PC $\overset{\star}{2}$

Colles semaine 11

du 7 au 10 janvier 2025

Rappel : Le programme de colle en semaine 11 est constitué du programme de la semaine 10 et d'icelui.

Chapitre 10 : Espaces vectoriels normés : suite

VII: Continuité

1) **Définitions :** limite et continuité.
2) Propriétés.
3) **Définition :** soit $f : A \subset E \longrightarrow F$, avec F de dimension finie. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de F. Soit $x \in E$, on décompose $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}$: $f(x) = f_1(x)e_1 + ... + f_p(x)e_p$.
   $(f_1, ..., f_p)$ sont appelées les fonctions coordonnées de f.
4) ▶ **Proposition :** Une fonction est continue si et seulement si ses fonctions coordonnées sont continues.

VIII: Applications linéaires, bilinéaires

1) **Théorème :** ▶ Soient E et F deux evn et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
   On a équivalence entre
   a) u continue.
   b) u continue en 0.
   c) u bornée sur la sphère unité.
   d) u bornée sur la boule fermée unité.
   e) u lipschitzienne.
2) ▶ Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, si E est de dimension finie alors u est continue.
3) ▶ **Proposition :** Soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire avec E et F des evn de **dimension finie**,
   a) $\exists k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (x, y) \in E \times F$, $\|B(x, y)\| \leqslant k \|x\| \|y\|$,
   b) **Corollaire :** B est continue.
4) Ceci se généralise sans peine aux applications p-linéaires.

IX: Images directes, Images réciproques par une fonction continue :

1) ▶ **Théorème :** soit $f : E \longrightarrow F$ continue, alors l'image réciproque par f d'un ouvert (respectivement d'un fermé) de F est un ouvert (respectivement un fermé) de E.
2) ▲▼ **Théorème :** (admis) : l'image d'un compact par une fonction continue est un compact.
3) ▶ **Corollaires :** Soit E un evn de dimension finie.
   a) Soit $f : A \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, si A est un compact, alors $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$, f est donc bornée et atteint ses bornes.

b) Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$ continue, si A est un compact, alors $||f(A)||$ est un compact de $\mathbb{R}$, $||f||$ (et donc f également) est bornée et $||f||$ atteint ses bornes.

4) a) ▶ **Proposition :** Soit E un evn de dimension finie et soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{||x||\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors f admet un minimum sur E.

b) **Application :**
le théorème de d'Alembert-Gauss :
$\mathbb{C}$ est algébriquement clos $\Longleftrightarrow$ tout polynôme P est scindé sur $\mathbb{C}$
$\Longleftrightarrow$ tout polynôme de degré $\geqslant 1$ admet une racine dans $\mathbb{C}$.

X: Dérivation d'une fonction à valeurs dans un evn de dimension finie

1) **Proposition :** une fonction est dérivable si et seulement si ses fonctions coordonnées le sont et $f' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i' e_i$.

2) **Corollaire :** si $f : I \mapsto \mathbb{C}$ alors $f' = \mathrm{Re}(f)' + i\,\mathrm{Im}(f)'$, $\qquad \bar{f}' = \bar{f'}$.

3) **Proposition :** Soit u une application linéaire et soit f dérivable alors $(u \circ f)' = u \circ f'$.

4) ▶ **Proposition :** soit B une application bilinéaire, et soient f, g dérivables alors $B(f, g)$ est dérivable et $B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$.

5) Généralisation à une application p-linéaire comme le déterminant par exemple.

XI: Intégration d'une fonction à valeurs dans un e.v.n.

1) **Définition :** soit $f : [a, b] \mapsto F$, continue par morceaux, soit $\mathcal{B}$ une base de F alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t \right) e_i$$

2) **Corollaire :** $\mathrm{Re}(\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t$, $\quad \mathrm{Im}(\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t$.

3) **Proposition :** Si u est linéaire , $\displaystyle\int_a^b u \circ f(t)\,\mathrm{d}t = u \circ \left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right)$.

4) ▶ **Théorème :** Soient a, b réels tels que $a \leqslant b$ et soit f continue par morceaux de $[a, b]$ dans F alors

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,dt$$

5) **Inégalité des accroissements finis** Soit $f : [a, b] \to F$, continue sur $[a, b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ et telle que f' soit bornée sur $]a, b[$, alors

$$\|f(a) - f(b)\| \leqslant |b - a| \sup_{]a,b[} \|f'\|$$

6) **Corollaire :** soit $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$, f est lipschitzienne $\Longleftrightarrow$ f' bornée sur I.

7) **Remarque :** le théorème des accroissements finis, (ainsi que le théorème de Rolle), l'égalité de Taylor-Lagrange ne s'appliquent pas si $F \neq \mathbb{R}$.

XII: Compléments de cours

1) **Norme subordonnée**

a) Définition : norme subordonnée : soit E un e.v.n. muni d'une norme $||.||$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit $|||u||| = \sup\limits_{x \in E \setminus \{0_E\}} \dfrac{||u(x)||}{||x||}$.

b) Proposition : c'est une norme sur $\mathcal{L}(E)$, appelée norme subordonnée ou norme triple. (remarque : on dit qu'elle est subordonnée car elle dépend de la norme $||.||$ choisie).

c) Proposition : $\forall x \in E$, $||u(x)|| \leqslant |||u||| \times ||x||$.

d) Proposition : $|||u \circ v||| \leqslant |||u||| \times |||v|||$.

e) Proposition : Si E est un espace vectoriel euclidien muni de la norme euclidienne, soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée et soit $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}\, u$, alors $|||u||| = \sqrt{\max\ \text{Sp}({}^tA\, A)}$

Chapitre 11 : Intégrales généralisées

I: Généralités :

1) Intégrales généralisées : définition.
2) Faux problème de convergence.

II: Fonctions à valeurs réelles positives :

1) **Proposition :** soit f continue par morceaux sur $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, à valeurs **réelles positives** ,

$$\boxed{\int_a^b f \text{ est convergente} \iff F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ est bornée}}.$$

2) **Théorèmes de comparaison :** soient f, g continues par morceaux sur $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, à valeurs **réelles positives**,

   a) Si $\forall x \in [a, b[\,, f(x) \leqslant g(x)$ alors
   (i) $\displaystyle\int_a^b f$ diverge $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b g$ diverge et (ii) $\displaystyle\int_a^b g$ converge $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f$ converge.

   b) Si $f = O(g)$ au voisinage de b alors
   (i) $\displaystyle\int_a^b f$ diverge $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b g$ diverge et (ii) $\displaystyle\int_a^b g$ converge $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f$ converge.

   c) Corollaire : si $f \sim g$ au voisinage de b alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge $\iff \displaystyle\int_a^b g$ converge.

3) **Proposition : Intégrales de Riemann** :

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$,

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha < 1$,

c) $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ converge $\iff \alpha < 1$,

d) $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ converge $\iff \alpha < 1$.

4) ▶ **Test de Riemann** :

a) <u>En $+\infty$</u> : Soit f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, **à valeurs positives**.

i) S'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k}{t^\alpha}$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente $\iff \alpha > 1$.

ii) S'il existe $\alpha > 1$ tel que $f(t) = O(\dfrac{1}{t^\alpha})$ au voisinage de $+\infty$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente.

iii) S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $\dfrac{1}{t^\alpha} = O(f(t))$ au voisinage de $+\infty$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est divergente.

b) <u>En 0</u> : Soit f continue par morceaux sur $]0,1]$, **à valeurs positives**.

i) S'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{k}{t^\alpha}$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente $\iff \alpha < 1$.

ii) S'il existe $\alpha < 1$ tel que $f(t) = O(\dfrac{1}{t^\alpha})$ au voisinage de 0 alors $\displaystyle\int_0^1 f$ est convergente.

iii) S'il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que $\dfrac{1}{t^\alpha} = O(f(t))$ au voisinage de 0 alors $\displaystyle\int_0^1 f$ est divergente.

c) <u>En b</u> : Soit f continue par morceaux sur $[a,b[$, **à valeurs positives**.

i) S'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) \underset{b}{\sim} \dfrac{k}{(b-t)^\alpha}$ alors $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente $\iff \alpha < 1$.

ii) S'il existe $\alpha < 1$ tel que $f(t) = O(\dfrac{1}{(b-t)^\alpha})$ au voisinage de b alors $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente.

iii) S'il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que $\dfrac{1}{(b-t)^\alpha} = O(f(t))$ au voisinage de b alors $\displaystyle\int_a^b f$ est divergente.

III: Fonctions à valeurs réelles ou complexes :

1) **Définition :** Intégrales absolument convergentes. Fonctions intégrables

2) **Proposition :** si l'intégrale est absolument convergente alors elle est convergente.

3) **Remarque :** la réciproque est fausse.

▶ Exemple classique : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ (intégrale de Dirichlet).

4) **Définition :** une intégrale convergente qui n'est pas absolument convergente est dite *semi-convergente*. On notera que si l'intégrale est semi-convergente, la fonction **n'est pas** intégrable.

IV: Propriétés :

1) Si f est continue et intégrable sur $[a,b[$ et si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt = 0$ alors f est nulle sur $[a,b[$.

2) **Intégration par parties :** Proposition : soient f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telles que fg admette une limite finie en b alors

a) $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ sont de même nature.

b) et si elles convergent, alors $\displaystyle\int_a^b f'g = \lim_{x\to b} [fg]_a^x - \int_a^b fg'$.

3) **Fonction Γ d'Euler :**

a) **Définition :** $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

b) **Propriété :** $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$.

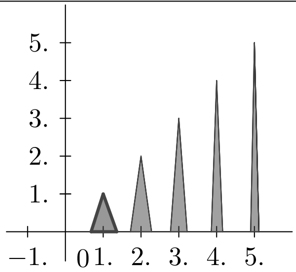
c) **Corollaire :** $\Gamma(n+1) = n!$

4) **Changement de variable :**
Proposition : Soient a et $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, b et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, soit f continue sur $]a, b[$ et soit φ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]\alpha, \beta[\longrightarrow]a, b[$, strictement croissante alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et si elles sont convergentes, alors elles sont égales.
Remarque : ce résultat reste valable si φ est strictement décroissante.

5) **Proposition :** si f est intégrable sur $[a, +\infty[$ et **si** f admet une limite (éventuellement infinie) en $+\infty$ alors cette limite est nulle.

6) ▶ **Remarque :** f intégrable sur $[a, +\infty[$ **n'implique pas** que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

▶ connaître le contrexemple suivant :



V: Comparaison série-intégrale :

1) ▶ Proposition : soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ (i) continue, (ii) positive, (iii) décroissante, alors $\boxed{\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} f(n) \text{ est une série convergente} \iff \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge}}$.

2) ▶ **Exemples d'utilisation de séries alternées :** exemple : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est :

   a) absolument convergente si $1 < \alpha < 2$.
   b) semi-convergente si $0 < \alpha \leqslant 1$.
   c) divergente si $\alpha \leqslant 0$ ou $\alpha \geqslant 2$.

VI: Espaces vectoriels :

1) **Proposition :** l'ensemble des fonctions continues intégrables sur I est un espace vectoriel, noté $L^1(I, \mathbb{K})$.

2) ▶ **Proposition :** l'ensemble des fonctions continues de carré intégrable est un espace vectoriel, noté $L^2(I, \mathbb{K})$.

3) **Proposition :** si f et g sont de carré intégrable alors fg est intégrable sur I.

4) Inégalité de Cauchy-Schwarz : si f et g sont de carré intégrable
alors $\displaystyle |\int_I f(t)g(t)dt| \leqslant \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt}\sqrt{\int_I |g(t)|^2 dt}$.
Si de plus, f et g sont continues, il y a égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles.

5) Norme N_1 : ou norme de la convergence en moyenne. Proposition : l'ensemble des fonctions continues intégrables sur I est un espace vectoriel normé, avec $N_1(f) = \int_I |f|$.

6) Norme N_2 : ou norme de la convergence en moyenne quadratique.

   a) ▶ Proposition : l'ensemble des fonctions continues de carré intégrable est un espace préhilbertien réel en définissant le produit scalaire : $(f, g) \mapsto \int_I fg$.
   b) Proposition : si f et g sont de carré intégrable alors fg est intégrable sur I.
   c) Définition : N_2 est la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

d) On peut définir de la même façon l'ensemble des fonctions continues à valeurs complexes de module au carré intégrable, et lui donner une structure d'espace préhilbertien complexe avec le produit scalaire : $(f,g) \mapsto \int_I \bar{f} g$.

7) Proposition : $|(f|g)| \leqslant N_1(fg) \leqslant N_2(f)N_2(g)$.

VII: Compléments de cours

1) Intégration des relations de comparaison :

▶ **Proposition :** soient f, g continues par morceaux sur $[a,b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, avec f à valeurs réelles et g à valeurs **réelles positives**. (on remarquera l'analogie avec les séries numériques).

a) On suppose que $\displaystyle\int_a^b g$ est convergente.

i) si $f \underset{b}{=} o(g)$ alors $\displaystyle\int_x^b f \underset{b}{=} o(\int_x^b g)$,

ii) si $f \underset{b}{=} O(g)$ alors $\displaystyle\int_x^b f \underset{b}{=} O(\int_x^b g)$,

iii) si $f \underset{b}{\sim} g$ alors $\displaystyle\int_x^b f \underset{b}{\sim} \int_x^b g$,

b) On suppose que $\displaystyle\int_a^b g$ est divergente.

i) si $f \underset{b}{=} o(g)$ alors $\displaystyle\int_a^x f \underset{b}{=} o(\int_a^x g)$,

ii) si $f \underset{b}{=} O(g)$ alors $\displaystyle\int_a^x f \underset{b}{=} O(\int_a^x g)$,

iii) si $f \underset{b}{\sim} g$ alors $\displaystyle\int_a^x f \underset{b}{\sim} \int_a^x g$,

VIII: Quelques intégrales célèbres :

1) Intégrales de Riemann.

2) Intégrales de Bertrand :

a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ CV $\iff \alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha (|\ln t|)^\beta}$ CV $\iff \alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

3) Intégrale d'Euler : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

4) Intégrale de Dirichlet : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

5) Intégrale de Poisson : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2a\cos t + a^2)\,\mathrm{d}t = 4\pi \ln(\max(|a|, 1))$ pour $|a| \neq 1$.

6) Intégrales de Frullani : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(bt) - f(at)}{t}\,\mathrm{d}t$ où $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une application continue admettant une limite L en ∞ et une limite ℓ en 0 et a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

---

le prochain programme sera : suites et séries de fonctions .