PC $\overset{\star}{2}$

Colles semaine 14

du 28 au 31 janvier 2025

Rappel : Le programme de colle en semaine 14 est constitué du programme de la semaine 13 et d'icelui.

Chapitre 14 : Séries entières

I: Définitions :

1) Définition d'une série entière.

2) **Définition :** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière :

a) On pose $X = \{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée $\}$. Si X est borné, on définit le *rayon de convergence* $R = \sup X$, sinon on pose $R = \infty$.

b) **Disque ouvert de convergence :** c'est le disque ouvert $D(O, R)$.

3) ► **Théorème :** soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

a) Si $|z| < R$ alors $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

b) Si $|z| > R$ alors $|a_n||z|^n$ n'est pas bornée donc $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

c) Si $|z| = R$, on ne peut rien dire.

4) **Proposition :**

a) $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée $\}$.

b) $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, a_n r^n \longrightarrow 0\}$.

c) $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, \sum a_n r^n$ soit convergente $\}$.

II: Détermination pratique du rayon de convergence :

1) **Théorème :** Soient a_n et b_n deux suites complexes, on note R_a et R_b les rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.
(i) $\quad a_n = O(b_n) \Longrightarrow R_a \geqslant R_b,$ $\qquad (ii)$ $\quad a_n \sim b_n \Longrightarrow R_a = R_b$.

2) **Règle de d'Alembert** :

a) **Proposition :**
Si $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et si $|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}|$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ alors

$$\boxed{R = \frac{1}{\ell}}$$

b) **Remarques :**

- Dans le cas de séries entières lacunaires, il est préférable de poser $u_n = |a_n||z|^n$ et d'appliquer le théorème de d'Alembert pour les séries numériques.
- Contrairement à ce que pensent beaucoup d'élèves, **la réciproque de ce théorème est fausse** .

III: Régularité de la somme :

1) **Théorème :** soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ alors :

   a) $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $\overline{D(0,r)}$ inclus dans le disque ouvert de convergence.

   b) $f(z) = \sum a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert de convergence.

   Corollaire : $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence.

IV: Opérations élémentaires sur les séries entières :

1) **Somme :** soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b, alors $\sum (a_n + b_n) z^n$ est une série entière de rayon de convergence R_c avec :

$$(i) \quad R_c \geqslant \min(R_a, R_b), \qquad (ii) R_c = \min(R_a, R_b) \text{ si } R_a \neq R_b.$$

2) ▶ **Produit de Cauchy :** on pose $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, alors

   - $\sum c_n z^n$ a pour rayon de convergence $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$
   - $\forall z \in D(O, \min(R_a, R_b))$, $\boxed{\text{C(z) = A(z) B(z)}}$
     avec $A(z) = \sum a_n z^n, B(z) = \sum b_n z^n$ et $C(z) = \sum c_n z^n$.

V: Dérivation et intégration terme à terme :

1) ▶ **Proposition :** soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R alors $\sum a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.

2) Cas des séries entières d'une variable réelle : ($(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs complexes mais x est un réel).

   a) ▶ **Théorème 1 :** Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
   On pose, pour tout $x \in]-R, R[\,,\ f(x) = \sum a_n x^n$.
   (i) La série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment de $]-R, R[$.
   (ii) f est continue sur $]-R, R[$.
   (iii) on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. On a alors $\forall x \in]-R, R[\,,\ F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.
   (intégration terme à terme).

   b) ▶ **Théorème 2 :** Avec les mêmes notations :
   (i) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$.
   (ii) $\forall x \in]-R, R[\,,\ f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$. (dérivation terme à terme).

   c) **Généralisation :** f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in]-R, R[\,,\ f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+k)(n+k-1)\ldots(n+1) a_{n+k} x^n \end{aligned}$$

   Application : $\forall x \in]-1, 1[\,,\ \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} x^n$.

d) ► **Théorème :** (unicité des coefficients du développement en série entière) : avec les mêmes notations : $\boxed{a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}}$

e) **Corollaire :** soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b strictement positifs.
S'il existe $r > 0$ tel que $r \leqslant \min(R_a, R_b)$ et tel que $\forall x \in]-r, r[\,,\ \sum a_n x^n = \sum b_n x^n$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$.

f) **Conséquences :** si $f(x) = \sum a_n x^n$ est paire sur $]-r, r[$ alors $\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} = 0$ et *mutatis mutandis*.

3) ► **Proposition :** (unicité des coefficients pour une série de la variable complexe) : soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence R_a et R_b strictement positifs. S'il existe $r > 0$ tel que $r \leqslant \min(R_a, R_b)$ et tel que $\forall z \in D(O, r)$, $\sum a_n z^n = \sum b_n z^n$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$.

VI: Fonctions développables en série entière sur un intervalle :

(on s'intéresse ici aux séries entières d'une variable réelle $\sum a_n x^n$).

1) **Définition :** fonction développable en série entière. Série de Taylor d'une fonction en 0.

2) **Proposition :** si f est développable en série entière sur $]-R, -R[$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais la réciproque est fausse

3) ► **Théorème :** soit $I =]-r, r[$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$.

$$\boxed{f \text{ DSE sur } I \iff \forall x \in I,\ \lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0 \text{ avec } R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

4) **Méthodes principales pour déterminer le D.S.E. d'une fonction :**

a) Opérations élémentaires : somme, produit de Cauchy.

b) Intégration, dérivation.

c) méthode de l'équation différentielle et raisonnement par analyse / synthèse.

d) méthode de l'équation fonctionnelle et raisonnement par analyse / synthèse.

e) majoration du reste intégrale.

f) Interversion somme/intégrale ou double somme.

5) **Développement en série entière des fonctions usuelles :**

fonction	DSE	RCV	Méthode
▶ $(1+x)^\alpha$	$1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$	1	▶ *Equa Diff*
e^{zx}	$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}x^n$	∞	*Taylor* $+\int$
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
$\operatorname{ch} x$	$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\frac{e^x+e^x}{2}$
$\operatorname{sh} x$	$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\frac{e^x-e^x}{2}$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$	1	$\int\frac{dx}{1+x}$
$\arctan(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$\int\frac{dx}{1+x^2}$
$\operatorname{Argth}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$\int\frac{dx}{1-x^2}$
$\arcsin(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1\times3\times\dots\times(2n-1)}{2^nn!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Argsh}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1\times3\times\dots\times(2n-1)}{2^nn!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

6) **Développement en série entière d'une fraction rationnelle :**
Proposition : soit $F(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ une fraction rationnelle telle que 0 ne soit pas racine de Q alors F est DSE et $R=\min\{|a_i|, a_i \text{ racine de } Q\}$.

VII: Calculs de sommes :

1) Séries entières de la forme $\sum P(n)x^n$ où P est un polynôme.
2) Séries entières de la forme $\sum F(n)x^n$ où F est une fraction rationnelle.
3) Séries entières de la forme $\sum \frac{P(n)}{n!}x^n$ où P est un polynôme.
4) Calcul de $\sum a_nx^n$ connaissant une relation de récurrence entre les a_n au moyen d'une équation différentielle.
5) Calcul de $\sum a_nx^n$ où a_n est définie par une intégrale.

VIII: Développement en série entière ailleurs qu'en 0 :

1) **Définition :** on dit que f est développable en série entière en $a\in\mathbb{C}$ s'il existe $r\in\mathbb{R}_+$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, tels que $\forall z\in D(a,r)$, $\quad f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$.
2) **Proposition :** f DSE en $a \iff g$ DSE en 0 où $g(z)=f(z+a)$.
Moralité : On se ramène donc toujours à l'étude au voisinage de 0.

IX: Compléments de cours :

1) **Etude aux bords du disque (ou de l'intervalle) de convergence** :
Cas où l'on peut passer à la limite quand $x \to R$:
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$

2) **Définition du logarithme complexe** (HP) sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$: soit $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = |z|$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$, on définit $\ln z = \ln \rho + i\theta$.

3) a) **Proposition :** $\forall z \in D(0,1)$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = \ln(1+z)$.

b) On en déduit que pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(n\theta)}{n} = \ln(2\cos(\theta/2))$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \theta/2$$

4) **DSE de** $1/f(x)$ avec f DSE telle que $f(0) \neq 0$.

5) **Fonctions absolument monotones**.

---

le prochain programme sera selon toute : probabilités.