

du 10 au 13 février 2026

Le programme de colle de cette semaine est constitué du programme de la semaine 15 et d'icelui.

CHAPITRE 15 : ENSEMBLES DÉNOMBRABLES - FAMILLES SOMMABLES.

« Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste. » (Programme officiel de PC)

I: Dénombrabilité

- 1) Ensembles dénombrables, au plus dénombrables.
- 2) $\blacklozenge$ $\mathbb{N}^2, \mathbb{Q}$ sont dénombrables, $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
- 3) Une union finie, un produit fini d'ensembles au plus dénombrables l'est.
- 4) Une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables l'est.

II: Familles sommables

1) Famille sommable de réels positifs.

- a) Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors pour toute bijection σ de I , $u_{\sigma(i)}$ est une famille sommable et

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}.$$
- b) **Proposition :** Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable de réels positifs, alors I est à support apd.
- c) Pour une famille indexée par $\mathbb{N}$, équivalence entre famille sommable et série convergente.

2) Famille sommable de réels ou de complexes.

Définition : Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de réels ou de complexes est sommable si la famille $(|u_i|)_{i \in I}$ l'est.

- **cas d'une famille de réels :** pour un réel x on note $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = -\min(x, 0)$.
Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels sommable.

On définit alors $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-$.

- **cas d'une famille de complexes :**

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels sommable.

On définit alors $\sum_{k \in I} u_k = \sum_{k \in I} \operatorname{Re}(u_k) + i \sum_{k \in I} \operatorname{Im}(u_k)$

- 3) **Proposition :** Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou de complexes et $(y_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs tels que

$$\forall i \in I, |x_i| \leq y_i$$

alors

$$(y_i)_{i \in I} \text{ sommable} \implies (x_i)_{i \in I} \text{ sommable}.$$

4) $\blacklozenge$ Sommation par paquets :

Théorème : Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou de complexes,

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de I ,

$$\text{la famille } (u_i)_{i \in I} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \text{ la famille } (u_i)_{i \in I_n} \text{ est sommable,} \\ \text{la série } \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in I_n} |u_i| \right) \text{ converge} \end{cases}$$

$$\text{On a alors } \sum_{i \in I} u_i = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right)$$

5) Théorème de Fubini pour les sommes doubles :

a) **Théorème :** Soit $(a_{p,n})_{(p,n) \in \mathbb{N}^2}$ une famille indexée par $\mathbb{N}^2$.

$$\text{la famille } (a_{p,n})_{(p,n) \in \mathbb{N}^2} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{p,n}| \text{ converge,} \\ \text{la série } \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |a_{p,n}| \right) \text{ converge} \end{cases}$$

On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,n} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p,n} \right)$$

CHAPITRE 16 : ESPACES PROBABILISÉS.

1) Situations classiques de dénombrement.

- a) tirages ordonnés avec remise de p boules parmi n .
- b) tirages simultanés d'un nombre indéterminé de boules parmi n .
- c) tirages ordonnés sans remise de p boules parmi n .
- d) tirages non ordonnés sans remise de p boules parmi n .
- e) tirages non ordonnés avec remise de p boules parmi n .

2) Espace Probabilisé :

a) **Définitions :** Tribu, espace probabilisable, probabilité sur un espace probabilisable, espace probabilisé.

b) **Théorème :**

i) **► Continuité croissante :**

Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'évènements de $\mathcal{A}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right)$$

ii) **Continuité décroissante :**

Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'évènements de $\mathcal{A}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \right)$$

c) **Sous-additivité :** Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'évènements de $\mathcal{A}$,

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Le deuxième terme pouvant être une série divergente.

d) **Définitions :** Distribution de probabilité sur un ensemble dénombrable, construction d'une probabilité à partir d'une série de réels positifs convergente de somme égale à 1.

e) **Définitions :** Evènement négligeable, presque-sûr.

Proposition :

i) Une réunion au plus dénombrable d'évènements négligeables est négligeable.

ii) Une intersection au plus dénombrable d'évènements presque-sûrs est presque-sûre.

f) **Formule du crible (HP) :**¹ Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

3) Conditionnement et indépendance

a) **Probabilité conditionnelle :**

i) **Proposition :** Soit $B \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, alors l'application $\mathbb{P}_B$ définie sur $\mathcal{A}$ par :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \text{ est une probabilité sur } \Omega.$$

b) **Formule des probabilités composées :**

i) Soient A, B et $C \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Si $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$ alors $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}_A(B) \mathbb{P}_{A \cap B}(C)$.

ii) **► Généralisation :**

Soient $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'évènements de l'univers Ω telle que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$,
alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

iii) **► Cas particulier :** Si $A_n \subset A_{n-1} \subset \dots \subset A_1$ la formule précédente donne :

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_{n-1}}(A_n)$$

c) **Formule des probabilités totales :**

i) **Définition : système complet et quasi-complet d'évènements**

ii) **► Théorème :** Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet ou quasi-complet dénombrables d'évènements de l'univers Ω alors, pour tout évènement B de $\mathcal{A}$,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B) \mathbb{P}(A_n)$$

avec par convention, $\mathbb{P}_{A_n}(B) \mathbb{P}(A_n) = 0$ lorsque $\mathbb{P}(A_n) = 0$.

d) **► Formule de Bayes :** Soient A et B deux évènements de probabilité non nulle alors

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A) \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$$

e) **Évènements indépendants :**

Définition, indépendance 2 à 2, indépendance mutuelle d'une famille dénombrable d'évènements d'un espace probabilisé.

Proposition : l'indépendance mutuelle implique l'indépendance 2 à 2 mais la réciproque est fausse.

1. ou formule de Poincaré