PC $\overset{\star}{2}$

Colles semaine 16

du 11 au 14 février 2025

Rappel : Le programme de colle en semaine 16 est constitué du programme de la semaine 15 et d'icelui.

Chapitre 15 : Ensembles dénombrables - familles sommables.

« Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste. » (Programme officiel de PC)

I: Dénombrabilité

1) Ensembles dénombrables, au plus dénombrables.

2) $\mathbb{N}^2, \mathbb{Q}$ sont dénombrables, $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

3) Une union finie, un produit fini d'ensembles au plus dénombrables l'est.

4) Une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables l'est.

II: Familles sommables

1) Famille sommable de réels positifs.

a) Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors pour toute bijection σ de I, $u_{\sigma(i)}$ est une famille sommable et $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$.

b) Proposition : Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels positifs, alors I est à support apd.

c) Pour une famille indexée par $\mathbb{N}$, équivalence entre famille sommable et série convergente.

2) Famille sommable de réels ou de complexes.
Définition : Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels ou de complexes est sommable si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est.

- **cas d'une famille de réels :** pour un réel x on note $x^+ = \max(x,0)$ et $x^- = -\min(x,0)$.
  Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels sommable.
  On **définit alors** $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$.
- **cas d'une famille de complexes :**
  Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels sommable.
  On **définit alors** $\displaystyle\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} \mathrm{Re}(u_k) + i\sum_{k\in I} \mathrm{Im}(u_k)$

3) Proposition : Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou de complexes et $(y_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs tels que

$$\forall i \in I, |x_i| \leqslant y_i$$

alors

$$(y_i)_{i\in I} \text{ sommable } \implies (x_i)_{i\in I} \text{ sommable }.$$

4) Sommation par paquets :
Théorème : Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou de complexes,
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I,

$$\text{la famille } (u_i)_{i\in I} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \text{ la famille } (u_i)_{i\in I_n} \text{ est sommable },\\ \text{la série } \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right) \text{ converge} \end{cases}$$

On a alors $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$

5) Théorème de Fubini pour les sommes doubles :

a) Pour les réels positifs :

Théorème : Soit $(a_{p,n})_{(p,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs indexée par $\mathbb{N}^2$.

$$\text{la famille } (a_{p,n})_{(p,n)\in\mathbb{N}^2} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \text{ la série } \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,n} \text{ converge },\\ \text{la série } \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,n}\right) \text{ converge} \end{cases}$$

On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,n}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p,n}\right)$$

b) Pour des réels quelconques ou des complexes :

Théorème : Soit $(a_{p,n})_{(p,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille indexée par $\mathbb{N}^2$.

$$\text{la famille } (a_{p,n})_{(p,n)\in\mathbb{N}^2} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \text{ la série } \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} |a_{p,n}| \text{ converge },\\ \text{la série } \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |a_{p,n}|\right) \text{ converge} \end{cases}$$

On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,n}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p,n}\right)$$

Chapitre 16 : Espaces probabilisés.

I: Situations classiques de dénombrement.

1) tirages ordonnés avec remise de p boules parmi n.

2) tirages simultanés d'un nombre indéterminé de boules par mi n.

3) tirages ordonnés sans remise de p boules parmi n.

4) tirages non ordonnés sans remise de p boules parmi n.

5) tirages non ordonnés avec remise de p boules parmi n.

II: Espace Probabilisé :

1) Définitions : Tribu, espace probabilisable, probabilité sur un espace probabilisable, espace probabilisé.

2) Théorème :

a) ► **Continuité croissante :**
Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements de $\mathcal{A}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

b) **Continuité décroissante :**
Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements de $\mathcal{A}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

3) **Sous-additivité :** Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements de $\mathcal{A}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Le deuxième terme pouvant être une série divergente.

4) **Définitions :** Distribution de probabilité sur un ensemble dénombrable, construction d'une probabilité à partir d'une série de réels positifs convergente de somme égale à 1.

5) **Définitions :** Evènement négligeable, presque-sûr.
Proposition :
a) Une réunion au plus dénombrable d'évènements négligeables est négligeable.
b) Une intersection au plus dénombrable d'évènements presque-sûrs est presque-sûre.

6) **Formule du crible (HP) :**[1] Soient $A_1, ..., A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<...<i_k\leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k})$$

III: Conditionnement et indépendance

1) **Probabilité conditionnelle :**
a) **Proposition :** Soit $B \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, alors l'application $\mathbb{P}_B$ définie sur $\mathcal{A}$ par :
$\forall\, \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ est une probabilité sur Ω.

2) **Formule des probabilités composées :**
a) Soient A, B et $C \in \mathcal{P}(\Omega)$.
Si $P(A \cap B) > 0$ alors $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}_{A\cap B}(C)$.

b) ► **Généralisation :**
Soient $(A_1, ..., A_n)$ n une famille d'évènements de l'univers Ω telle que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3) \times ... \times \mathbb{P}_{A_1\cap...\cap A_{n-1}}(A_n)$$

c) ► **Cas particulier :** Si $A_n \subset A_{n-1} \subset ... \subset A_1$ la formule précédente donne :

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(A_3) \times ... \times \mathbb{P}_{A_{n-1}}(A_n)$$

1. ou formule de Poincaré

3) Formule des probabilités totales :

a) Définition : système complet et quasi-complet d'évènements

b) ▶ **Théorème :** Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet ou quasi-complet dénombrables d'évènements de l'univers Ω alors, pour tout évènement B de $\mathcal{A}$,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B)\mathbb{P}(A_n)$$

avec par convention, $\mathbb{P}_{A_n}(B)\mathbb{P}(A_n) = 0$ lorsque $\mathbb{P}(A_n) = 0$.

4) ▶ **Formule de Bayes :** Soient A et B deux évènements de probabilité non nulle alors

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$$

5) Évènements indépendants :

Définition, indépendance 2 à 2, indépendance mutuelle d'une famille dénombrable d'évènements d'un espace probabilisé.

Proposition : l'indépendance mutuelle implique l'indépendance 2 à 2 mais la réciproque est fausse.

---

le prochain programme (semaine du 4 mars) sera variable et aléatoire (mais discret).