PC $\overset{\star}{2}$

Colles semaine 13 : extended edition

du 20 au 23 janvier 2026

Chapitre 12 : Suites et séries de fonctions

I: Convergence simple :

1) Définition :

2) Insuffisances de la notion de convergence simple.

II: Convergence uniforme :

1) Définition :

a) On dit que *la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* I si

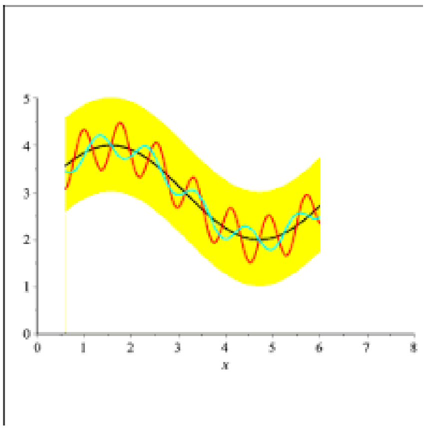
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

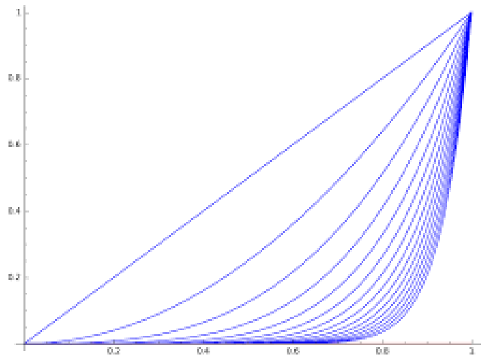
b) On comparera avec la définition de la convergence simple :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in I,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

(le N dépend ici de x).

c) Graphiquement :





2) Proposition : CVU $\Longrightarrow$ CVS .

3) Norme de la convergence uniforme.

4) Théorèmes d'approximation :

a) Théorème d'approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par une suite de fonctions en escalier sur un segment [1] :
Soit f une fonction continue par un morceaux sur un segment $[a, b]$, il existe une suite de fonctions en escalier $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

1. également appelé T.A.F.C.M.S.F.E.S.U.S.

b) ▲▼ **Théorème de Weierstraß**[2] **:**
Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

5) ► **Théorème de continuité d'une suite de fonctions qui converge uniformément**[3] :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I telle que :

(i) f_n continue sur I, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $f_n \overset{CVU}{\longrightarrow} f$

alors f est continue sur I.

Version light : le résultat est encore vrai s'il n'y a que **CVU sur tout segment de** I.

6) **Théorème de la double limite**[4] :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[a,b[$ ou $]a,b[$ avec $b \in R \cup \{+\infty\}$
On suppose que

(i) $f_n \overset{CVU}{\longrightarrow} f$ sur I

(ii) $f_n(x)$ admet une limite lorsque $x \to b$, que l'on note ℓ_n,

alors

(i) ℓ_n admet une limite lorsque $n \to +\infty$, que l'on note ℓ,

(ii) f admet ℓ comme limite en $+\infty$

$$i.e.\ \lim_{x\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$$

7) **Deux théorèmes d'interversion limite / intégrale**

a) ► **Théorème d'interversion limite / intégrale d'une suite de fonctions convergeant uniformément sur un segment**[5] **:**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a,b]$ telle que :

(i) f_n **continue** sur $[a,b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $f_n \overset{CVU}{\longrightarrow} f$

alors $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n$.

$$i.e.\ \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty}\int f_n$$

b) ▲▼ **Le théorème de convergence dominée**[6] **:**

2. également appelé Théorème de Weierstraß ou T.D.W.
3. également appelé T.C.S.F.C.V.U.
4. également appelé T.D.L.
5. également appelé T.I.L.$\int$.S.F.C.V.U.S.U.S.
6. sobrement appelé T.C.D. ou théorème de Lebesgue (pour les intimes).

Soient :

(i) (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux sur I.

(ii) φ une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur I.

On suppose que :

(i) (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant \varphi$ (hypothèse de domination).

alors :

(i) f est intégrable sur I.

(ii) $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.

$$i.e. : \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$$

8) **Dérivabilité :**

a) ▶ **Théorème de dérivabilité d'une suite de fonctions dont les dérivées convergent uniformément**[7] **:**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I telle que :

(i) f_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $f_n \overset{CVS}{\longrightarrow} f$ sur I,

(iii) $f'_n \overset{CVU}{\longrightarrow} g$ sur I,

alors

(i) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,

(ii) $f' = g$,

(iii) $f_n \overset{CVU}{\longrightarrow} f$ sur tout segment $J \subset I$.

$$i.e. \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} f'_n$$

Remarque : c'est la suite des **dérivées** $(f`_n)$ qui doit converger uniformément.

Version light : le résultat est encore vrai si dans (iii), il n'y a que **CVU sur tout segment de** I.

b) **Généralisation**[8] : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I telle que :

(i) f_n de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $f_n \overset{CVS}{\longrightarrow} f$ sur I,

(iii) $f_n^{(j)} \overset{CVS}{\longrightarrow} g_j$ sur I, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$,

(iv) $f_n^{(k)} \overset{CVU}{\longrightarrow} g_k$ sur I,

alors

7. également appelé T.D.S.F.D.C.V.U.
8. On l'appelle alors le T.D.S.F.D.C.V.U.G.

(i) f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,

(ii) $f^{(j)} = g_j$, pour tout $j \in [\![1,k]\!]$,

(iii) les CVS des hypothèses (ii) et (iii) sont en fait des CVU sur tout segment $J \subset I$.

$$i.e. \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)^{(j)} = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(j)}$$

Version light : le résultat est encore vrai s'il n'y a que **CVU de $f_n^{(k)}$ sur tout segment de** I.

citation du programme : « *Les étudiants peuvent appliquer directement le théorème concluant au caractère $\mathcal{C}^k$ de la limite sous l'hypothèse de convergence simple des $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ sur tout segment de I .* »

9) Séries de fonctions

a) Convergence simple d'une série de fonctions :

b) Convergence absolue d'une série de fonctions :

c) Convergence uniforme d'une série de fonctions :

Définition : on dit que la série de fonctions $\sum u_n$ *converge uniformément* vers S sur I, si la suite de fonctions $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ des sommes partielles converge uniformément vers S sur I.

d) Convergence normale d'une série de fonctions :

i) Définition : On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ *converge normalement* vers S sur I, si $\sum u_n$ converge simplement vers S et si la série numérique $\sum \|u_n\|_\infty^I$ est convergente.

e) ▶ **Théorème :** $CVN \Longrightarrow CVU \Longrightarrow CVS$ et les réciproques sont fausses.
(Connaître des contrexemples)

f) ▶ **Théorème :** $CVN \Longrightarrow CVA \Longrightarrow CVS$ et les réciproques sont fausses.
(Connaître des contrexemples)

g) ▶ Théorème de continuité d'une série de fonctions qui converge normalement ou uniformément :[9]

Soit (u_n) une série de fonctions continues qui converge normalement ou uniformément sur I, alors sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est également continue sur I.

Version light : le résultat est encore vrai s'il n'y a que **CVN ou CVU sur tout segment d**

h) ◆ Théorème de la double limite[10] :

9. également appelé T.C.$\sum$.F.C.V.N.ou.U.
10. lui aussi appelé T.D.L.

Soient $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur I, un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$.

On suppose que :

(i) la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement ou uniformément sur I.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \ \lim\limits_{x \to +\infty} u_n(x)$ existe et vaut b_n .

(iii) la série $\sum b_n$ converge,

alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ i.e. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x \to +\infty} u_n(x)$

Remarque : le T.D.L. n'a pas de version light.

i) ► **Théorème du squeeze**[11] **:** Pas officiellement au programme mais qui revient dans quantité d'oraux, et se démontre aisément par une comparaison série/intégrale.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ (i) positive, (ii) décroissante, (iii) intégrable sur $\mathbb{R}_+$ alors :

$$\lim_{h \to 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} h f(nh) = \int_0^{+\infty} f$$

.

Autre version : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f(\frac{k}{n}) = \int_0^{+\infty} f(t)dt$

10) ► **Théorème de dérivation terme à terme**[12] **:**

a)

Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
On suppose que :

(i) la série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge **simplement** sur I,

(ii) la série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n'$ converge **normalement ou uniformément** sur I.

alors

(i) la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,

(ii) $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n'$,

(iii) la série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ CVU sur tout segment $J \subset I$.

Attention : c'est la série des **dérivées** qui doit converger normalement ou uniformément.

b) **Version light :**[13] on peut remplacer l'hypothèse (ii) par : la série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n'$ converge **normalement** ou uniformément sur tout segment inclus dans I.

11. également appelé théorème du pincement
12. également appelé T.D.T.A.T.
13. on l'appelle alors T.D.T.A.T.V.L.

c) ► **Généralisation** [14] :

Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.
On suppose que :

(i) la série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge **simplement** sur I,

(ii) $\forall j \in [\![1, k-1]\!]$ la série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)}$ converge **simplement** sur I,

(iii) la série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$ converge **normalement ou uniformément** sur I,

alors :

(i) la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,

(ii) $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^{(j)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)} \quad \forall j \in [\![1, k-1]\!]$,

(iii) Les CVS sont des CVU sur tout segment $J \subset I$.

d) **Version light :** [15] on peut remplacer l'hypothèse (iii) par : la série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$ converge **normalement ou uniformément** sur tout segment inclus dans I.

11) Théorèmes d'intégration terme à terme

a) ► **Théorème d'intégration terme à terme sur un segment** [16] :

Soit (u_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ qui converge **normalement ou uniformément** sur $[a, b]$ alors la série numérique $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)dx$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x$$

b) ▲▼ **Théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque** [17] **(admis)** :

14. également appelé T.D.T.A.T.G.
15. on l'appelle alors T.D.T.A.T.G.V.L.
16. également appelé T.I.T.A.T.S.U.S.
17. également appelé T.I.T.A.T.S.U.I.Q.

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions. On suppose que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est continue par morceaux et intégrable sur I.

(ii) la série $\sum u_n$ converge **simplement** vers une fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ continue par morceaux sur I,

(iii) la série numérique $\sum_n \int_I |u_n|$ converge,

alors :

(i) la fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I et (ii) $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I u_n \right)$.

12) **Théorème de Fubini** [18]

Soit $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de réels ou complexes telle que

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{n,p}|$ converge, on note $b_n = \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{n,p}|$,

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge

alors

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p}}$$

Chapitre 13 : Intégrales à paramètre

Dans tout le chapitre, les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Les démonstrations ne sont pas exigibles (mais il est bon de retenir la méthode de caractérisation séquentielle de la limite couplée avec le théorème de convergence dominée), en revanche les énoncés (en particulier les hypothèses) doivent être parfaitement sus.

I: Théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre [19] :

18. également appelé T.D.F.
19. également appelé T.C.$\int$.A.P.

Soit $f : J \times I \to \mathbb{K}$ telle que

(i) $\forall t \in I$, (i.e. à t fixé), la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur J.

(ii) $\forall x \in J$, (i.e. à x fixé), la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.

(iii) $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :
$\forall (x,t) \in J \times I$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$. (hypothèse de domination)

alors la fonction $F : \left\{ \begin{array}{lcl} J & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est continue sur J.

Remarques :

1) ▶ **Version light** [20] : on peut remplacer (iii) par
$(iii)'$: $\forall [a,b]$ segment inclus dans J, $\exists \varphi_{a,b} \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{R})$ intégrable sur I telle que :
$\forall (x,t) \in [a,b] \times I$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi_{a,b}(t)$. *Remarque : $\varphi_{a,b}$ dépend alors du segment $[a,b]$.*

2) Si I est un segment $[c,d]$, et si f est une fonction continue (en tant que fonction de deux variables), alors pour tout segment $[a,b]$ inclus dans J, f est continue sur le compact $[a,b]\times[c,d]$ donc est bornée, et par conséquent, l'hypothèse de domination est automatiquement vérifiée car une fonction constante est trivialement intégrable sur un segment.

II: ▲▼ Théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre [21] :

Soit $f : J \times I \to \mathbb{K}$ telle que

(i) $\forall t \in I$, (i.e. à t fixé), la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.

(ii) $\forall x \in J$, (i.e. à x fixé), la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.

(iii) $\forall x \in J$, (i.e. à x fixé), la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.

(iv) $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :
$\forall (x,t) \in J \times I$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$. (hypothèse de domination)

alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et $F'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$
(Formule de Leibniz).

Remarques :

1) ▶ **Version light** [22] : on peut remplacer (iv) par
$(iv)'$: $\forall [a,b]$ segment inclus dans J, $\exists \varphi_{a,b} \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{R})$ intégrable sur I telle que :
$\forall (x,t) \in [a,b] \times I$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{a,b}(t)$ *Remarque : $\varphi_{a,b}$ dépend alors de $[a,b]$* .

2) Si I est un segment $[c,d]$, et si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est une fonction continue, alors pour tout segment $[a,b]$ inclus dans J, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur le compact $[a,b]\times[c,d]$ donc est bornée, et par conséquent, l'hypothèse de domination est automatiquement vérifiée.

---

20. on l'appelle alors T.C.$\int$.A.P.V.L.
21. également appelé T.D.$\int$.A.P.
22. on l'appelle alors T.D.$\int$.A.P.V.L.

III: Généralisation[23] :

Soit $f : J \times I \to \mathbb{K}$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$ tels que

(i) $\forall t \in I$, (i.e. à t fixé), la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J.

(ii) $\forall x \in J$ (i.e. à x fixé), $\forall j \in [\![1,k]\!]$, les k fonctions $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ ainsi que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ sont continues par morceaux et intégrables sur I.

(iii) $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :
$\forall (x,t) \in J \times I$, $|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)| \leqslant \varphi(t)$. (hypothèse de domination)

alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et
$\forall j \in [\![1,k]\!]$, $F^{(j)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

► **Version light :** on peut remplacer (iii) par
$(iii)'$: $\forall [a,b]$ segment inclus dans J, $\exists \varphi_{a,b} \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{R})$ intégrable sur I telle que :
$\forall (x,t) \in [a,b] \times I$, $|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)| \leqslant \varphi_{a,b}(t)$ *Remarque : $\varphi_{a,b}$ dépend alors de $[a,b]$.*

IV: ► Le T.C.D. à paramètre continu :[24]

Soient J et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit a une borne de J, soit f définie sur $J \times I$ telle que :

(i) pour tout $t \in I$, $f(x,t) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell(t)$,

(ii) pour tout $x \in J$, les fonctions $t \longmapsto f(x,t)$ et $t \longmapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I,

(iii) **hypothèse de domination :** il existe une fonction φ intégrable sur I telle que pour tout $(x,t) \in J \times I$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.

alors ℓ est intégrable sur I et :

$$\int_I f(x,t)\mathrm{d}t \underset{x \to a}{\longrightarrow} \int_I \ell(t)\mathrm{d}t$$

prochain programme : même programme

23. appelé T.D.$\int$.A.P.G.
24. également appelé T.C.D.A.P.C.