PC $\overset{\star}{2}$

Colles semaine 10

du 10 au 13 décembre 2024

Rappel : Le programme de colle en semaine 10 est constitué du programme de la semaine 9 et d'icelui.

Chapitre 10 : Espaces vectoriels normés

I: Définitions :

1) Normes

a) Définition.

b) Distance

c) Norme euclidienne, norme d'algèbre.

d) **Proposition :** c'est une fonction convexe.

2) Exemples classiques :

a) Dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$:

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.
- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ (Dans $\mathbb{R}^n$, c'est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique).
- $\|x\|_\infty = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.
- plus généralement (HP) : $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$.
- **Proposition :** $\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

b) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

- $\|A\|_1 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$.
- $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|^2} = \operatorname{tr}({}^tAA)$ (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique) .
- $\|A\|_\infty = \sup_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$.
- **Proposition :** $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes d'algèbre .

c) Idem dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$:

d) Dans $\mathbb{K}[X]$:

- $\|P\|_1 = \sum_{n\in N} |a_i|$.

- $\|P\|_2 = \sqrt{\sum_{n\in N} |a_i|^2}$.
- $\|P\|_\infty = \sup_{n\in N} |a_i|$.
- $N_1(P) = \int_a^b |P(t)|dt$.
- $N_2(P) = \sqrt{\int_a^b |P(t)|^2 dt}$.
- $N_\infty(P) = \sup_{t\in[a,b]} |P(t)|$.

e) Dans $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K})$:

- $N_1(f) = \int_a^b |f(t)|dt$.
- $N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$.
- $N_\infty(f) = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$.
- Plus généralement (H.P.) : $N_p(f) = \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p dt}$.
- **Proposition :** $\lim_{p\to+\infty} N_p(f) = N_\infty(f)$.

II: Boules et sphères :

Définitions :

- boule ouverte de centre a et de rayon r : $\mathcal{B}_o(a,r) = \{x \in E,\ \|x-a\| < r\}$.
- boule fermée de centre a et de rayon r : $\mathcal{B}_f(a,r) = \{x \in E,\ \|x-a\| \leqslant r\}$.
- sphère de centre a et de rayon r : $\mathcal{S}(a,r) = \{x \in E,\ \|x-a\| = r\}$.
- **Définition :** partie bornée.
  Remarque : La bornitude d'une partie dépend de la norme choisie.
- **Définitions :** suite, application bornée.

III: Partie convexes :

1) définition
2) **Proposition :** une boule est convexe.

IV: Normes équivalentes

1) **Définition : normes équivalentes :** on dit que N_1 et N_2 sont deux normes *équivalentes* si $\exists \alpha$ et $\beta \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ tels que
$$\forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$$
2) **Proposition :** La relation d'équivalence est une relation d'équivalence.
3) **Proposition :** Deux normes ne sont pas équivalentes s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E\backslash 0_E$ telle que $\dfrac{N_1(u_n)}{N_2(u_n)}$ tende vers 0 ou $+\infty$.

4) **Proposition :** la bornitude d'une partie de E ne dépend pas de la norme équivalente choisie :
I.e. : Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes, soit A une partie de E,

$$A \text{ est bornée pour la norme } N_1 \iff A \text{ est bornée pour la norme } N_2.$$

5) **Théorème fondamental (admis) :** $\boxed{\text{en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes}}$.

V: Suites à valeurs dans e.v.n.

1) **Convergence d'une suite :**
Définition : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour la norme $||.||$ si $\|u_n - \ell\| \to 0$.

2) **Remarque :** Une suite peut converger pour une norme et pas pour une autre.

3) **Proposition :** La convergitude d'une suite ne dépend de la norme équivalente choisie.
Dans ce cas, la limite ne dépend pas de la norme équivalente choisie.
i.e. : Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$,

$$u_n \to \ell \text{ pour la norme } N_1 \iff u_n \to \ell \text{ pour la norme } N_2.$$

4) ► **Théorème :** Une suite (u_n) converge dans un e.v.n. de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$ vers une limite ℓ si et seulement chaque coordonnée de u_n converge vers la coordonnée correspondante de ℓ.

5) **Théorème généraux de convergence :**
   - **a)** Unicité de la limite.
   - **b)** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Longrightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée.
   - **c)** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, ses sous-suites aussi.
   - **d)** Opérations sur les limites.

6) **Relations de comparaison :** suite dominée par une autre, suite négligeable devant une autre.

VI: Ouverts, fermés et compacts

1) **Définition :**
   - Soit $A \subset E$, on dit que A est un *ouvert de* E si $\forall x \in A$, $\exists r > 0$ tel que $\mathcal{B}_o(x, r) \subset A$.
   - On dit que A est un *fermé de* E si c'est le complémentaire d'un ouvert.

2) **Proposition :** une boule ouverte est un ouvert, une boule fermée est un fermé, une sphère est un fermé, un ensemble fini est un fermé.

3) **Proposition :** une union d'ouverts est un ouvert, une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

4) **Proposition :** une union finie de fermés est un fermé, une intersection de fermés est un fermé.

5) ► **Caractérisation séquentielle des fermés :**
Soit F une partie de E,

$$\boxed{\begin{array}{c} F \text{ est un fermé de } E \\ \Updownarrow \\ \forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}},\ \forall \ell \in E \text{ telle que } u_n \to \ell \text{ alors } \ell \in F \end{array}}.$$

6) **Proposition :** un s.e.v. d'un espace vectoriel de dimension finie est fermé.

7) **Définitions :**
   - **a)** Soit $A \subset E$, on dit que *a est un point intérieur de A* s'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_o(a, r) \subset A$.
   On appelle intérieur de A, noté $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs de A.

b) On dit que *a est un point adhérent de A* si $\forall r > 0$, $\mathcal{B}_o(a, r) \cap A \neq \varnothing$. On appelle adhérence de A, noté $\bar{A}$ l'ensemble des points adhérents de A.

c) On appelle *frontière de A* l'ensemble $\bar{A} \backslash \mathring{A}$.

8) Proposition : $a \in \bar{A}$ si et seulement s'il existe une suite à valeurs dans A qui converge vers a.

9) a) Définition : Partie dense : On dit que $A \subset E$ *est dense dans E* si $\overline{A} = E$, i.e. si tout élément de E est limite d'une suite à valeurs dans A.

b) Exemples

i) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

ii) ► $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

iii) L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

iv) L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

10) a) Définition : dans un e.v.n. de dimension finie, un *compact* est un fermé borné.

b) Exemples : une boule fermée, une sphère, une partie finie sont des compacts.

c) Théorème de Bolzano Weierstrass (HP) : Une suite à valeurs dans un compact admet une valeur d'adhérence.

---

le prochain programme sera ne sera pas hors-norme.