PC $\overset{\star}{2}$

Colles semaine 18

du 3.11 au 3.14

Rappel : Le programme de colle en semaine 18 est constitué du programme de la semaine 17 et d'icelui.

Chapitre 18 : Calcul différentiel - Fonctions de plusieurs variables

Dans tout le chapitre, E et F désignent des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.

I: Dérivées partielles :

1) Définitions :

a) Dérivée suivant un vecteur. **Dérivée partielle d'ordre 1.**

Soient $(e_1, ..., e_n)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on note $D_{e_i}f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $\partial_i f(a)$.

b) Exemple d'une fonction admettant des dérivées partielles sans être continue.

II: Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$:

1) Définition : On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point a de U et si ces dérivées partielles sont continues sur U.

2) **Théorème fondamental :** Soit $f : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soient $a \in U$ et h tel que $a + h \in U$ alors $f(a+h) = f(a) + \displaystyle\sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o(||h||)$. (On dit que f admet un DL_1 en a).

3) Corollaire : Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors f admet en tout point a de U une dérivée selon tout vecteur de E.

4) ▶ **Corollaire :** f de classe $\mathcal{C}^1 \implies f$ continue.

III: Fonctions différentiables et différentielles

1) Définition : Soit f définie sur un ouvert $U \subset E$ à valeurs dans F. Soit $a \in U$, on dit que f *est différentiable en a* s'il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que pour tout h au voisinage de O_E, $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h)$.
On note alors $L = df(a)$ ou df_a.

2) Théorème : si f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors f est différentiable en tout point a de U et l'application
$$\begin{cases} E & \to & F \\ h & \longmapsto & D_h f(a) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \end{cases}$$
est la **différentielle** de f en a.

3) Jacobienne et Jacobien.

La Jacobienne est la matrice de coefficients $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$. C'est une matrice $n \times p$.

4) **Proposition :** soit $f : U \subset E \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$, soient $f_1, \ldots, f_n$ les fonctions coordonnées de f.
f est de classe $\mathcal{C}^1 \iff f_i$ est de classe $\mathcal{C}^1$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ et $df(a).h = (df_1(a)\,.\,h, \ldots, df_n(a)\,.\,h)$

5) **Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$.**

   a) **Proposition :** si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $\lambda f + g$ aussi et $d(\lambda f + g)(a) = \lambda\, df(a) + dg(a)$.

   b) **Proposition :** Soit B une application bilinéaire de $F \times G$ dans H, soient f et g de classe $\mathcal{C}^1$ alors $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $d(B(f, g))(a).h = B\left(df(a).h, g(a)\right) + B\left(f(a), dg(a).h\right)$.
   Application : si $f, g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})^2$ alors $fg \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $d(fg) = fdg + gdf$.

   c) Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^*)$ alors $1/f$ est $\mathcal{C}^1$ et $d(1/f) = -df/f^2$.

IV: Règles de la chaîne :

1) ▶ **Théorème : 1ère règle de la chaîne :**
soit $f : U \subset E \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\varphi(I) \subset U$ alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\boxed{(f \circ \varphi)'(t) = df(\varphi(t))\,.\,\varphi'(t)}$.

2) ▶ **Proposition :** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert **convexe** U de $\mathbb{R}^p$, alors f constante $\iff$ ses dérivées partielles sont nulles sur U.

3) **Théorème : 2ème règle de la chaîne** Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $g : V \subset F \longrightarrow G$ de classe $\mathcal{C}^1$ et tel que $f(U) \subset V$ alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\boxed{d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a}$$

matriciellement

$$\boxed{J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a)}$$

4) **Application :** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui va de $U \subset \mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, soient x et y deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur un ouvert $V \subset \mathbb{R}^2$ telles que $\forall\,(u, v) \in V$, $(x(u, v), y(u, v)) \in U$ alors $g : (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et on a :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u, v) & = & \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u, v) & = & \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

5) ▶ Exemple des **coordonnées polaires** :
en posant $g(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) =$, on a $\begin{cases} x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \rho\dfrac{\partial g}{\partial \rho} \\ -y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial \theta} \end{cases}$

V: Dérivées d'ordre supérieur :

1) **Définitions, notation :** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

2) **Définition :** on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U si elle admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues sur U.

3) ◆ **Théorème de Hermann-Amandus Schwarz (1843 - 1921) :**
si f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors $\forall x \in U$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$.

4) **Dérivées d'ordre supérieur et théorème de Schwarz :** si f est de classe $\mathcal{C}^k$ alors on peut intervertir l'ordre des dérivations jusqu'aux dérivées d'ordre k.

5) Propriétés :

a) si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ alors $\lambda f + \mu g$ itou.
b) si f et $g \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})^2$ alors fg itou.
c) si $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^*)$ alors $1/f$ itou.
d) si $f \in \mathcal{C}^k(U, F)$ et $g \in \mathcal{C}^k(V, G)$ avec $f(U) \subset V$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}^k(U, G)$.
e) ▶ **Calcul du laplacien en polaires :** soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, on pose $F(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$,
on a alors $\Delta(f) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial F}{\partial \rho}$

VI: Gradient d'une fonction de $U \subset E$ dans $\mathbb{R}$

1) Définition : soit $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on appelle $\text{grad}\, f(a) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right)$.
Notation : $\nabla f(a)$

2) Remarque : Le DL_1 s'écrit alors : $f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a)|h) + o(||h||)$.

3) Propriétés :

a) $\nabla(\lambda f + g) = \lambda \nabla f + \nabla g$,
b) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$,
c) $\nabla(\dfrac{1}{f}) = \dfrac{-\nabla f}{f^2}$

4) Proposition : Interprétation géométrique du gradient :
Si le gradient de f en a est non nul, alors il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale (ligne de plus grande pente) .
Définition : Les courbes de niveaux de la fonction f sont les courbes de la forme $f(x, y) = cte$.
Le long d'une courbe de niveau, la tangente est orthogonale au gradient.

VII: Formule de Taylor Young ou Développement limité d'ordre 2 :

1) Définition : Matrice Hessienne en un point a d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$.
$H_f(a) = \left(\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)\right)$.

2) Notation : $H_f(a)$.

3) Proposition : $H_f(a)$ est une matrice symétrique.

4) Théorème : $DL_2(a)$ (admis)
Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in U$, alors pour h dans un voisinage de $O_{\mathbb{R}^p}$ tel que $a + h \in U$,

$$f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a)|h) + \frac{1}{2}\, h^T \times Hf(a) \times h + o(||h||^2)$$

Cas particulier : pour $n = 2$ et $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a + h \in u$, alors

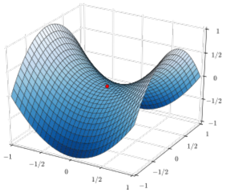
$$f(a+h) = f(a) + h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \frac{1}{2}\left[h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\right] + o(\|h\|)^2$$

VIII: Extrema d'une fonction de plusieurs variables :

1) **Définitions** d'un maximum global, local , d'un minimum global, local, d'un point critique.
2)

> ▶ **Théorème :** soit $f : A \subset E \to \mathbb{R}$ où A est une partie de E,
> si $a \in \overset{\circ}{A}$ et si f admet un extremum local en a alors $\nabla f(a) = 0$.

3) **Remarques :**
   a) un point critique n'est pas forcément un extremum local (exemple d'un point selle).



   b) si f est définie sur une partie $A \subset E$ qui n'est pas un ouvert, si f admet un extremum local en un point qui est sur la frontière de A, alors ce point n'est pas forcément un point critique.
4) **Utilisation de la Hessienne pour déterminer la nature d'un point critique**
   ▶ **Théorème :** Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ et soit a un point critique de f, alors
   a) Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ alors f atteint un minimum local strict en a.
   b) Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{--}(\mathbb{R})$ alors f atteint un minimum local strict en a.
   c) Si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^{+}(\mathbb{R})$ alors f n'a pas de minimum en a.
   d) Si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^{-}(\mathbb{R})$ alors f n'a pas de maximum en a.
5) **Cas particulier :** $n = 2$.
   $H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ où on a posé $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$ et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$.
   a) si $\det H_f(a) > 0$ alors si $\operatorname{tr} H_f(a) > 0$ alors la matrice est définie positive, si $\operatorname{tr} H_f(a) < 0$ alors la matrice est définie négative.
   b) si $\det H_f(a) < 0$ alors on a deux valeurs propres de signes opposés , c'est donc un point selle.
   c) Si $\det H_f(a) = 0$ et si $\operatorname{tr} H_f(a) > 0$ alors $H_f(a) \notin \mathcal{S}_2^{-}(\mathbb{R})$.
   d) Si $\det H_f(a) = 0$ et si $\operatorname{tr} H_f(a) < 0$ alors $H_f(a) \notin \mathcal{S}_2^{+}(\mathbb{R})$.
   e) Si $\det H_f(a) = 0$ et si $\operatorname{tr} H_f(a) = 0$ alors on ne peut rien dire.
6) En pratique, pour trouver les extrema de f sur une partie A, on cherche d'abord les points critiques de f, on détermine leur nature, puis on regarde ce qui se passe sur la frontière de A.
7) Pour prouver l'existence d'un minimum global, on pourra utiliser le théorème suivant :

> **Théorème :**
> soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors f admet un minimum sur E.

IX: Exemples de résolution d'E.D.P. d'ordre 1 et d'ordre 2 :

1) La présence de termes $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ou $-y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ doit faire penser à effectuer un changement de variables en polaires.

2) La présence de termes de la forme $\alpha \dfrac{\partial f}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial f}{\partial y}$ doit faire penser à effectuer un changement de variable affine : $x = au + bv, y = cu + dv$.

3) Dans les autres cas, le changement de variable sera fourni par l'énoncé ou par l'examinateur.

X: Dérivée de $F : x \longmapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathbf{d}t$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \subset \mathbb{R} \times J \subset \mathbb{R}$, et u et v de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans J.

Proposition : F est $\mathcal{C}^1$ sur I et $F'(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t + v'(x) f(x, v(x)) - u'(x) f(x, u(x))$.

---

le prochain (et dernier) programme sera identique à celui-ci.