PC $\overset{\star}{2}$

Colles semaine 12

du 13 au 16 janvier 2026

Chapitre 11 : Intégrales généralisées

I: Généralités :

1) Intégrales généralisées : définition.

2) Faux problème de convergence.

II: Fonctions à valeurs réelles positives :

1) Proposition : soit f continue par morceaux sur $[a,b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, à valeurs **réelles positives** ,

$$\boxed{\int_a^b f \text{ est convergente} \Longleftrightarrow F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ est bornée}}.$$

2) Théorèmes de comparaison : soient f, g continues par morceaux sur $[a,b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, à valeurs **réelles positives**,

a) Si $\forall x \in [a,b[\,, f(x) \leqslant g(x)$ alors

(i) $\displaystyle\int_a^b f$ diverge $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b g$ diverge et (ii) $\displaystyle\int_a^b g$ converge $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f$ converge.

b) Si $f = O(g)$ au voisinage de b alors

(i) $\displaystyle\int_a^b f$ diverge $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b g$ diverge et (ii) $\displaystyle\int_a^b g$ converge $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f$ converge.

c) Corollaire : si $f \sim g$ au voisinage de b alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_a^b g$ converge.

3) Proposition : Intégrales de Riemann :

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge $\Longleftrightarrow \alpha > 1$,

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge $\Longleftrightarrow \alpha < 1$,

c) $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ converge $\Longleftrightarrow \alpha < 1$,

d) $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ converge $\Longleftrightarrow \alpha < 1$.

4) ▶ **Test de Riemann** :

a) En $+\infty$: Soit f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, **à valeurs positives**.

i) S'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k}{t^\alpha}$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.

ii) S'il existe $\alpha > 1$ tel que $f(t) = O(\frac{1}{t^\alpha})$ au voisinage de $+\infty$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente.

iii) S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $\frac{1}{t^\alpha} = O(f(t))$ au voisinage de $+\infty$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est divergente.

b) <u>En 0</u> : Soit f continue par morceaux sur $]0,1]$, **à valeurs positives**.

i) S'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) \underset{0}{\sim} \frac{k}{t^\alpha}$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente $\Longleftrightarrow \alpha < 1$.

ii) S'il existe $\alpha < 1$ tel que $f(t) = O(\frac{1}{t^\alpha})$ au voisinage de 0 alors $\displaystyle\int_0^1 f$ est convergente.

iii) S'il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{t^\alpha} = O(f(t))$ au voisinage de 0 alors $\displaystyle\int_0^1 f$ est divergente.

c) <u>En b</u> : Soit f continue par morceaux sur $[a,b[$, **à valeurs positives**.

i) S'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) \underset{b}{\sim} \frac{k}{(b-t)^\alpha}$ alors $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente $\Longleftrightarrow \alpha < 1$.

ii) S'il existe $\alpha < 1$ tel que $f(t) = O(\frac{1}{(b-t)^\alpha})$ au voisinage de b alors $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente.

iii) S'il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{(b-t)^\alpha} = O(f(t))$ au voisinage de b alors $\displaystyle\int_a^b f$ est divergente.

III: Fonctions à valeurs réelles ou complexes :

1) **Définition :** Intégrales absolument convergentes. Fonctions intégrables
2) **Proposition :** si l'intégrale est absolument convergente alors elle est convergente.
3) **Remarque :** la réciproque est fausse.
   ▶ Exemple classique : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ (intégrale de Dirichlet).
4) **Définition :** une intégrale convergente qui n'est pas absolument convergente est dite *semi-convergente*. On notera que si l'intégrale est semi-convergente, la fonction **n'est pas** intégrable.

IV: Propriétés :

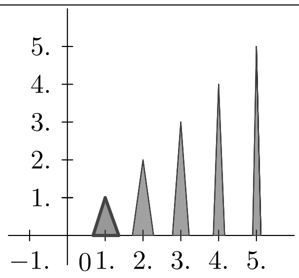
1) Si f est continue et intégrable sur $[a,b[$ et si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt = 0$ alors f est nulle sur $[a,b[$.
2) **Intégration par parties :** Proposition : soient f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telles que fg admette une limite finie en b alors
   a) $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ sont de même nature.
   b) et si elles convergent, alors $\displaystyle\int_a^b f'g = \lim_{x\to b} [fg]_a^x - \int_a^b fg'$.
3) **Fonction Γ d'Euler :**
   a) Définition : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   b) Propriété : $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$.
   c) Corollaire : $\Gamma(n+1) = n!$
4) **Changement de variable :**
   Proposition : Soient a et $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, b et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, soit f continue sur $]a,b[$ et soit φ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]\alpha,\beta[\longrightarrow]a,b[$, strictement croissante alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$

et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et si elles sont convergentes, alors elles sont égales.
Remarque : ce résultat reste valable si φ est strictement décroissante.

5) **Proposition :** si f est intégrable sur $[a,+\infty[$ et **si** f admet une limite (éventuellement infinie) en $+\infty$ alors cette limite est nulle.

6) ► **Remarque :** f intégrable sur $[a,+\infty[$ **n'implique pas** que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

► connaître le contrexemple suivant :



V: Comparaison série-intégrale :

1) ► Proposition : soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ (i) continue, (ii) positive, (iii) décroissante, alors

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0} f(n) \text{ est une série convergente} \iff \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge}}.$$

2) ► **Exemples d'utilisation de séries alternées :** exemple : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est :

- **a)** absolument convergente si $1 < \alpha < 2$.
- **b)** semi-convergente si $0 < \alpha \leqslant 1$.
- **c)** divergente si $\alpha \leqslant 0$ ou $\alpha \geqslant 2$.

VI: Espaces vectoriels :

1) **Proposition :** l'ensemble des fonctions continues intégrables sur I est un espace vectoriel, noté $L^1(I,\mathbb{K})$.

2) ► **Proposition :** l'ensemble des fonctions continues de carré intégrable est un espace vectoriel, noté $L^2(I,\mathbb{K})$.

3) **Proposition :** si f et g sont de carré intégrable alors fg est intégrable sur I.

4) Inégalité de Cauchy-Schwarz : si f et g sont de carré intégrable
alors $\displaystyle|\int_I f(t)g(t)dt| \leqslant \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt}\sqrt{\int_I |g(t)|^2 dt}$.
Si de plus, f et g sont continues, il y a égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles.

5) Norme N_1 : ou norme de la convergence en moyenne. Proposition : l'ensemble des fonctions continues intégrables sur I est un espace vectoriel normé, avec $N_1(f) = \int_I |f|$.

6) Norme N_2 : ou norme de la convergence en moyenne quadratique.

- **a)** ► Proposition : l'ensemble des fonctions continues de carré intégrable est un espace préhilbertien réel en définissant le produit scalaire : $(f,g) \mapsto \int_I fg$.
- **b)** Définition : N_2 est la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

7) Proposition : $|\,(f|g)\,| \leqslant N_1(fg) \leqslant N_2(f)N_2(g)$.

VII: Compléments de cours

1) Intégration des relations de comparaison :

▶ **Proposition :** soient f, g continues par morceaux sur $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, avec f à valeurs réelles et g à valeurs **réelles positives**. (on remarquera l'analogie avec les séries numériques).

a) On suppose que $\displaystyle\int_a^b g$ est convergente.

i) si $f \underset{b}{=} o(g)$ alors $\displaystyle\int_x^b f \underset{b}{=} o(\int_x^b g)$,

ii) si $f \underset{b}{=} O(g)$ alors $\displaystyle\int_x^b f \underset{b}{=} O(\int_x^b g)$,

iii) si $f \underset{b}{\sim} g$ alors $\displaystyle\int_x^b f \underset{b}{\sim} \int_x^b g$,

b) On suppose que $\displaystyle\int_a^b g$ est divergente.

i) si $f \underset{b}{=} o(g)$ alors $\displaystyle\int_a^x f \underset{b}{=} o(\int_a^x g)$,

ii) si $f \underset{b}{=} O(g)$ alors $\displaystyle\int_a^x f \underset{b}{=} O(\int_a^x g)$,

iii) si $f \underset{b}{\sim} g$ alors $\displaystyle\int_a^x f \underset{b}{\sim} \int_a^x g$,

VIII: Quelques intégrales célèbres :

1) Intégrales de Riemann.

2) Intégrales de Bertrand :

a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ CV $\Longleftrightarrow \alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha (|\ln t|)^\beta}$ CV $\Longleftrightarrow \alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

3) Intégrale d'Euler : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

4) Intégrale de Dirichlet : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

5) Intégrale de Poisson : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2a\cos t + a^2)\,\mathrm{d}t = 4\pi \ln(\max(|a|, 1))$ pour $|a| \neq 1$.

6) Intégrales de Frullani : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(bt) - f(at)}{t}\,\mathrm{d}t$ où $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une application continue admettant une limite L en ∞ et une limite ℓ en 0 et a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

---

prochain programme : suites et séries de fonctions

Prove that you are not a robot

Select all squares with

Convergent improper integrals

$\int\limits_0^2 \frac{\sqrt{\sin x}\,dx}{x^2(x+4)}$	$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$	$\int\limits_3^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{x^2-1}$
$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$	$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{e^2(x+1)}$	$\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{3\ln x}$
$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx$	$\int\limits_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}\,dx}{x^{3/2}}$	$\int\limits_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{arctg x\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}$