

du 14 au 17 janvier 2025

Rappel : Le programme de colle en semaine 12 est constitué du programme de la semaine 11 et d'icelui.

CHAPITRE 12 : SUITES ET SÉRIES DE FONCTION

I: Convergence simple :

- 1) Définition :
- 2) Insuffisances de la notion de convergence simple.

II: Convergence uniforme :

- 1) Définition :
 - a) On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I si

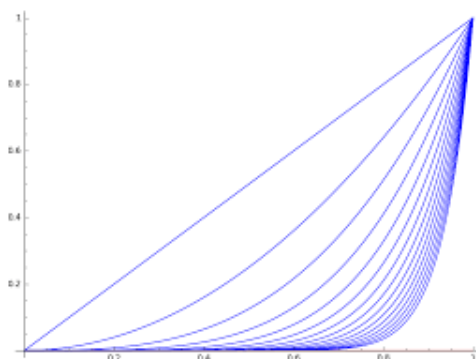
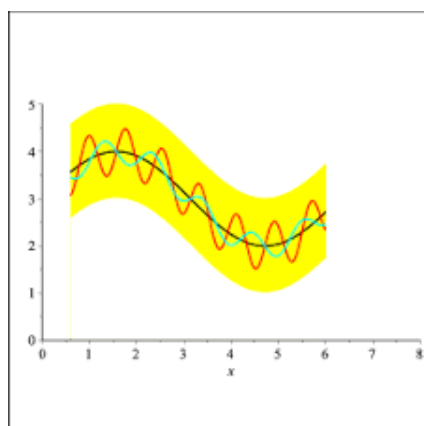
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

- b) On comparera avec la définition de la convergence simple :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

(le N dépend ici de x).

- c) Graphiquement :



- 2) Proposition : $CVU \implies CVS$.
- 3) Norme de la convergence uniforme.
Théorème :

$$f_n \xrightarrow{CVU} f \iff (f_n - f)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée à partir d'un certain rang } N \text{ et } (\|f_n - f\|_\infty)_{n \geq N} \rightarrow 0$$

- 4) Propriétés :

- a) Si $f_n \xrightarrow{CVU} f$ et $g_n \xrightarrow{CVU} g$ sur I alors $\lambda f_n + \mu g_n \xrightarrow{CVU} \lambda f + \mu g$ sur I .

- b) Si $f_n \xrightarrow{CVU} f$ et $g_n \xrightarrow{CVU} g$ alors on n'a pas forcément CVU de $f_n g_n$ vers fg .
- c) Si $f_n \xrightarrow{CVU} f$ et $g_n \xrightarrow{CVU} g$ et si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq M$ et $\exists M' \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |g_n(x)| \leq M'$ (majoration uniforme) alors $f_n g_n \xrightarrow{CVU} fg$.

III: ► Théorème de continuité d'une suite de fonctions qui converge uniformément¹ :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I telle que :

(i) f_n continue sur I , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $f_n \xrightarrow{CVU} f$

alors f est continue sur I .

Version light : le résultat est encore vrai s'il n'y a que **CVU sur tout segment de I** .

IV: Théorème de la double limite² :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, b[$ ou $]a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

On suppose que

(i) $f_n \xrightarrow{CVU} f$ sur I

(ii) $f_n(x)$ admet une limite lorsque $x \rightarrow b$, que l'on note ℓ_n ,

(iii) ℓ_n admet une limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, que l'on note ℓ ,

alors f admet ℓ comme limite en $+\infty$

$$i.e. \lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

V: Deux théorèmes d'interversion limite / intégrale

1) ► Théorème d'interversion limite / intégrale d'une suite de fonctions convergeant uniformément sur un segment³ :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a, b]$ telle que :

(i) f_n **continue** sur $[a, b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $f_n \xrightarrow{CVU} f$

$$\text{alors } \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n.$$

$$i.e. \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n$$

Remarque : ce résultat ne vaut plus sur un intervalle I qui ne serait pas un segment même s'il y a CVU.

2) ◆ Le théorème de convergence dominée⁴ :

1. également appelé T.C.S.F.C.V.U.

2. également appelé T.D.L.

3. également appelé T.I.L.f.S.F.C.V.U.S.U.S.

4. sobrement appelé T.C.D. ou théorème de Lebesgue (pour les intimes).

Soient :

- (i) (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux sur I .
- (ii) φ une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur I .

On suppose que :

- (i) (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I .
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi$ (hypothèse de domination).

alors :

- (i) f est intégrable sur I .

$$(ii) \int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n.$$

$$i.e. : \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n$$

VI: Dérivabilité :

1) ► Théorème de dérivabilité d'une suite de fonctions dont les dérivées convergent uniformément⁵ :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I telle que :

- (i) f_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) $f_n \xrightarrow{CVS} f$ sur I ,
- (iii) $f'_n \xrightarrow{CVU} g$ sur I ,

alors

- (i) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- (ii) $f' = g$,
- (iii) $f_n \xrightarrow{CVU} f$ sur tout segment $J \subset I$.

$$i.e. \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n$$

Remarque : c'est la suite des **dérivées** (f'_n) qui doit converger uniformément.

Version light : le résultat est encore vrai si dans (iii), il n'y a que **CVU** sur tout segment de I .

2) Généralisation⁶ : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I telle que :

- (i) f_n de classe $\mathcal{C}^k$ sur I , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) $f_n \xrightarrow{CVS} f$ sur I ,
- (iii) $f_n^{(j)} \xrightarrow{CVS} g_j$ sur I , pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$,
- (iv) $f_n^{(k)} \xrightarrow{CVU} g_k$ sur I ,

alors

5. également appelé T.D.S.F.D.C.V.U.

6. On l'appelle alors le T.D.S.F.D.C.V.U.G.

- (i) f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ,
- (ii) $f^{(j)} = g_j$, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$,
- (iii) les CVS des hypothèses (ii) et (iii) sont en fait des CVU sur tout segment $J \subset I$.

$$i.e. \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)^{(j)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(j)}$$

Version light : le résultat est encore vrai s'il n'y a que **CVU de $f_n^{(k)}$ sur tout segment de I .**

citation du programme : « Les étudiants peuvent appliquer directement le théorème concluant au caractère $\mathcal{C}^k$ de la limite sous l'hypothèse de convergence simple des $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leq j \leq k-1$ et de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ sur tout segment de I . »

VII: Séries de fonctions

1) Convergence simple d'une série de fonctions :

2) Convergence absolue d'une série de fonctions :

Définition : On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge absolument sur I si $\forall x \in I$, la série numérique $\sum u_n(x)$ converge absolument.

3) Convergence uniforme d'une série de fonctions :

Définition : on dit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément vers S sur I , si la suite de fonctions $S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$ des sommes partielles converge uniformément vers S sur I .

4) Convergence normale d'une série de fonctions :

a) **Notation :** Si une fonction f est bornée sur I , on note $\|f\|_\infty^I = \sup_{x \in I} |f(x)|$.

b) **Définition :** On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement vers S sur I , si $\sum u_n$ converge simplement vers S et si la série numérique $\sum \|u_n\|_\infty^I$ est convergente.

c) **Proposition :** la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur I s'il existe une suite (a_n) de réels positifs telle que $\sum a_n$ converge et telle que $\forall x \in I, |u_n(x)| \leq a_n$.

5) ► **Théorème :** $CVN \implies CVU \implies CVS$ et les réciproques sont fausses.
(Connaître des contreexemples)

6) ► **Théorème :** $CVN \implies CVA \implies CVS$ et les réciproques sont fausses.
(Connaître des contreexemples)

7) Propositions :

a) En revanche CVU n'implique pas CVA et CVA n'implique pas CVU .

b) $\sum u_n \xrightarrow{CVU} S \iff R_n \xrightarrow{CVU} 0$ où $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.

c) $\sum u_n \xrightarrow{CVU} S \implies u_n \xrightarrow{CVU} 0$ mais la réciproque est fausse.

8) ► **Théorème de continuité d'une série de fonctions qui converge normalement ou uniformément :**⁷

Soit (u_n) une série de fonctions continues qui converge normalement ou uniformément sur I , alors sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est également continue sur I .

Version light : le résultat est encore vrai s'il n'y a que **CVN ou CVU sur tout segment de I .**

9) ♦ **Théorème de la double limite**⁸ :

7. également appelé T.C.∑.F.C.V.N.ou.U.

8. lui aussi appelé T.D.L.

Soient $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur I , un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$.

On suppose que :

(i) la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement ou uniformément sur I .

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x)$ existe et vaut b_n .

(iii) la série $\sum b_n$ converge,

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ i.e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x)$

Remarque : le T.D.L. n'a pas de version light.

10) ► **Théorème du squeeze**⁹ : Pas officiellement au programme mais qui revient dans quantité d'oraux, et se démontre aisément par une comparaison série/intégrale.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ (i) positive, (ii) décroissante, (iii) intégrable sur $\mathbb{R}_+$ alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} h f(nh) = \int_0^{+\infty} f$$

Autre version : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$

VIII: ► **Théorème de dérivation terme à terme**¹⁰ :

Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

On suppose que :

(i) la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge **simplement** sur I ,

(ii) la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ converge **normalement ou uniformément** sur I .

1) alors

(i) la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,

(ii) $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$,

(iii) la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ CVU sur tout segment $J \subset I$.

Attention : c'est la série des **dérivées** qui doit converger normalement ou uniformément.

2) **Version light** :¹¹ on peut remplacer l'hypothèse (ii) par : la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ converge **normalement** ou uniformément sur tout segment inclus dans I .

9. également appelé théorème du pincement

10. également appelé T.D.T.A.T.

11. on l'appelle alors T.D.T.A.T.V.L.

3) ► Généralisation¹² :

Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .

On suppose que :

- (i) la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge **simplement** sur I ,
- (ii) $\forall j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)}$ converge **simplement** sur I ,
- (iii) la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$ converge **normalement ou uniformément** sur I ,

alors :

- (i) la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ,
- (ii) $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)} \quad \forall j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$,
- (iii) Les CVS sont des CVU sur tout segment $J \subset I$.

- 4) **Version light** :¹³ on peut remplacer l'hypothèse (iii) par : la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$ converge **normalement ou uniformément** sur tout segment inclus dans I .

5) Application :

- a) la fonction ζ de Riemann $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

IX: Théorèmes d'intégration terme à terme

1) ► Théorème d'intégration terme à terme sur un segment¹⁴ :

Soit (u_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ qui converge **normalement ou uniformément** sur $[a, b]$ alors la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x) dx$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) dx$$

2) ◆ Théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque¹⁵ (admis) :

12. également appelé T.D.T.A.T.G.

13. on l'appelle alors T.D.T.A.T.G.V.L.

14. également appelé T.I.T.A.T.S.U.S.

15. également appelé T.I.T.A.T.S.U.I.Q.

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions. On suppose que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est continue par morceaux et intégrable sur I .

(ii) la série $\sum u_n$ converge **simplement** vers une fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ continue par morceaux sur I ,

(iii) la série numérique $\sum_n \int_I |u_n|$ converge,

alors :

(i) la fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I et (ii) $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I u_n \right)$.

X: Théorème de Fubini¹⁶

Soit $(a_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double de réels ou complexes telle que

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{p=0}^{+\infty} |a_{n,p}|$ converge, on note $b_n = \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{n,p}|$,

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge

alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p}$$

le prochain programme sera intégral et à paramètres .

16. également appelé T.D.F.