

du 21 au 25 janvier 2025

Rappel : Le programme de colle en semaine 13 est constitué du programme de la semaine 12 et d'icelui.

CHAPITRE 13 : INTÉGRALES À PARAMÈTRE

Dans tout le chapitre, les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Les démonstrations ne sont pas exigibles (mais il est bon de retenir la méthode de caractérisation séquentielle de la limite couplée avec le théorème de convergence dominée), en revanche les énoncés (en particulier les hypothèses) doivent être parfaitement sus.

I: Théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre ¹ :

Soit $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que

- (i) $\forall t \in I$, (i.e. à t fixé), la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur J .
- (ii) $\forall x \in J$, (i.e. à x fixé), la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I .
- (iii) $\exists \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :
 $\forall (x, t) \in J \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$. (hypothèse de domination)

alors la fonction $F : \begin{cases} J & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_I f(x, t) dt \end{cases}$ est continue sur J .

Remarques :

- 1)  **Version light** ² : on peut remplacer (iii) par
(iii)' : $\forall [a, b]$ segment inclus dans J , $\exists \varphi_{a,b} \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ intégrable sur I telle que :
 $\forall (x, t) \in [a, b] \times I, |f(x, t)| \leq \varphi_{a,b}(t)$. *Remarque : $\varphi_{a,b}$ dépend alors du segment $[a, b]$.*
- 2) Si I est un segment $[c, d]$, et si f est une fonction continue (en tant que fonction de deux variables), alors pour tout segment $[a, b]$ inclus dans J , f est continue sur le compact $[a, b] \times [c, d]$ donc est bornée, et par conséquent, l'hypothèse de domination est automatiquement vérifiée car une fonction constante est trivialement intégrable sur un segment.

II: Théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre ³ :

-
1. également appelé T.C.f.A.P.
 2. on l'appelle alors T.C.f.A.P.V.L.
 3. également appelé T.D.f.A.P.

Soit $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que

- (i) $\forall t \in I$, (i.e. à t fixé), la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J .
- (ii) $\forall x \in J$, (i.e. à x fixé), la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I .
- (iii) $\forall x \in J$, (i.e. à x fixé), la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I .
- (iv) $\exists \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :
 $\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$. (hypothèse de domination)

alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$
 (Formule de Leibniz).

Remarques :

- 1) **► Version light**⁴ : on peut remplacer (iv) par
 $(iv)' : \forall [a, b]$ segment inclus dans J , $\exists \varphi_{a,b} \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ intégrable sur I telle que :
 $\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi_{a,b}(t)$ *Remarque : $\varphi_{a,b}$ dépend alors de $[a, b]$.*
- 2) Si I est un segment $[c, d]$, et si $\frac{\partial f}{\partial x}$ est une fonction continue, alors pour tout segment $[a, b]$ inclus dans J , $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur le compact $[a, b] \times [c, d]$ donc est bornée, et par conséquent, l'hypothèse de domination est automatiquement vérifiée.

III: **◆ Généralisation**⁵ :

Soit $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$ tels que

- (i) $\forall t \in I$, (i.e. à t fixé), la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J .
- (ii) $\forall x \in J$ (i.e. à x fixé), $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, les k fonctions $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ ainsi que la fonction $t \mapsto f(x, t)$ sont continues par morceaux et intégrables sur I .
- (iii) $\exists \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :
 $\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$. (hypothèse de domination)

alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et
 $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, F^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt$.

- Version light** : on peut remplacer (iii) par
 $(iii)' : \forall [a, b]$ segment inclus dans J , $\exists \varphi_{a,b} \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ intégrable sur I telle que :
 $\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_{a,b}(t)$ *Remarque : $\varphi_{a,b}$ dépend alors de $[a, b]$.*

IV: **► Le T.C.D. à paramètre continu**⁶ :

4. on l'appelle alors T.D.∫.A.P.V.L.

5. appelé T.D.∫.A.P.G.

6. également appelé T.C.D.A.P.C.

Soient J et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit a une borne de J , soit f définie sur $J \times I$ telle que :

- (i) pour tout $t \in I$, $f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell(t)$,
- (ii) pour tout $x \in J$, les fonctions $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ,
- (iii) **hypothèse de domination** : il existe une fonction φ intégrable sur I telle que pour tout $(x, t) \in J \times I$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$.

alors ℓ est intégrable sur I et :

$$\int_I f(x, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_I \ell(t) dt$$

V: Applications - Exemples :

- 1) ► **Proposition** : La fonction Γ d'Euler : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
- 2) Nouvelle démonstration du **théorème de d'Alembert-Gauss** : Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant admet une racine.
- 3) **Théorème de Guido Fubini sur un pavé** : soit $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{K}$ **continue** (en tant que fonction de deux variables) alors

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(t, x) dx \right) dt = \int_c^d \left(\int_a^b f(t, x) dt \right) dx$$

4) Intégrales célèbres (suite et fin) :

- Intégrale de Carl Friedrich Gauß :

$$\int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

- Les intégrales d'Augustin Fresnel : $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

le prochain programme sera entièrement consacré aux séries entières.