

Le programme de colle de cette semaine est constitué du programme de la semaine 16 et d'icelui.

CHAPITRE 17 : VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

I: Généralités Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{A})$ désignera un espace **probabilisable** quelconque et E un ensemble non vide.

1) **Définitions :** Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et E un ensemble non vide. On appelle *variable aléatoire discrète* toute application $X : \Omega \rightarrow E$ telle que :

- $X(\Omega)$ est un ensemble au plus dénombrable ;
- Pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.

2) **Proposition et définition :** *système complet d'évènements associés à une variable aléatoire.*

3) **Loi d'une variable aléatoire :**

► **Proposition :** Soit $A \subset \mathcal{P}(X(\Omega))$, on définit $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$.

$\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$.

4) **Proposition :** Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Soit une énumération de $X(\Omega) = \{x_n\}_{n \in I}$. Soit $\{p_n\}_{n \in I}$ une suite de réels telle que $\forall n \in I$, $p_n \in [0, 1]$ et $\sum_{n \in I} p_n = 1$ alors il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $\forall n \in I$, $\mathbb{P}(X = x_n) = p_n$.

5) **Fonction de répartition**

6) **Loi conditionnelle d'une variable aléatoire :**

7) ► **Lois usuelles :**

a) **Loi uniforme :**

b) **Loi de Bernoulli :**

c) **Loi binomiale :**

d) ► **La loi géométrique :**

Soit $p \in]0, 1[$. La variable aléatoire X suit la *loi géométrique de paramètre p* , notée $X \sim \mathcal{G}(p)$,

si $\mathbb{P}(X = 0) = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$.

Remarque : La loi géométrique peut s'interpréter comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p .

e) ► **La loi de Poisson :** X suit la *loi de Poisson de paramètre $\lambda \geq 0$* , si $\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$.

Notation : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

f) Loi binomiale négative : HP

C'est la loi du n -ème succès lors d'une série d'expériences aléatoires indépendantes qui ont chacune une probabilité p de se réaliser.

On a alors $\mathbb{P}(T_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$.

8) Définition et proposition : Soit X une v.a.d. de Ω dans E et f une fonction de E dans F , alors $f(X)$ est une v.a.d. de Ω dans F .

II: Couples de variables aléatoires discrètes

1) Définition : **Loi conjointe et lois marginales**
Proposition : les lois marginales se déduisent de la loi conjointes mais la réciproque n'est pas vraie.

III: Variables aléatoires discrètes indépendantes :

1) Définition :

2) Notation : $X \perp\!\!\!\perp Y$

3) ► Proposition : Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors pour toute partie $A \subset X(\Omega)$ et toute partie $B \subset Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$$

4) ► Proposition : quelque soient f et g deux fonctions,

$$X \perp\!\!\!\perp Y \implies f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$$

5) a) Définition : famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes

b) ♦ Proposition : Lemme des coalitions :

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une famille finie de v.a.d.r.m.i, soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et soient $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$, alors les v.a.d. réelles $Y = \varphi(X_1, \dots, X_k)$ et $Z = \psi(X^{k+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque : on peut généraliser à plus de deux coalitions.

c) Famille de vad iid

IV: Espérance d'une v.a.d.

1) a) Définitions :

i) Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

On appelle *espérance de X* , la somme $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)$, avec par convention

$x \mathbb{P}(X = x) = 0$ si $x = +\infty$ et $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$.

Par conséquent : $\mathbb{E}(X) \in [0, +\infty]$.

On dit que X est *d'espérance finie* si la famille $(x \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.

ii) Espérance d'une vad à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

définition : On dit que X est *d'espérance finie* si la famille $(x \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.

On appelle alors *espérance de X* le réel $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)$.

- b) 1. **Proposition** : Si $|X| \leq Y$ et Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.
 2. **Proposition** : Si X est une v.a.d. bornée alors elle est d'espérance finie.
 3. **Proposition** : Si $X(\Omega) \subset [a, b]$ alors $\mathbb{E}(X) \in [a, b]$.
 c) ► **Proposition** : Si X est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

(formule valable dans $[0, +\infty]$)

- d) **Définition** : On dit que la v.a.d. X est centrée si elle est d'espérance finie et si $\mathbb{E}(X) = 0$.

2) ► Théorème du transfert :

Soient X une v.a.d. et f une application à valeurs réelles définies sur $X(\Omega)$, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x)$ est sommable.

Dans ce cas, on a :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x).$$

Remarque : La formule du transfert s'applique aux couples et aux n -uplets de variables aléatoires.

3) Propriétés :

- a) **Linéarité** :
 Soient X et Y deux v.a.d. et soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.
 b) **Positivité** : Si X est à valeurs réelles positives ou nulles alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
 Corollaire : $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(|X|)$.
 c) **Croissance** : Si $X \leq Y$ alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
 d) Si $|X| \leq Y$ et si Y est d'espérance finie, alors X itou.
 e) **Corollaire** : Si X est une v.a.d. d'espérance finie, alors $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est une v.a.d. centrée.

4) ◆ Théorème : Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Remarque La réciproque est fausse.

5) Fonction indicatrice : Soit $A \in \mathcal{A}$, on définit $\mathbb{1}_A \begin{cases} \Omega & \longrightarrow & \{0, 1\} \\ \omega & \longmapsto & 1 \text{ si } \omega \in A, 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Propriétés :

- a) $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
 b) $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
 c) généralisation : $\mathbb{1}_{A_1 \cap \dots \cap A_n} = \mathbb{1}_{A_1} \times \dots \times \mathbb{1}_{A_n}$
 d) $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
 e) $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.
 f) **Application : formule du crible** :
 Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

V: Variance, écart-type d'une v.a.d.

- 1) a) **Définition :** On dit qu'une v.a.d. réelle X admet un moment d'ordre k si X^k est d'espérance finie.
- b) **Proposition :** Si X admet un moment d'ordre k , alors X admet un moment d'ordre j pour tout $j \in \{1, \dots, k-1\}$.
En particulier, si X admet un moment d'ordre 2 alors X est d'espérance finie.
- c) **Proposition :** Si X admet un moment d'ordre 2, alors $X - \mathbb{E}(X)$ admet un moment d'ordre 2.
- d) **Définition : Variance, écart type**
- e) **Formule de Huygens-Koenig :**

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

2) Propriétés :

- a) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$.
 - b) **Proposition :** Soit X une v.a.d. admettant une variance, on dit que X est centrée réduite si $\mathbb{E}(X) = 0$ et si $\mathbb{V}(X) = 1$.
 - c) **Proposition :** Soit X une v.a.d. admettant une variance non nulle, alors $Y = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
 - d) **Proposition :** Si X est déterministe alors $\mathbb{V}(X) = 0$. Réciproquement, si $\mathbb{V}(X) = 0$ alors X est constante presque-sûrement.
- 3) **Inégalité de Cauchy-Schwarz : Théorème :** Soient X et Y admettant chacun un moment d'ordre 2, alors XY est d'espérance finie et

$$\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$$

4) Variance des lois usuelles :

a) Proposition :

Soit $X \sim \mathbb{U}(\{a_1, \dots, a_n\})$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^2$$

Cas particulier : si $X \sim \mathbb{U}(\{1, \dots, n\})$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

b) Loi de Bernoulli :

Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$.

c) Loi binomiale :

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.

d) Loi géométrique :

Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

e) Loi de Poisson :

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$.

5) Variance d'une somme finie de variables aléatoires :

- a) ► **Proposition** : Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une famille finie de v.a.d. admettant un moment d'ordre 2.

$$\text{Alors } \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)).$$

- b) ► **Corollaire** : Si les $(X_1, \dots, X_n)$ admettent un moment d'ordre 2 et sont deux à deux indépendantes,

$$\text{alors } \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i)$$

6) Covariance de deux v.a.d. :

- a) **Définition** : Soient X et Y deux v.a.d. admettant un moment d'ordre 2, on définit *leur covariance* :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))).$$

- b) **Définition** : Leur coefficient de corrélation : $\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$

- c) ► **Proposition** :

i) $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$

ii) $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1.$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

d) **Proposition** : $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y)$

- e) **Remarque** : Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$ mais la réciproque est fausse.

- f) **Remarque** : $\rho(X, Y) = \pm 1 \iff X + \lambda Y = a$ presque sûrement. (où a et λ sont des constantes).

VI: Inégalités probabilistes

1) Inégalités de Markov :

- a) **Première inégalité de Markov** : Soit X une v.a.d. d'espérance finie, alors pour tout $t > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{t}$$

- b) **Deuxième inégalité de Markov** : Soit X une v.a.d. admettant un moment d'ordre 2, alors pour tout $t > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^2)}{t^2}$$

- c) **Troisième inégalité de Markov** : Soit X une v.a.d. et f une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f(X)$ soit d'espérance finie, alors pour tout $t > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(f(|X|))}{f(t)}$$

2) ► Inégalité de Bienaymé - Tchebychev :

Soit X une v.a.d. admettant un moment d'ordre 2, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Corollaire : $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$

- 3) **Loi faible des grands nombres** : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.d. i.i.d. (ou même indépendantes 2 à 2) admettant un moment d'ordre 2, alors, si on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$,

$$\blacktriangleright \forall \varepsilon > 0, \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} S_n - m \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Corollaire : $\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} S_n - m \right| > \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$

VII: Quelques propriétés des lois usuelles :

1) Loi binomiale :

Proposition : Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ indépendantes, alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

2) Loi géométrique :

a) **Théorème - Définition** : Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors X est sans mémoire, i.e. $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X > n + k | X > n) = \mathbb{P}(X > k)$.

b) **Proposition** : La loi géométrique est la seule loi de probabilité discrète à être sans mémoire.

c) Soient $X_1, \dots, X_n$ n v.a.d. réelles mutuellement indépendantes telles que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, X_i \sim \mathcal{G}(p_i)$. On pose $X = \min(X_1, \dots, X_n)$ alors $X \sim \mathcal{G}(1 - (1 - p_1) \times \dots \times (1 - p_n))$.

3) Loi de Poisson :

a) **Proposition** : Soient $X_1, \dots, X_n$ n v.a.d. réelles mutuellement indépendantes telles que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$. On pose $X = X_1 + \dots + X_n$ alors $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.

4) Lien loi binomiale - loi de Poisson :

a) **Proposition** : Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

b) **Remarque** : Lorsque $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, le calcul peut-être compliqué lorsque n est grand. On cherchera par conséquent à approximer X par une loi de Poisson.

c) La loi de Poisson est la loi des événements rares :

En pratique : on utilisera une loi de Poisson pour modéliser un événement aléatoire lorsque :

- i) Le nombre de réalisations de l'évènement au cours d'intervalles de temps disjoints sont des v.a.d. indépendantes.
- ii) La probabilité que l'évènement se réalise pendant un intervalle de temps donné est proportionnelle à la longueur de l'intervalle.
- iii) La probabilité que l'évènement se réalise deux fois ou plus au cours d'une unité de temps est négligeable.

VIII: Séries Génératrices :

1) **Définition :** Soit X une variable aléatoire discrète réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$,
la série entière $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$ est appelée *série génératrice* (ou fonction génératrice) de X .

2) On note R_X le rayon de convergence de cette série.

Proposition : $R_X \geq 1$

3) **Remarque :** $\forall t \in [0, 1], G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.

4) **Propriétés :**

a) $G_X(1) = 1$.

b) $G_X(t)$ est définie sur $[-1, 1]$.

c) Soient X et Y deux v.a.r.d., $G_X(t) = G_Y(t) \implies X$ et Y suivent la même loi.
i.e. une v.a.r.d. est caractérisée par sa série génératrice.

5) **► Théorème :**

X admet une espérance $\iff G_X$ est dérivable en 1, et dans ce cas $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

6) **► Théorème :**

X admet une variance $\iff G_X$ est 2 fois dérivable en 1, et dans ce cas

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$$

7) **► Théorème :** Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$.

8) **► Séries génératrices des v.a.r.d. usuelles :**

LOI		SÉRIE GÉNÉRATRICE	R.C.V.
<i>Loi de Bernouilli</i>	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	$G_X(t) = 1 - p + pt$	$R_X = +\infty$
<i>Loi Binômiale</i>	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$	$G_X(t) = (1 - p + pt)^n$	$R_X = +\infty$
<i>Loi Géométrique</i>	$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	$G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1 - p)t}$	$R_X = \frac{1}{1 - p}$
<i>Loi de Poisson</i>	$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	$G_X(t) = \exp(\lambda(t - 1))$	$R_X = +\infty$