PC $\overset{\star}{2}$

Colles semaine 15

du 4 au 7 février 2025

Rappel : Le programme de colle en semaine 15 est constitué du programme de la semaine 14 et d'icelui.

Chapitre 14 : Séries entières : tout le chapitre (voir programme précédent)

Chapitre 15 : Ensembles dénombrables - familles sommables.

« Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste. » (Programme officiel de PC)

I: Dénombrabilité

1) Ensembles dénombrables, au plus dénombrables.

2) $\mathbb{N}^2, \mathbb{Q}$ sont dénombrables, $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

3) Une union finie, un produit fini d'ensembles au plus dénombrables l'est.

4) Une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables l'est.

II: Familles sommables

1) Famille sommable de réels positifs.

a) Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors pour toute bijection σ de I, $u_{\sigma(i)}$ est une famille sommable et $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$.

b) Proposition : Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels positifs, alors I est à support apd.

c) Pour une famille indexée par $\mathbb{N}$, équivalence entre famille sommable et série convergente.

2) Famille sommable de réels ou de complexes.
Définition : Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels ou de complexes est sommable si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est.

- **cas d'une famille de réels :** pour un réel x on note $x^+ = \max(x,0)$ et $x^- = -\min(x,0)$.
  Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels sommable.
  On **définit alors** $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$.
- **cas d'une famille de complexes :**
  Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels sommable.
  On **définit alors** $\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} \mathrm{Re}(u_k) + i \sum_{k\in I} \mathrm{Im}(u_k)$

3) Proposition : Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou de complexes et $(y_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs tels que

$$\forall i \in I, |x_i| \leqslant y_i$$

alors

$$(y_i)_{i\in I} \text{ sommable } \Longrightarrow (x_i)_{i\in I} \text{ sommable .}$$

4) **Sommation par paquets :**

Théorème : Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou de complexes,
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I,

$$\text{la famille } (u_i)_{i\in I} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \text{ la famille } (u_i)_{i\in I_n} \text{ est sommable },\\ \text{la série } \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right) \text{ converge} \end{cases}$$

On a alors $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$

5) **Théorème de Fubini pour les sommes doubles :**

a) **Pour les réels positifs :**

Théorème : Soit $(a_{p,n})_{(p,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs indexée par $\mathbb{N}^2$.

$$\text{la famille } (a_{p,n})_{(p,n)\in\mathbb{N}^2} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \text{ la série } \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,n} \text{ converge },\\ \text{la série } \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,n}\right) \text{ converge} \end{cases}$$

On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,n}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p,n}\right)$$

b) **Pour des réels quelconques ou des complexes :**

Théorème : Soit $(a_{p,n})_{(p,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille indexée par $\mathbb{N}^2$.

$$\text{la famille } (a_{p,n})_{(p,n)\in\mathbb{N}^2} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \text{ la série } \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} |a_{p,n}| \text{ converge },\\ \text{la série } \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |a_{p,n}|\right) \text{ converge} \end{cases}$$

On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,n}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p,n}\right)$$

---

le prochain programme sera presque-sûrement : probabilités.