction de $U \subset E$ dans $\mathbb{R}$

- 1) **Définition** : soit $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on appelle $\text{grad } f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right)$.

Notation : $\nabla f(a)$

- 2) **Remarque** : Le DL_1 s'écrit alors : $f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a)|h) + o(\|h\|)$.

3) Propriétés :

- a) $\nabla(\lambda f + g) = \lambda \nabla f + \nabla g$,
- b) $\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$,
- c) $\nabla\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{-\nabla f}{f^2}$

4) Proposition : Interprétation géométrique du gradient :

Si le gradient de f en a est non nul, alors il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale (ligne de plus grande pente) .

Définition : Les courbes de niveaux de la fonction f sont les courbes de la forme $f(x, y) = cte$.
Le long d'une courbe de niveau, la tangente est orthogonale au gradient.

VII: Formule de Taylor Young ou Développement limité d'ordre 2 :

- 1) **Définition** : Matrice Hessienne en un point a d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$H_f(a) = \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right) \right).$$

- 2) **Notation** : $H_f(a)$.

- 3) **Proposition** : $H_f(a)$ est une matrice symétrique.

- 4) ► **Théorème** : $DL_2(a)$ (admis)

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in U$, alors pour h dans un voisinage de $O_{\mathbb{R}^p}$ tel que $a+h \in U$,

$$f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a)|h) + \frac{1}{2} h^T \times H_f(a) \times h + o(\|h\|^2)$$

Cas particulier : pour $n = 2$ et $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a+h \in U$, alors

$$f(a+h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \frac{1}{2} \left[h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \right] + o(\|h\|^2)$$

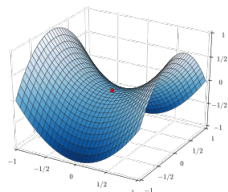
VIII: Extrema d'une fonction de plusieurs variables :

- 1) Définitions d'un maximum global, local, d'un minimum global, local, d'un point critique.
- 2)

► **Théorème :** soit $f : A \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ où A est une partie de E , si $a \in \overset{\circ}{A}$ et si f admet un extremum local en a alors $\nabla f(a) = 0$.

3) Remarques :

- a) un point critique n'est pas forcément un extremum local (exemple d'un point selle).



- b) si f est définie sur une partie $A \subset E$ qui n'est pas un ouvert, si f admet un extremum local en un point qui est sur la frontière de A , alors ce point n'est pas forcément un point critique.
- ### 4) Utilisation de la Hessienne pour déterminer la nature d'un point critique

► **Théorème :** Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ et soit a un point critique de f , alors

- a) Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ alors f atteint un minimum local strict en a .
 - b) Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{--}(\mathbb{R})$ alors f atteint un maximum local strict en a .
 - c) Si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$ alors f n'a pas de minimum en a .
 - d) Si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^-(\mathbb{R})$ alors f n'a pas de maximum en a .
- ### 5) Cas particulier : $n = 2$.
- $H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ où on a posé $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$.
- a) si $\det H_f(a) > 0$ alors si $\text{tr } H_f(a) > 0$ alors la matrice est définie positive, si $\text{tr } H_f(a) < 0$ alors la matrice est définie négative.
 - b) si $\det H_f(a) < 0$ alors on a deux valeurs propres de signes opposés, c'est donc un point selle.
 - c) Si $\det H_f(a) = 0$ et si $\text{tr } H_f(a) > 0$ alors $H_f(a) \notin \mathcal{S}_2^-(\mathbb{R})$.
 - d) Si $\det H_f(a) = 0$ et si $\text{tr } H_f(a) < 0$ alors $H_f(a) \notin \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$.
 - e) Si $\det H_f(a) = 0$ et si $\text{tr } H_f(a) = 0$ alors on ne peut rien dire.
- 6) En pratique, pour trouver les extrema de f sur une partie A , on cherche d'abord les points critiques de f , on détermine leur nature, puis on regarde ce qui se passe sur la frontière de A .
 - 7) Pour prouver l'existence d'un minimum global, on pourra utiliser le théorème suivant :

Théorème :

soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors f admet un minimum sur E .

IX: Exemples de résolution d'E.D.P. d'ordre 1 et d'ordre 2 :

- 1) La présence de termes $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$ ou $-y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}$ doit faire penser à effectuer un changement de variables en polaires.

- 2) La présence de termes de la forme $\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y}$ doit faire penser à effectuer un changement de variable affine : $x = au + bv, y = cu + dv$.
- 3) Dans les autres cas, le changement de variable sera fourni par l'énoncé ou par l'examineur.

X: Dérivée de $F : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) \, dt$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \subset \mathbb{R} \times J \subset \mathbb{R}$, et u et v de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans J .

Proposition : F est $\mathcal{C}^1$ sur I et $F'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \, dt + v'(x)f(x, v(x)) - u'(x)f(x, u(x))$.