

CHAPITRE 14 : SÉRIES ENTIÈRES

I: Définitions :

1) Définition d'une série entière.

2) **Définition** : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière :

a) On pose $X = \{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ soit bornée} \}$. Si X est borné, on définit le *rayon de convergence* $R = \sup X$, sinon on pose $R = \infty$.

b) **Disque ouvert de convergence** : c'est le disque ouvert $D(O, R)$.

3) **Théorème** : soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

a) Si $|z| < R$ alors $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

b) Si $|z| > R$ alors $|a_n||z|^n$ n'est pas bornée donc $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

c) Si $|z| = R$, on ne peut rien dire.

4) **Proposition** :

a) $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ soit bornée} \}$.

b) $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, a_n r^n \rightarrow 0\}$.

c) $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, \sum a_n r^n \text{ soit convergente} \}$.

II: Détermination pratique du rayon de convergence :

1) **Théorème** : Soient a_n et b_n deux suites complexes, on note R_a et R_b les rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

(i) $a_n = O(b_n) \implies R_a \geq R_b$, (ii) $a_n \sim b_n \implies R_a = R_b$.

2) **Règle de d'Alembert** :

a) **Proposition** :

Si $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et si $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ alors

$$R = \frac{1}{\ell}$$

b) **Remarques** :

- Dans le cas de séries entières lacunaires, il est préférable de poser $u_n = |a_n||z|^n$ et d'appliquer le théorème de d'Alembert pour les séries numériques.
- Contrairement à ce que pensent beaucoup d'élèves, **la réciproque de ce théorème est fautive**.

III: Régularité de la somme :

1) **Théorème** : soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ alors :

- a) $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $\overline{D(0, r)}$ inclus dans le disque ouvert de convergence.
- b) $f(z) = \sum a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert de convergence.
- Corollaire :** $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence.

IV: Opérations élémentaires sur les séries entières :

- 1) **Somme :** soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b , alors $\sum (a_n + b_n) z^n$ est une série entière de rayon de convergence R_c avec :

$$(i) \quad R_c \geq \min(R_a, R_b), \quad (ii) \quad R_c = \min(R_a, R_b) \text{ si } R_a \neq R_b.$$

- 2) **Produit de Cauchy :** on pose $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, alors

- $\sum c_n z^n$ a pour rayon de convergence $R_c \geq \min(R_a, R_b)$
- $\forall z \in D(O, \min(R_a, R_b)), \quad \boxed{C(z) = A(z) \cdot B(z)}$
avec $A(z) = \sum a_n z^n, B(z) = \sum b_n z^n$ et $C(z) = \sum c_n z^n$.

V: Dérivation et intégration terme à terme :

- 1) **Proposition :** soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R alors $\sum a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.
- 2) Cas des séries entières d'une variable réelle : $((a_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une suite à valeurs complexes mais x est un réel).

Théorème 1 : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On pose, pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum a_n x^n$.

(i) La série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment de $]-R, R[$.

a) (ii) f est continue sur $]-R, R[$.

(iii) on pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. On a alors $\forall x \in]-R, R[, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.
(intégration terme à terme).

- Théorème 2 :** Avec les mêmes notations :
- b) (i) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$.
- (ii) $\forall x \in]-R, R[, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$. (dérivation terme à terme).

- c) **Généralisation :** f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in]-R, R[, f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+k)(n+k-1) \dots (n+1) a_{n+k} x^n \end{aligned}$$

Application : $\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} x^n$.

d) ► **Théorème** : (unicité des coefficients du développement en série entière) : avec les

mêmes notations :
$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

e) **Corollaire** : soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b strictement positifs.

S'il existe $r > 0$ tel que $r \leq \min(R_a, R_b)$ et tel que $\forall x \in]-r, r[$, $\sum a_n x^n = \sum b_n x^n$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

f) **Conséquences** : si $f(x) = \sum a_n x^n$ est paire sur $]-r, r[$ alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$ et *mutatis mutandis*.

3) ► **Proposition** : (unicité des coefficients pour une série de la variable complexe) : soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence R_a et R_b strictement positifs. S'il existe $r > 0$ tel que $r \leq \min(R_a, R_b)$ et tel que $\forall z \in D(O, r)$, $\sum a_n z^n = \sum b_n z^n$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

VI: Fonctions développables en série entière sur un intervalle :

(on s'intéresse ici aux séries entières d'une variable réelle $\sum a_n x^n$).

1) **Définition** : fonction développable en série entière. Série de Taylor d'une fonction en 0.

2) **Proposition** : si f est développable en série entière sur $]-R, -R[$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais la réciproque est fausse

3) ► **Théorème** : soit $I =]-r, r[$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$.

$$f \text{ DSE sur } I \iff \forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0 \text{ avec } R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

4) **Méthodes principales pour déterminer le D.S.E. d'une fonction** :

a) Opérations élémentaires : somme, produit de Cauchy.

b) Intégration, dérivation.

c) méthode de l'équation différentielle et raisonnement par analyse / synthèse.

d) méthode de l'équation fonctionnelle et raisonnement par analyse / synthèse.

e) majoration du reste intégrale.

f) Intersion somme/intégrale ou double somme.

5) **Développement en série entière des fonctions usuelles** :

fonction	DSE	RCV	Méthode
► $(1+x)^\alpha$	$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	1	► <i>Equa Diff</i>
e^{zx}	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} x^n$	∞	Taylor + $\int$
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
$\operatorname{ch} x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\operatorname{sh} x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n$	1	$\int \frac{dx}{1+x}$
$\arctan(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$\int \frac{dx}{1+x^2}$
$\operatorname{Argth}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$\int \frac{dx}{1-x^2}$
$\arcsin(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Argsh}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

VII: Calculs de sommes :

- 1) Séries entières de la forme $\sum P(n)x^n$ où P est un polynôme.
- 2) Séries entières de la forme $\sum F(n)x^n$ où F est une fraction rationnelle.
- 3) Séries entières de la forme $\sum \frac{P(n)}{n!} x^n$ où P est un polynôme.
- 4) Calcul de $\sum a_n x^n$ connaissant une relation de récurrence entre les a_n au moyen d'une équation différentielle.
- 5) Calcul de $\sum a_n x^n$ où a_n est définie par une intégrale.

VIII: Développement en série entière ailleurs qu'en 0 :

- 1) **Définition** : on dit que f est développable en série entière en $a \in \mathbb{C}$ s'il existe $r \in \mathbb{R}_+$ et une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, tels que $\forall z \in D(a, r)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$.
- 2) **Proposition** : f DSE en $a \iff g$ DSE en 0 où $g(z) = f(z+a)$.
Moralité : On se ramène donc toujours à l'étude au voisinage de 0.

IX: Compléments de cours :

1) Développement en série entière d'une fraction rationnelle :

Proposition : soit $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ une fraction rationnelle telle que 0 ne soit pas racine de Q
alors F est DSE et $R = \min\{|a_i|, a_i \text{ racine de } Q\}$.

2) Etude aux bords du disque (ou de l'intervalle) de convergence :

Cas où l'on peut passer à la limite quand $x \rightarrow R$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

3) DSE de $1/f(x)$ avec f DSE telle que $f(0) \neq 0$.

4) Fonctions absolument monotones.

le prochain programme sera selon toute : probabilités.